ESERCITAZIONE

Si considerino i seguenti problemi di Cauchy:

(1)
$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + sin(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = \frac{1}{2}(e^x - \sin(x) - \cos(x))$;

(2)
$$\begin{cases} y'(x) = -20\,[y(x) - 1]^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = 1 + \frac{1}{1+20x}$;

(3)
$$\begin{cases} y'(x) = -10^3\,[y(x) - \cos(x) - \sin(x)] \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

la cui soluzione è $y(x) = e^{-10^3 x} + \cos(x)$;

1. Utilizzare i metodi numerici forniti per stimare la soluzione del problema differenziale (1) nel punto $x = x_N = 1$, con passo $h = \frac{1}{N}$. Definendo $N = 10^k$ per valori di $k = 1, 2, 3$, calcolare l'errore assoluto e l'ordine di convergenza dei metodi esaminati.

2. Integrare il problema differenziale (2) con il metodo di Heun e quello di Runge-Kutta del quarto ordine fornito. Stimare la soluzione nel punto $x = x_N = 1$ e osservare come l'ordine del metodo influisca sull'accuratezza del risultato. Utilizzare diversi valori di $h = \frac{1}{N}$ con $N = 10^k$ e $k = 1, 2, 3$. Notare che la stabilità dei metodi eaminati è legata alla scelta del passo.

3. Implementare il metodo dei trapezi per integrare il problema lineare di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) + g(x) \\ y(x0) = y0 \end{cases}$$

con passo $h = \frac{xN - x0}{N}$, ove x_N e N sono fissati a priori. Calcolare il valore incognito y_{n+1} risolvendo analiticamente l'equazione che definisce il metodo:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\lambda y_n + g(x_n) + \lambda y_{n+1} + g(x_{n+1})].$$

4. Applicare heun.m e traplin.m al problema differenziale (3) per stimare la soluzione nel punto $x = x_N = 1$, per valori di $h = \frac{1}{N}$ con $N = 10^k$ e $k = 1, 2, 3$. Notare che il metodo dei trapezi a differenza del metodo di Heun è stabile per tutte le scelta del passo h effettuate.