Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura

Raccolta di esercizi proposti nelle prove scritte

di Istituzioni di Matematiche II

Parte prima: algebra lineare

Esercizio 1. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ -2x_2 + ax_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 2. Dati i vettori $\mathbf{u} = (-7, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, \beta, -1)$, e $\mathbf{w} = (2, 3, -1)$, determinare β in modo che $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano paralleli.

Esercizio 3. Dati i punti $P_0 = (1, 2, 1)$ e $A = (1, 2, -3)$, scrivere le equazioni cartesiana e parametrica del piano passante per P_0 e perpendicolare alla retta che passa per $O = (0, 0, 0)$ e A.

Esercizio 4. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$, e $\mathbf{w} = (1, 1, -2)$, stabilire se esistono numeri $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $(\lambda\mathbf{u} - \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{i}$.

Esercizio 5. Scrivere le equazioni parametrica e cartesiana della retta passante per il punto $P_0 = (1, 5, 1)$ e perpendicolare al piano $x - 4y + 3z - 7 = 0$.

Esercizio 6. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 2 \\ -2x_1 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di α il sistema ammette soluzioni. Per tali valori di α, risolvere il sistema.

Esercizio 7. Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Esercizio 8. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \beta x_3 = 0 \\ 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di β esso ammette soluzioni non banali. Per tali valori di β, risolvere il sistema.

Esercizio 9. Dati i vettori $\mathbf{u} = (2, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{w} = (\alpha, 2, 1)$, determinare α in modo che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano complanari.

Esercizio 10. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, -2, 0)$ e $\mathbf{w} = (\beta, 1, 2)$, determinare β in modo che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ siano complanari.

Esercizio 11. Scrivere l'equazione cartesiana del piano che contiene le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Esercizio 12. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di α esso ammette soluzioni non banali. Per tali valori di α, risolvere il sistema.

Esercizio 13. Dati i punti $P_0 = (2, 3, 1)$ e $A = (1, 1, -2)$, scrivere le equazioni cartesiana e parametrica del piano passante per P_0 e perpendicolare alla retta che passa per $O = (0, 0, 0)$ e A.

Esercizio 14. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ bx_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + bx_3 = -2 \end{cases}$$

Esercizio 15. Dati i vettori $\mathbf{u} = (2, \alpha, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$ e $\mathbf{w} = (\beta, 2, \beta)$, stabilire se esistono valori di α e β tali che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$.

Esercizio 16. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ bx_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

stabilire per quali valori di $b \in \mathbf{R}$ il sistema ammette soluzioni. Per tali valori di b, risolvere il sistema.

Esercizio 17. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -2)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ trovare il valore di $\lambda \in \mathbf{R}$ per cui $(\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}$ è perpendicolare a $\mathbf{k}$.

Esercizio 18. Scrivere le equazioni parametrica e cartesiana della retta passante per il punto $P_0 = (3, 2, 3)$ e perpendicolare al piano $2x - 3y + z - 3 = 0$.

gennaio96

Esercizio 19. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \\ kx_1 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 20. Dati i vettori $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{z} = (\lambda, 0, 1)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare per quale valore di $\lambda \in \mathbf{R}$ i vettori $A \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono complanari.

Esercizio 21. Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P_0 = (2, 1, -1)$ e perpendicolare al piano passante per P_0, $P_1 = (-1, 2, 1)$ e $P_2 = (1, -1, 2)$.

Esercizio 22. Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P_0 = (1, -1, 2)$ e perpendicolare al piano passante per P_0, $P_1 = (2, 1, -1)$ e $P_2 = (-1, 2, 1)$.

Esercizio 23. Determinare, al variare del parametro $h \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + hx_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + hx_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$$

Esercizio 24. Dati i vettori $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 1, -1)$, $\mathbf{z} = (1, 0, \lambda)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare per quale valore di $\lambda \in \mathbf{R}$ i vettori $A \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono complanari.

Esercizio 25. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 26. Data la retta

$$\begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Scriverla in forma parametrica.
b) Trovare un vettore perpendicolare alla retta.

Esercizio 27. Dati i vettori $\mathbf{u} = (0, 1, \lambda)$ e $\mathbf{v} = (-\sqrt{5}, 0, 2)$,
a) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ risultino paralleli.
b) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ risultino ortogonali.
c) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formino un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Esercizio 28. Dati il piano $\lambda x + 4y - z + 1 = 0$ e la retta

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

a) discutere al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ la loro intersezione;
b) calcolare il valore di λ per cui il piano e la retta sono paralleli.

Esercizio 29. Data la retta

$$\begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0 \\ -x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) Scriverla in forma parametrica.
b) Trovare un vettore perpendicolare alla retta.

