

# Capitolo 2

## Matrici e Determinanti

Scopo di questo capitolo è formalizzare il concetto di matrice già introdotto nel precedente capitolo e studiare le proprietà essenziali dell'insieme delle matrici che costituisce un valido esempio di spazio vettoriale, struttura algebrica che sarà definita nel Capitolo 4.

### 2.1 Somma di matrici e prodotto per un numero reale

**Definizione 2.1** Una matrice di  $m$  righe e di  $n$  colonne, ad elementi reali, è una tabella del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Per convenzione le matrici vengono indicate con le lettere maiuscole dell'alfabeto e l'insieme delle matrici di  $m$  righe ed  $n$  colonne sarà indicato con  $\mathbb{R}^{m,n}$  o, talvolta, con  $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(m, n)$ . In forma sintetica la matrice (2.1) si può anche scrivere come:

$$A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

e  $a_{ij}$  è l'elemento della matrice  $A$  di posto  $(i, j)$ .

**Esempio 2.1** I numeri reali possono essere considerati come matrici di una riga ed una colonna, cioè come elementi di  $\mathbb{R}^{1,1}$ . Quindi  $\mathbb{R}$  è effettivamente uguale a  $\mathbb{R}^{1,1}$ .

**Esempio 2.2** Le matrici che hanno lo stesso numero di righe e di colonne si dicono *quadrato* e tale numero si dice *ordine* della matrice. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice quadrata di ordine 2.

**Esempio 2.3** Le matrici con una riga e  $n$  colonne si dicono *matrici riga*. Per esempio:

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \in \mathbb{R}^{1,4}$$

è una matrice riga.

**Esempio 2.4** Le matrici con  $m$  righe e una colonna si dicono *matrici colonna*. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1}$$

è una matrice colonna.

**Osservazione 2.1** Si osservi che, alla luce dei due esempi precedenti, gli elementi del prodotto cartesiano:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

possono essere visti come matrici riga o colonna. Quindi  $\mathbb{R}^n$  può essere identificato sia con  $\mathbb{R}^{1,n}$  sia con  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

**Esempio 2.5** La matrice  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ , con tutti gli elementi  $a_{ij} = 0$ , si dice *matrice nulla* e si indica con  $O$ , da non confondersi con il numero  $0 \in \mathbb{R}$ . È evidente che la matrice nulla è l'unica matrice ad avere rango zero.

**Esempio 2.6** Nel caso di una matrice quadrata  $A = (a_{ij})$  di ordine  $n$ , tutti gli elementi del tipo  $a_{ii}$ , al variare di  $i$  da 1 a  $n$ , costituiscono la *diagonale principale*. Rivestiranno in seguito molta importanza le matrici *diagonali*, vale a dire le matrici quadrate aventi elementi tutti nulli al di fuori della diagonale principale cioè  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . L'insieme delle matrici diagonali di ordine  $n$  sarà indicato con:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ii} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (2.2)$$

**Esempio 2.7** Casi particolari dell'esempio precedente sono la *matrice unità*  $I \in \mathbb{R}^{n,n}$ , ossia la matrice diagonale avente tutti 1 sulla diagonale principale:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

e la *matrice quadrata nulla*  $O \in \mathbb{R}^{n,n}$ , intendendosi come tale la matrice quadrata avente tutti gli elementi uguali a 0.

La definizione che segue stabilisce la relazione di uguaglianza tra matrici.

**Definizione 2.2** Due matrici  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$  sono uguali se:

1. hanno lo stesso numero di righe e di colonne, cioè  $A$  e  $B$  appartengono entrambe allo stesso insieme  $\mathbb{R}^{m,n}$ ,
2. gli elementi di posto uguale coincidono, cioè:

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Introduciamo ora le definizioni di somma di matrici e di prodotto per un numero reale sull'insieme  $\mathbb{R}^{m,n}$ .

