

Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura
Istituzioni di Matematiche II, a.a 1999–00

Esercizi su rette e piani – 3^a settimana

- 1) Determinare le componenti di un vettore parallelo e di un vettore perpendicolare alle seguenti rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 5 - 4t \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 \end{cases} \quad r_3 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{3}$$

$$r_4 : 2x + y - 5 = 0, \quad r_5 : x + y = 0, \quad r_6 : y - 3 = 0, \quad r_7 : x = 0.$$

- 2) Scrivere le equazioni parametriche, cartesiane ed esplicite delle rette passanti per i punti

$$a) A = (0, 0), B = (3, -2), \quad b) A = (2, 1), B = (0, 0), \quad c) A = (2, 1), B = (5, 1).$$

- 3) Scrivere l'equazione cartesiana delle rette r ed s passanti per il punto $P_0 = (3, -5)$ e parallele rispettivamente alle rette

$$r' : x + 2y - 4 = 0 \quad s' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

- 4) Date le rette $r: x + ky + k = 0$ ed $s: kx + y + k = 0$, con $k \in \mathbf{R}$, determinare per quale valore di k le rette sono parallele e per quale valore il loro punto comune appartiene anche alla retta di equazione $x + y + 3 = 0$.
- 5) Calcolare l'area del triangolo di vertici $A = (0, 1)$, $B = (3, 0)$, $C = (1, 5)$.
- 6) Data la retta $y = 4x + k$, con $k \in \mathbf{R}$, determinare k in modo che la retta passi per il punto $P_0 = (-1, -1)$.
- 7) Trovare i valori di k per cui le rette dell'esercizio 4 sono perpendicolari. Quali rette si ottengono?
- 8) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$ e determinare in che punto incontra l'altra retta $y = 4x + 3$.
- 9) Scrivere in forma cartesiana l'equazione della retta passante per il punto $(2, 1)$ e parallela al vettore $3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
- 10) Date le rette $kx + 3y + 1 = 0$ e $k'x - 2y + 2 = 0$, verificare per quale valore del rapporto k/k' le rette risultano parallele e per quale valore del prodotto kk' risultano perpendicolari.
- 11) Calcolare l'angolo tra le rette passanti rispettivamente per i punti $(1, 1)$, $(-5, -5)$ e $(0, 2)$, $(0, -4)$.
- 12) Determinare l'equazione generale della retta perpendicolare alla retta tangente ad una curva e passante per il punto di tangenza.

- 13) Scrivere l'equazione cartesiana dei piani soddisfacenti le seguenti condizioni:
- passante per $A = (1, 2, 3)$ e perpendicolare a $\mathbf{u} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - passante per $A = (1, 2, 3)$ e parallelo a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 - passante per $A = (1, 2, 3)$ e $B = (0, 2, 1)$ e parallelo a $\mathbf{u} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - passante per $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, 2, 1)$ e $C = (1, -1, 2)$.
- 14) Scrivere l'equazione parametrica delle rette soddisfacenti le seguenti condizioni:
- passante per $A = (1, 2, 3)$ e $B = (0, 2, 1)$
 - passante per $A = (1, 2, 3)$ e parallela a $\mathbf{u} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 - passante per $A = (1, 2, 3)$ e ortogonale al piano $2x - y + 3z - 5 = 0$.
- 15) Verificare che i piani $\pi : 2x - 3y + z = 0$ e $\pi' : x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}$ non hanno punti in comune.
- 16) Trovare l'equazione parametrica della retta intersezione del piano $\pi : x + y + z = 1$ con il piano $\pi' : x - y + 2z = 0$.
- 17) Dire se il piano $2x - y + z = 0$ contiene almeno una retta parallela alla retta

$$s : \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

- 18) Trovare l'equazione parametrica di una retta passante per $A = (1, 0, 1)$ e parallela ai piani $x - y + z = 0$ e $x + y = 1$.
- 19) Verificare che la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

non interseca il piano passante per i punti $P_1 = (1, 1, 0)$, $P_2 = (1, -1, 0)$ e $P_3 = (2, 1, 0)$.

