

ESERCITAZIONE 3

1. Disegnare i grafici dei polinomi fondamentali di Lagrange di grado 5 su nodi equidistanti in $[0, 1]$ (help polyfit, polyval, plot).
2. Utilizzando funzioni Matlab, determinare il polinomio di grado 4, 8, 12 interpolante la funzione di Runge $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sui nodi equidistanti dell'intervallo $[-5, 5]$ e dell'intervallo $[1, 2]$. Rappresentare i grafici della funzione e dei polinomi in entrambi i casi. Commentare i risultati.
3. Utilizzando la rappresentazione

$$p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

determinare il polinomio interpolante i dati (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, n$, mediante la risoluzione di un sistema lineare con matrice di Vandermonde V (help vander, $V \setminus y$). Testare il precedente programma utilizzando, per esempio, $n+1$ nodi equidistanti x_i , $i = 0, 1, \dots, n$ nell'intervallo $[0, 1]$ e i valori dei polinomi $p_5(x) = x^5$ e $p_7(x) = x^7$ con $n=3,5,7,9$. Commentare i risultati.

4. Implementare gli algoritmi Difdiv e Interp per la costruzione e la valutazione del polinomio di Newton interpolante i dati (x_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$. Testare i precedenti programmi.
5. Disegnare utilizzando la funzione Matlab spline, la spline cubica interpolante su 5, 9, 13 nodi equidistanti dell'intervallo $[-5, 5]$ la funzione di Runge (vedi esercizio 2) (help spline, plot).
6. Mediante le funzioni Matlab polyfit e spline, interpolare la funzione $f(x) = |x|$ su 5 e 10 nodi equidistanti dell'intervallo $[-2, 2]$. Rappresentare i relativi grafici e commentare i risultati ottenuti.
7. Scrivere le function che calcolano l'integrale definito

$$\int_a^b f(x) dx$$

con il metodo dei trapezi e il metodo di Simpson.

8. Utilizzare i programmi *trapezi.m* e *simpson.m* per approssimare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx, \quad \int_0^1 \log^2(1+x) dx.$$

Provare con un numero crescente di nodi al fine di verificare la convergenza dei due metodi.

9. Utilizzare il programma *trapezi.m* con $n = 100, 200, 400$ per calcolare l'integrale:

$$I = \int_{-2\pi}^0 x e^x \cos(2x) dx \approx 0.1221226046.$$

Calcolare gli errori delle approssimazioni ottenute e commentarli.