**Definizione 2.3** Si definisce *somma delle due matrici*  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , entrambe appartenenti a  $\mathbb{R}^{m,n}$ , la matrice  $A + B \in \mathbb{R}^{m,n}$  data da:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

**Esempio 2.8** Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

la loro somma è la matrice:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Se  $A$  e  $B$  non appartengono allo stesso insieme  $\mathbb{R}^{m,n}$ , non è possibile definire la loro somma. Ad esempio non è definita la somma della matrice  $A$  con la matrice:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 2.1** *L'insieme  $\mathbb{R}^{m,n}$  con l'operazione di somma di matrici ha la struttura di gruppo commutativo, vale a dire per la somma di matrici valgono le proprietà di seguito elencate:*

1.  $A + B = B + A, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$  (proprietà commutativa).
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$  (proprietà associativa).
3.  $O + A = A + O = A, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$  (esistenza dell'elemento neutro).
4.  $A + (-A) = O, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$  (esistenza dell'opposto).

**Dimostrazione** È lasciata per esercizio ed è la naturale conseguenza del fatto che  $(\mathbb{R}, +)$  è un gruppo commutativo. L'elemento neutro è la matrice nulla  $O \in \mathbb{R}^{n,n}$  introdotta nell'Esempio 2.5, l'opposto della matrice  $A = (a_{ij})$  è la matrice  $-A$  così definita  $-A = (-a_{ij})$ . ■

**Definizione 2.4** *Si definisce prodotto di un numero reale  $\lambda$  per una matrice  $A = (a_{ij})$  di  $\mathbb{R}^{m,n}$  la matrice che si ottiene moltiplicando ogni elemento di  $A$  per lo scalare  $\lambda$ , ossia:*

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}),$$

quindi  $\lambda A$  è ancora una matrice di  $\mathbb{R}^{m,n}$ .

**Esempio 2.9** Se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

il prodotto  $3A$  è la matrice:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

L'opposto della matrice  $A$  è dunque  $-A = (-1)A$ . Inoltre  $0A = O$ , dove  $O$  indica la matrice nulla.

**Teorema 2.2** *Per il prodotto di un numero reale per una matrice valgono le seguenti proprietà che mettono in relazione la somma di matrici con la somma e il prodotto di numeri reali:*

1.  $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n};$
2.  $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n};$
3.  $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{m,n};$

$$4. \ 1A = A, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}.$$

**Dimostrazione** Si tratta di un semplice esercizio. ■

**Osservazione 2.2** L'insieme delle matrici  $\mathbb{R}^{m,n}$ , considerato congiuntamente con le operazioni di somma e di prodotto per numeri reali, ciascuna delle quali dotata delle quattro proprietà prima enunciate, dà luogo ad una struttura algebrica che è un esempio di spazio vettoriale.

Gli spazi vettoriali, che costituiscono la base dell'algebra lineare, saranno studiati in modo intensivo a partire dal Capitolo 4. Si è preferito, per ragioni didattiche, anteporre la descrizione degli esempi più facili di spazi vettoriali alla loro stessa definizione. Questo è il caso di  $\mathbb{R}^{m,n}$  e nel prossimo capitolo la stessa idea sarà applicata all'insieme dei vettori ordinari dello spazio in modo da permettere al Lettore di prendere confidenza con nozioni, a volte troppo teoriche rispetto alle conoscenze acquisite nella scuola secondaria superiore e di dare la possibilità di affrontare più agevolmente lo studio dei capitoli successivi.

## 2.2 Il prodotto di matrici

La definizione di prodotto di matrici, oggetto di questo paragrafo, trova una sua giustificazione, per esempio, nella rappresentazione mediante matrici dei movimenti in uno spazio vettoriale e nella loro composizione, problematiche che saranno trattate diffusamente nel Capitolo 6.

