**Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura**
**Istituzioni di Matematiche, a.a. 1999–00**

**Esercizi sulle matrici – $2^a$ settimana**

1) Calcolare i seguenti prodotti di matrici.

$$(1\ 2\ 0\ -1)\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\6\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-3\\2&0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&5\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$(5\ 7)\cdot\begin{pmatrix}4&2\\-3&6\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}2&1\\0&1\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&0\\3&1&-3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&1\\3&1&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&2\\-3&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\3&-2\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\4&-3\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

2) Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&1\\-2&0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1&-3\\2&1\end{pmatrix}$$

a) verificare che $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; b) verificare che $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
c) calcolare $A^2-B^2$ e $(A+B)\cdot(A-B)$; sono uguali? Perchè?

3) Data la matrice colonna $V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, trovare quattro matrici $2\times 2$, $A,B,C,D$ tali che

$$A\cdot V=\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix},\qquad B\cdot V=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix},\qquad C\cdot V=\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix},\qquad D\cdot V=\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}.$$

4) Date le matrici $A=(2,-1)$, $B=\begin{pmatrix}\beta&2\\1&4\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$, dire per quali valori di $\beta$ si ha $A\cdot B\cdot C=0$.

5) Date le matrici $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-2\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$, trovare una matrice $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ tale che $A\cdot X=B$.

6) Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\-1&5&-1&3\\4&3&2&-2\\2&0&1&8\end{pmatrix}$, scrivere i minori $M_{11},M_{23},M_{33},M_{42}$ e i corrispondenti complementi algebrici.

7) Calcolare i determinanti

$$\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}a&a\\1&-1\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&4\\1&2&9\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&2\\0&-1&-3\end{vmatrix}.$$

8) Usando opportune proprietà dei determinanti, calcolare $\begin{vmatrix}1&2&2&3\\4&1&-1&2\\3&6&6&8\\3&2&1&3\end{vmatrix}$.

9) Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \gamma & 1 & 1 \\ 1 & \gamma & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$$

risultano invertibili. Calcolare il rango di dette matrici per quei valori di $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ che le rendono singolari.

10) Trovare (quando ciò è possibile) le inverse delle seguenti matrici e calcolarne il rango

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

11) Trovare le inverse delle matrici

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

12) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -9 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ la matrice $A - \lambda I$ *non* è invertibile.

13) Determinare il valore di $k$ per cui la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \end{pmatrix}$$

soddisfa l'equazione $A^2 = A$.

14) Date

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire quali delle seguenti matrici, $A + B$, $A - B$, $A + 4B$, $2A - B$, sono invertibili.

15) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+k \\ 3+3k & 2 & k \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ k+1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

stabilire per quali valori di $k$ la matrice $A - 2B$ è simmetrica e per quali è antisimmetrica. Calcolare il rango di $A$ e $B$ al variare di $k$.

16) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

determinare il valore di $k$ per cui $det(A - B) = -6$.

17) Determinare al variare di $k$ il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & -1 \\ k & 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Soluzioni.** 4) $\beta = 1/2$. 5) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. 7) i determinanti $3 \times 3$ sono 2,0,1. 8) $-1$.