Nome e COGNOME................................. Matricola............

MATEMATICA III

Settembre 2002

Esercizio 1
Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

e discuterne il tipo.

Soluzione:
Ricerca dei punti critici: $\nabla f = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1-x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0, \\ \\ \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-x^2+y^2 = 0, \\ \\ xy = 0. \end{cases}$$

Si noti che la soluzione $x = 0$ della seconda equazione non è ammissibile per la prima equazione $(1 + y^2 = 0)$. I punti critici quindi risultano:

$$P_1 = (1,0)\,, \qquad P_2 = (-1,0)\,.$$

Classificazione dei punti critici. Per prima cosa si calcolano le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{x,x} &= \frac{-2x\,(3-x^2+3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{x,y} &= \frac{-2y\,(1-3x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}, \\ f_{y,y} &= \frac{-2x\,(1+x^2-3y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}. \end{aligned}$$

Consideriamo dapprima il punto P_1:

$$H_{P_1}f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\det H_{P_1}f = \frac{1}{4} > 0$, $f_{x,x} < 0 \Rightarrow P_1$ punto di massimo. In alternativa si può notare che la matrice hessiana in P_1 ha entrambi gli autovalori negativi, giungendo alla stessa conclusione.

Consideriamo ora il punto P_2:

$$H_{P_2}f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\det H_{P_2}f = \frac{1}{4} > 0$, $f_{x,x} > 0 \Rightarrow P_2$ punto di minimo. In alternativa si può notare che la matrice hessiana in P_2 ha entrambi gli autovalori positivi.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_D 2xy\,dx\,dy\,,$$

dove D è la regione del semipiano $x \geq 0$ delimitata dalle curve di equazione $y = 2 - x^2$, $y = x$ e $y = 0$.

Soluzione:

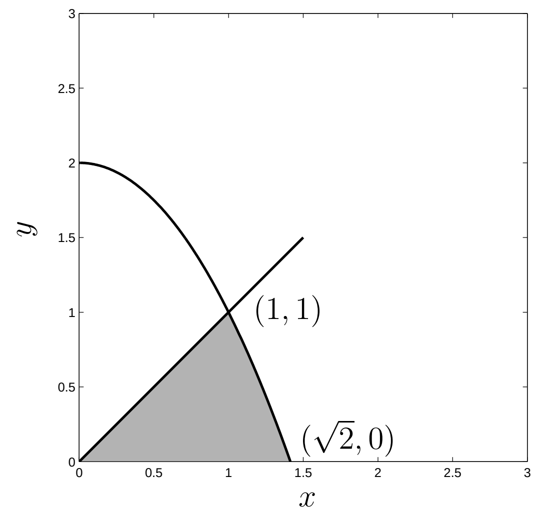

Figure 1: Dominio di integrazione

Il dominio è sia orizzontalmente convesso (x-semplice) che verticalmente convesso (y-semplice), tuttavia conviene integrare per orizzontali. L'intersezione tra la retta $y = x$ e la parabola è nel punto $(1, 1)$. Il dominio di integrazione è

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{2 - y}\right\}.$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{2-y}} 2xy\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(2y - y^2 - y^3\right) \mathrm{d}y \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Determinare per $x > 0$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{x}\, y = x^2 - 3x\,.$$

Soluzione:
Dall'equazione risulta:

$$a(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x^2 - 3x.$$

$$A(x) = \int a(x) \mathrm{d}x = \log(x).$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= c\, \mathrm{e}^{-A(x)} + \mathrm{e}^{-A(x)} \cdot \int \mathrm{e}^{A(x)} f(x) \mathrm{d}x \\
&= c\, \mathrm{e}^{-\log(x)} + \mathrm{e}^{-\log(x)} \cdot \int \mathrm{e}^{\log(x)} (x^2 - 3x) \mathrm{d}x \\
&= c\, \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \int x(x^2 - 3x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - x^3 \right) \\
&= \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} - x^2.
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Le urne A e B contengono ognuna due palle bianche e due palle nere. Si estrae una palla dall'urna A e la si trasferisce nell'urna B; poi se ne estrae una dall'urna B, che risulta essere bianca. Qual è la probabiltà che la palla trasferita fosse bianca?

A $\frac{2}{5}$

B $\frac{3}{5}$

C $\frac{1}{2}$

D $\frac{4}{5}$

Soluzione:

La soluzione è $\boxed{\mathrm{B}}$. Supponiamo di trasferire dall'urna A all'urna B una pallina nera: allora nell'urna B ho tre palline nere e due bianche, quindi la probabilità di estrarre successivamente da B una pallina bianca è (numero di casi favorevoli su numero di casi possibili) $P(B_B|A_N) = \frac{2}{5}$. Supponiamo invece di trasferire dall'urna A all'urna B una pallina bianca: allora nell'urna B ho tre palline bianche e due nere, quindi la probabilità di estrarre successivamente da B una pallina bianca è $P(B_B|A_B) = \frac{3}{5}$. Il problema chiede però di determinare $P(A_B|B_B)$, quindi applichiamo il teorema di Bayes considerando A_B e A_N le due ipotesi:

$$P(A_B|B_B) = \frac{P(B_B|A_B)P(A_B)}{P(B_B|A_B)P(A_B) + P(B_B|A_N)P(A_N)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

Esercizio 5

Un'urna contiene N palline nere e B palline bianche ($N \geq 2$, $B \geq 2$). Si estraggono due palline in blocco, si reinseriscono nell'urna e si ripete 10 volte tale esperimento. Si calcoli:

a) la probabilità che tutte le palline estratte siano dello stesso colore;

b) la probabilità che in due estrazioni successive si estraggano due palline nere e successivamente due palline bianche.

Soluzione:

Indichiamo con $P(P_1, P_2)$ la probabilità di estrarre prima una pallina P_1 e poi una pallina P_2.

$$P(B,B) = \frac{B}{N+B}\frac{B-1}{N+B-1}, \qquad P(N,N) = \frac{N}{N+B}\frac{N-1}{N+B-1},$$
$$P(B,N) = \frac{B}{N+B}\frac{N}{N+B-1}, \qquad P(N,B) = \frac{N}{N+B}\frac{B}{N+B-1}.$$

a) La probabilità di ottenere per tutte e dieci le estrazioni due palline bianche è $P(B,B)^{10}$, mentre la probabilità di ottenere per dieci volte una coppia di palline nere è $P(N,N)^{10}$. La soluzione è la somma di queste due probabilità $P(B,B)^{10} + P(N,N)^{10}$.

b) Le due estrazioni successive sono eventi indipendenti, quindi la probabilità è data dal prodotto delle probabilità $P(N,N) \cdot P(B,B)$.

Esercizio 6

Se X è normalmente distribuita con media e deviazione standard pari a 2, calcolare $P(|X-1| \leq 2)$.

Soluzione:

$$|X-1| \leq 2 \Rightarrow -1 \leq X \leq 3.$$

$$P(-1 \leq X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X < -1).$$

Effettuiamo la trasformazione riportandoci alla distribuzione normale standardizzata $Z = \dfrac{3-\mu}{\sigma}$.

$$\Phi\left(Z \leq \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}\right) = 0.6915,$$

$$\Phi\left(Z \leq \frac{-1-2}{2} = -\frac{3}{2}\right) = 1 - \Phi\left(Z \leq \frac{3}{2}\right) = 1 - 0.9332.$$

$$P(-1 \leq X \leq 3) = 0.6247.$$