A prescindere da argomenti più sofisticati, introduciamo questa nuova operazione tra matrici che, anche se a prima vista appare singolare, è comunque dotata di interessanti proprietà, che rendono plausibile la seguente:

**Definizione 2.5** Il prodotto della matrice  $A = (a_{ij})$  di  $\mathbb{R}^{m,n}$  con la matrice  $B = (b_{ij})$  di  $\mathbb{R}^{n,p}$  è la matrice  $C = (c_{ij})$  di  $\mathbb{R}^{m,p}$  i cui elementi sono dati da:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (2.3)$$

Per definizione quindi, si possono solo moltiplicare matrici di tipo particolare, ossia il primo fattore deve avere il numero di colonne pari al numero delle righe del secondo fattore. La matrice prodotto avrà il numero di righe del primo fattore e il numero di colonne del secondo fattore. Da questa affermazione segue che il prodotto di due matrici

non è commutativo. A titolo di esempio, calcoliamo il prodotto delle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ricaviamo i primi due elementi della matrice  $C = (c_{ij}) = AB \in \mathbb{R}^{2,4}$ :

$c_{11}$  si ottiene sommando i prodotti degli elementi della prima riga di  $A$  con gli elementi della prima colonna di  $B$ :  $c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 10$ .

$c_{12}$  si ottiene sommando i prodotti degli elementi della prima riga di  $A$  con gli elementi della seconda colonna di  $B$ :  $c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 16$  e così via.

La matrice  $C$  è dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 16 & 27 & 38 \\ 22 & 31 & 60 & 86 \end{pmatrix}.$$

Per la sua particolare definizione, questo tipo di prodotto di matrici prende il nome di *prodotto righe per colonne*.

**Osservazione 2.3** È chiaro che il prodotto di due matrici quadrate dello stesso ordine è ancora una matrice dello stesso ordine, ma anche in questo caso non vale in generale la proprietà commutativa, per esempio date:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 15 \end{pmatrix}$$

mentre:

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

Nel caso delle matrici quadrate di ordine 1 il prodotto è ovviamente commutativo perché coincide con il prodotto di numeri reali. Anche nel caso delle matrici diagonali il prodotto è commutativo, come si osserverà nel Paragrafo 2.5.

**Osservazione 2.4** Il prodotto di matrici ha singolari particolarità. Per esempio:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \in \mathbb{R}^{2,2},$$

in assoluto contrasto con il solito prodotto di numeri reali in cui se  $ab = 0$  allora necessariamente o  $a = 0$  o  $b = 0$ . Ovviamente se  $O \in \mathbb{R}^{m,n}$  è la matrice nulla e  $A \in \mathbb{R}^{n,p}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k,m}$  allora:

$$OA = O \in \mathbb{R}^{m,p} \quad \text{e} \quad BO = O \in \mathbb{R}^{k,n}.$$

**Esempio 2.10** Si osservi che, date:

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4) \in \mathbb{R}^{1,4}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,1},$$

allora:

$$AB = (30) \in \mathbb{R}^{1,1},$$

mentre:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

**Teorema 2.3** Per il prodotto di matrici valgono le seguenti proprietà:

1.  $(AB)C = A(BC)$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{k,p}$  (proprietà associativa);
2.  $A(B+C) = AB+AC$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{p,m}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $(X+Y)Z = XZ+YZ$ ,  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{n,k}$  (proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma. Si osservi la necessità di enunciare entrambe le proprietà per la mancanza della proprietà commutativa del prodotto);
3.  $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ ;
4.  $AI = IA = A$ ,  $\forall A \in \mathbb{R}^{n,n}$  (le due uguaglianze occorrono solo nel caso delle matrici quadrate; la matrice unità  $I \in \mathbb{R}^{n,n}$  è l'elemento neutro rispetto al prodotto).

**Dimostrazione** È lasciata per esercizio nei casi più semplici, per gli altri si rimanda al Paragrafo 2.9. ■

È valido il seguente teorema che permette di confrontare il rango del prodotto di  $n$  matrici moltiplicabili tra di loro con il rango di ciascuna di esse, per la dimostrazione si rimanda al Paragrafo 4.5.