Esercizio 30. Dati i vettori $\mathbf{u} = (\lambda, 1, 0)$ e $\mathbf{v} = (\sqrt{5}, 0, -2)$,
a) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ risultino paralleli.
b) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ risultino ortogonali.
c) Determinare (se esiste) λ in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ formino un angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Esercizio 31. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 32. Discutere al variare di $\lambda \in \mathbf{R}$ l'intersezione dei piani $x + 4y - \lambda z + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ e $x - 3y + z = 0$,

Esercizio 33. Dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (1, -2, 1)$,
a) trovare un vettore perpendicolare al piano che contiene il triangolo ABC;
b) calcolare l'area del triangolo ABC.

Esercizio 34. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

risolvere il sistema $A^2 \cdot X = A \cdot B$, dove $A^2 = A \cdot A$.

Esercizio 35. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P_0 = (1, 2, 0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$. Discutere al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ l'intersezione di questo piano con quello di equazione

$$x + \lambda y + 2z + 5 = 0.$$

Esercizio 36. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

risolvere il sistema $A^2 \cdot X = A \cdot B$, dove $A^2 = A \cdot A$.

Esercizio 37. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P_0 = (1, 2, 0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$. Discutere al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ l'intersezione di questo piano con quello di equazione

$$x + \lambda y + 2z + 5 = 0.$$

Esercizio 38. Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $P_0 = (1, 2, 0)$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$. Discutere al variare del parametro $\lambda \in \mathbf{R}$ l'intersezione di questo piano con quello di equazione

$$\lambda x + y - z + 5 = 0.$$

Esercizio 39. Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

risolvere il sistema $A^2 \cdot X = A \cdot B$, dove $A^2 = A \cdot A$.

Esercizio 40. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + (a+1)x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$$

Esercizio 41. Dati i piani $\pi_1 :\ hx - 2y + 2z + 4 = 0$ e $\pi_2 :\ 2x + 2hy + 3z - 1 = 0$,

a) determinare h in modo che π_1 e π_2 siano perpendicolari;

b) per tale valore di h, scrivere l'equazione parametrica della retta passante per $P_0 = (1, 2, 3)$ e parallela ad entrambi i piani.

Esercizio 42. Dati i vettori $\mathbf{u} = (0, 2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$, trovare un vettore $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$ e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$. Quanti vettori con queste proprietà esistono?

Esercizio 43. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$ e $\mathbf{x} = (-1, 1, \lambda)$,

a) trovare i valori di λ per cui $|\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}| = \sqrt{6}$;

b) dire quale dei vettori $\mathbf{x}$ così trovati è complanare con $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Esercizio 44. Determinare, al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 5ax_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - ax_2 = 0 \\ ax_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 45. Dati il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e i vettori $\mathbf{u} = (0, 1, 3)$ e $\mathbf{v} = (2, 2, 1)$, scrivere l'equazione parametrica della retta per P_0 perpendicolare a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Scrivere la stessa retta come intersezione di due piani.

Esercizio 46. Dati i punti $P_0 = (0, 1, 3)$, $P_1 = (2, 1, 1)$ e $P_2 = (1, 2, -3)$, scrivere l'equazione parametrica della retta per P_0 perpendicolare al piano che passa per P_0, P_1 e P_2.

Esercizio 47. Dati i vettori $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (2, 1, -1)$, $\mathbf{u} = (-1, -2, 5)$ e $\mathbf{v} = (h, h, 1)$,

a) determinare due numeri α e β tali che $\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y} = \mathbf{u}$;

b) per tali valori di α e β, trovare per quali numeri h si ha che $\alpha\mathbf{x}$, $\beta\mathbf{y}$ e $\mathbf{v}$ sono complanari.

Esercizio 48. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$,

a) trovare gli autovalori di A;

b) trovare il coseno dell'angolo formato dagli autovettori di A.

Esercizio 49. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + bx_2 = 1 \\ -2bx_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 5bx_2 = 2 \end{cases}$$

Esercizio 50. Dati il punto $P_0 = (1, 1, 1)$ e i vettori $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$, scrivere l'equazione parametrica della retta per P_0 e parallela a $\mathbf{u}$. Scrivere l'equazione cartesiana del piano per P_0 parallelo a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Esercizio 51. Determinare, al variare del parametro $b \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ bx_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + (b-1)x_3 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 52. a) Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per il punto $P = (1, 2, 1)$ e ortogonale al piano contenente i vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$.
b) Scrivere inoltre l'equazione parametrica di una retta passante per il punto P e parallela al piano contenente i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Esercizio 53. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2kx_3 = 1 \\ 2kx_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

Esercizio 54. a) Scrivere l'equazione parametrica della retta passante per il punto $P = (1, 1, 2)$ e ortogonale al piano contenente i vettori $\mathbf{u} = (2, 2, 2)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$.
b) Scrivere inoltre l'equazione parametrica di una retta passante per il punto P e parallela al piano contenente i vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

Esercizio 55. Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$, il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2kx_2 + 2x_3 = 3 \\ 2kx_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 56. Si considerino i vettori colonna $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valri di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $A \cdot \mathbf{x}$ è perpendicolare a $\mathbf{y}$.

