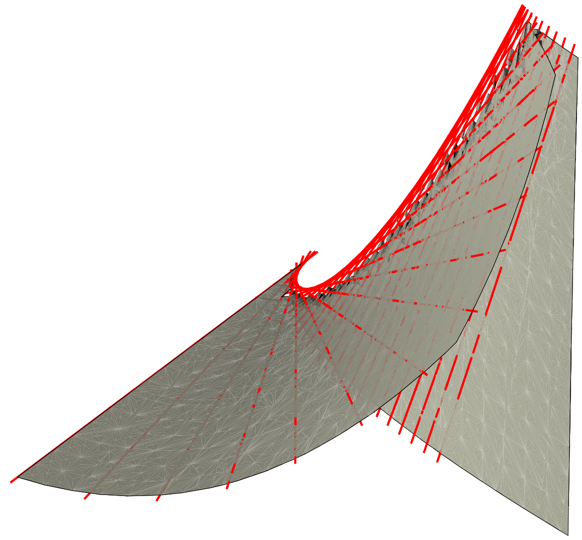
MAT+

Cubi, cuboidi e cubiche



1. Dati $Q = q - p^2/3$ e $R = r + 2p^3/27 - pq/3$, esprimere il discriminante $D = -4Q^3 - 27R^2$ in termini di p, q, r senza parentesi! L'equazione $D = 0$ che risulta definisce la superficie illustrata nello spazio $Opqr$.

2. Verificare che $x = 2$ è una radice dell'equazione $x^3 - 8x + 8 = 0$. In questo caso, esistono *tre* radici reali? Trovare le altre due radici usando il fatto che il loro prodotto è -8. Fare lo stesso esercizio per l'equazione $x^3 + x - 10 = 0$.

3. Si supponga che le radici a, b, c di $f(x) = x^3 - px^2 + qx - r$ siano tutti reali e che $p, q, r > 0$. Mostrare che $a, b, c > 0$. [Visto che $abc = r$, basta eliminare il caso in cui $a, b < 0$ e $c = p - a - b > 0$.]

4. Si supponga che $D > 0$. Segue dalla lezione (con un segno corretto) che $x = y - Q/(3y)$ è una radice di $g(x) = x^3 + Qx - R$ se e solo se

$$y^3 = \tfrac{1}{2}\Big(R \pm i\sqrt{\tfrac{D}{27}}\,\Big).$$

Verificare che il modulo di questo numero complesso è uguale a $-Q^3/27$. Dedurre che $|y|^2 = -Q/3$ e che

$$x = y + \overline{y} = 2\,\mathrm{Re}(y).$$

Segue che ci sono *tre* soluzioni reali distinti di $g(x) = 0$. Perché?

5. Si consideri il polinomio cubico

$$(x-t)^2(x-t-3u) = x^3 - px^2 + qx - r$$

con radici $a = b = t$ e $c = t + 3u$. Verificare che

$$(p, q, r) = \boldsymbol{\gamma}(t) + u\,\boldsymbol{\gamma}'(t),$$

dove $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ è la funzione con $\boldsymbol{\gamma}(t) = (3t, 3t^2, t^3)$, la cui immagine è la cubica gobba. Dedurre che, per t fissato, la superficie $D = 0$ contiene non solo il punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$ ma anche un'intera *retta* che passa per questo punto.