- 20) Verificare che la retta passante per $P_1 = (1, 1, 1)$ e $P_2 = (2, 2, 2)$ è contenuta nel piano di equazione $x + y - 2z = 0$.
- 21) Trovare il piano individuato dai punti $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (1, 1, 2)$ e $P_3 = (1, 2, 1)$. Calcolare il punto di intersezione tra questo piano e la retta ad esso perpendicolare passante per il punto $P_4 = (2, 1, 1)$.
- 22) Dati i piani $\pi : 3x + 4y - 6z + 1 = 0$ e $\pi' : kx - 2y + 3z - 3 = 0$, calcolare per quale valore di k i piani risultano paralleli e per quale perpendicolari. Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P = (0, 1, 2)$ e perpendicolare a π .
- 23) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta passante per $P = (2, 0, 1)$ e parallela a $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
- 24) Scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per $P_0 = (1, 1, 2)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

- 25) Dati i punti $P_0 = (1, 2, 1)$ e $A = (1, 2, -3)$, scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per P_0 e perpendicolare alla retta che passa per $O = (0, 0, 0)$ e A .
- 26) Scrivere le equazioni parametrica e cartesiana passante per il punto $P_0 = (1, 5, 1)$ e perpendicolare al piano $x - 4y + 3z - 7 = 0$.
- 27) Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

- 28) Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P_0 = (2, 1, -1)$ e perpendicolare al piano passante per $P_0, P_1 = (-1, 2, 1)$ e $P_2 = (1, -1, 2)$.
- 29) Data la retta

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

scriverne la forma parametrica e trovarne un vettore perpendicolare.

- 30) Dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (1, -2, 1)$, trovare un vettore perpendicolare al piano che contiene il triangolo ABC e calcolarne l'area.
- 31) Dati i piani $\pi_1 : hx - 2y + 2z + 4 = 0$ e $\pi_2 : 2x + 2hy + 3z - 1 = 0$, determinare h in modo che i due piani siano ortogonali; per tale valore di h , scrivere l'equazione parametrica della retta per $P_0 = (1, 2, 3)$ e parallela ad entrambi i piani.
- 32) Dati il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e i vettori $\mathbf{u} = (0, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$, scrivere l'equazione parametrica per P_0 e perpendicolare ad entrambi. Scrivere la stessa retta come intersezione di due piani.
- 33) Dati i punti $P_0 = (0, 1, 3)$, $P_1 = (2, 1, 1)$ e $P_2 = (1, 2, -3)$, scrivere l'equazione parametrica della retta per P_0 e perpendicolare al piano che passa per P_0, P_1 e P_2 .
- 34) Dati il punto $P_0 = (1, 1, 1)$ e i vettori $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, scrivere l'equazione parametrica della retta per P_0 e parallela ad \mathbf{u} e l'equazione cartesiana del piano per P_0 parallelo a \mathbf{u} e \mathbf{v} .
- 35) Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P = (1, 2, 1)$ e ortogonale al piano contenente i vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$. Scrivere inoltre l'equazione parametrica di una retta per P e parallela al piano contenente i vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} .
- 36) Dati i punti $A = (1, 0, -2)$, $B = (3, k, -1)$, $C = (2, 1, 0)$, $D = (-1, 0, 2)$, determinare k in modo che $(B - A)$, $(A - C)$, $(A - D)$ che appartengano allo stesso piano; scriverne l'equazione in forma cartesiana.
- 37) Scrivere in forma parametrica l'equazione della retta per $P = (2, 1, 0)$ e con direzione parallela a quella del vettore $\mathbf{v} = (-1, 6, -2)$. Determinare per quali valori di k il piano $kx + 3y - z = 0$ risulti parallelo ed ortogonale a detta retta.
- 38) Dato il piano $kx - y + 3z = 0$ e la retta

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + kt \\ z = k - t \end{cases}$$

determinare per quale valore di k il piano, rispettivamente, contiene la retta, è parallelo ad essa e le risulta perpendicolare.