**Teorema 2.4** Siano  $A_1, A_2, \dots, A_n$  matrici moltiplicabili tra di loro, allora:

$$\text{rank}(A_1 A_2 \cdots A_n) \leq \min\{\text{rank}(A_1), \text{rank}(A_2), \dots, \text{rank}(A_n)\}, \quad (2.4)$$

quindi, in particolare, il rango del prodotto di matrici è minore o uguale del rango di ciascun fattore.

**Osservazione 2.5** È chiaro, anche se può sorprendere, che è necessario porre il segno di disuguaglianza in (2.4), come si può per esempio notare dal fatto che:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

infatti anche se i due fattori hanno rango 1 il loro prodotto ha rango 0.

### 2.2.1 I sistemi lineari in notazione matriciale

Usando la definizione di prodotto di matrici, si può scrivere in modo compatto un generico sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite del tipo (1.2). Siano:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

la matrice dei coefficienti,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$$

la matrice colonna delle incognite e:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1}$$

la matrice colonna dei termini noti, allora il sistema lineare (1.2) si può scrivere, in notazione matriciale, come:

$$AX = B.$$

## 2.3 La matrice inversa

Avendo introdotto il prodotto di matrici (che generalizza il prodotto di numeri reali) appare naturale introdurre il concetto di inversa di una matrice quadrata; a differenza del caso dei numeri è necessario prestare particolare attenzione alla definizione in quanto il prodotto di matrici non è commutativo.

**Definizione 2.6** Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  una matrice quadrata di ordine  $n$ .  $A$  si dice invertibile se esiste una matrice  $X \in \mathbb{R}^{n,n}$  tale che:

$$AX = XA = I, \quad (2.5)$$

dove  $I$  indica la matrice unità di ordine  $n$ .

**Teorema 2.5** Se  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  è invertibile, allora la matrice  $X$ , definita in (2.5), è unica.

**Dimostrazione** Si supponga per assurdo che esistano due matrici diverse  $X, X' \in \mathbb{R}^{n,n}$  che verificano la (2.5). Allora:

$$X' = IX' = (XA)X' = X(AX') = XI = X$$

che è assurdo. Si osservi che, nella dimostrazione, si è usata la proprietà associativa del prodotto di matrici. ■

La matrice  $X$  così definita si dice *matrice inversa di  $A$*  e si indica con  $A^{-1}$ .

Per la matrice inversa valgono le seguenti proprietà la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

**Teorema 2.6** 1.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , con  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  matrici invertibili.

2.  $(A^{-1})^{-1} = A$ , con  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  matrice invertibile.

Nei paragrafi successivi affronteremo il problema di calcolare l'inversa di una matrice, di conseguenza, si tratterà di capire, innanzi tutto, quando una matrice quadrata è invertibile. Si consiglia, prima di continuare la lettura, di svolgere il seguente:

**Esercizio 2.1** Determinare le condizioni affinché la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

sia invertibile e, in questi casi, calcolare  $A^{-1}$ .

Si osservi che per risolvere l'esercizio si deve discutere e risolvere il sistema lineare  $AX = I$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di quattro equazioni nelle quattro incognite  $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$ , che sono gli elementi della matrice  $X$ .

## 2.4 La trasposta di una matrice

**Definizione 2.7** Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  si definisce trasposta di  $A$ , e la si indica con  ${}^tA$  la matrice di  $\mathbb{R}^{n,m}$  che si ottiene scambiando le righe con le colonne della matrice  $A$ , in simboli se  $A = (a_{ij})$  allora  ${}^tA = (b_{ij})$  con  $b_{ij} = a_{ji}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Esempio 2.11** Se:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

allora:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se:

$$A = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

allora:

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Osservazione 2.6** 1. Si osservi che se una matrice è quadrata, allora anche la sua trasposta è una matrice quadrata dello stesso ordine, ma, in generale, diversa dalla matrice di partenza, per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se una matrice è diagonale (cfr. Es. 2.6) allora la sua trasposta coincide con la matrice stessa.

Per la trasposta di una matrice valgono le seguenti proprietà la cui dimostrazione è lasciata per esercizio e si può leggere nel Paragrafo 2.9.

**Teorema 2.7** 1.  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n}.$

2.  ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

3.  ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall B \in \mathbb{R}^{n,k}.$

4. Se  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  è una matrice invertibile, allora  $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$

## 2.5 Matrici quadrate di tipo particolare

1. L'insieme delle matrici *matrici triangolari superiori* di  $\mathbb{R}^{n,n}$  definito da:

$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^{n,n}) = \left\{ \left( \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right) \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}; \quad (2.6)$$

si tratta delle matrici quadrate che hanno tutti gli elementi nulli al di sotto della diagonale principale, vale a dire se  $A = (a_{ij})$  con  $i, j = 1, 2, \dots, n$  allora  $a_{ij} = 0$  se  $i > j$ . È facile osservare che la somma di due matrici triangolari superiori è ancora una matrice triangolare superiore, lo stesso vale per il prodotto di un numero reale per una matrice triangolare superiore. Molto più sorprendente è il fatto che il prodotto di due matrici triangolari superiori, entrambe dello stesso ordine, è ancora una matrice triangolare superiore. Supponiamo, infatti, di determinare la matrice  $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  prodotto delle matrici triangolari superiori  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  e  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Per semplicità calcoliamo l'elemento  $c_{21}$  della matrice prodotto  $C = AB$ , lasciando il calcolo in generale per esercizio. Da (2.3) si ha:

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = 0b_{11} + a_{22}0 + \dots + a_{2n}0 = 0,$$

in quanto  $a_{ij} = 0$  e  $b_{ij} = 0$  se  $i > j$ .

Si possono definire in modo analogo le matrici triangolari inferiori, con proprietà simili a quelle descritte nel caso delle matrici triangolari superiori. Come è già stato osservato nel Capitolo 1, il calcolo del rango di una matrice triangolare superiore è molto semplice.

2. L'insieme delle *matrici diagonali*  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n})$  introdotte in (2.2). La caratteristica principale di tali matrici è la loro analogia con il campo dei numeri reali, infatti il prodotto di due matrici diagonali è ancora una matrice diagonale, avente ordinatamente sulla diagonale principale il prodotto degli elementi corrispondenti delle due matrici date. Le matrici diagonali sono, ovviamente, sia matrici triangolari superiori sia matrici triangolari inferiori. Quindi una matrice diagonale è ridotta per righe, di conseguenza, il suo rango è pari al numero degli elementi non nulli della diagonale principale. Nel caso di rango massimo, la matrice diagonale è invertibile e la sua inversa ha sulla diagonale principale ordinatamente gli inversi dei corrispondenti elementi della matrice data, ossia se:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ con } a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \text{ allora } A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} \end{pmatrix},$$

la verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio. Si osservi che  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n,n})$  è un sottoinsieme sia dell'insieme delle matrici triangolari superiori di ordine  $n$  sia dell'insieme delle matrici triangolari inferiori di ordine  $n$ .

3. L'insieme delle *matrici simmetriche* di  $\mathbb{R}^{n,n}$  definito da:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid A = {}^tA\}. \quad (2.7)$$

Scrivendo esplicitamente la definizione si ottiene che una matrice simmetrica è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

in altri termini, una matrice  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$  è simmetrica se e solo se:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Per esercizio si calcoli la somma di due matrici simmetriche, il prodotto di una matrice simmetrica per un numero reale e la trasposta di una matrice simmetrica e si decida se si ottiene ancora una matrice simmetrica. Si osservi, in particolare, che il prodotto di due matrici simmetriche non è, in generale, una matrice simmetrica. Per esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$