Esercizio 57. Discutere il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + kx_2 = 1 \\ 2kx_1 - x_2 = 7 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 58. Dati i punti $A = (1, 0, -2)$, $B = (3, k, -1)$, $C = (2, 1, 0)$, $D = (-1, 0, 2)$, determinare k in modo tale che
a) $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ siano complanari
b) $\vec{BC}$ e $\vec{CD}$ siano ortogonali
c) $\vec{AB}$ sia parallelo al vettore $\vec{v} = (-6, 2, -3)$.

Esercizio 59. Discutere e risolvere al variare di k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 + kx_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 60. Scrivere sia in forma parametrica che cartesiana l'equazione della retta passante per il punto $P = (1, 0, 2)$ ed ortogonale al piano di equazione $x - 2y + z + 3 = 0$.

Esercizio 61. Dati i punti $A = (-2, 1, 0)$, $B = (-1, 3, k)$, $C = (0, 2, 1)$, $D = (2, -1, 0)$, determinare k in modo tale che
a) $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ siano complanari
b) $\vec{BC}$ e $\vec{CD}$ siano ortogonali
c) $\vec{AB}$ sia parallelo al vettore $\vec{v} = (2, 4, 1)$.

Esercizio 62. Discutere e risolvere al variare di k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 63. Scrivere sia in forma parametrica che cartesiana l'equazione della retta passante per il punto $P = (2, 1, 0)$ ed ortogonale al piano di equazione $2x - y - 3z + 3 = 0$.

Esercizio 64. Dati i punti $A = (2, -2, -\lambda)$, $B = (5, -3, 0)$, $C = (6, -1, -1)$,
a) determinare λ in modo che un vettore ortogonale sia ad $\vec{AB}$ che a $\vec{BC}$ coincida con $\vec{v} = (-1, 4, 7)$;
b) esistono valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\vec{AB}$ sia ortogonale ad $\vec{AC}$?
c) calcolare il versore parallelo ed opposto a $\vec{BC}$.

Esercizio 65. Discutere e risolvere al variare di k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \ . \end{cases}$$

Esercizio 66. Scrivere in forma parametrica l'equazione della retta passante per il punto $P = (1, 0, 2)$ e con direzione parallela a quella del vettore $\vec{v} = (1, 1, -2)$. Determinare per quali valori di k il piano di equazione $kx - y + 2z = 0$ risulti parallelo ed ortogonale alla suddetta retta.

Esercizio 67. Dati i punti $A = (-3, 2, 0)$, $B = (-1, 1, 1)$, $C = (-2, 4, \lambda)$,
a) determinare λ in modo che un vettore ortogonale sia ad $\vec{AB}$ che ad $\vec{AC}$ coincida con $\vec{v} = (-1, 3, 5)$;

b) esistono valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $\vec{BC}$ sia ortogonale ad $\vec{AC}$?
c) calcolare il versore parallelo ed opposto ad $\vec{AB}$.

Esercizio 68. Scrivere in forma parametrica l'equazione della retta passante per il punto $P = (2, 1, 0)$ e con direzione parallela a quella del vettore $\vec{v} = (-1, 6, -2)$. Determinare per quali valori di k il piano di equazione $kx + 3y - z = 0$ risulti parallelo ed ortogonale alla suddetta retta.

Esercizio 69. Si considerino i vettori colonna $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dire per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ il vettore $A \cdot \mathbf{x}$ è perpendicolare a $\mathbf{y}$.

Esercizio 70. Discutere il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + kx_2 = 4 \\ kx_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + kx_2 = 7 \end{cases}$$

al variare del parametro $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 71. Dati i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (2, 1, 1)$,

a) calcolare il prodotto scalare $(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 2\mathbf{v})$;
b) calcolare i versori associati a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$;
c) verificare se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono complanari.

Parte seconda: equazioni differenziali

Esercizio 72. È data l'equazione differenziale

$$y' = (1-x)(y-2)^2 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = 1$.
3) Determinare l'eventuale integrale singolare.

Esercizio 73. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = 2y - 3y^2 \ .$$

Esercizio 74. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + 5y = 5 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Determinare la soluzione di equilibrio.
3) Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio.

Esercizio 75. È data l'equazione differenziale

$$y' = (2-x)(y-1)^2 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = 2$.
3) Determinare l'eventuale integrale singolare.

Esercizio 76. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = -3y - 2y^2 \ .$$

Esercizio 77. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = -5 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Determinare la soluzione di equilibrio.
3) Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio.

Esercizio 78. È data l'equazione differenziale

$$y' = (1 - 2x)(y - 3)^2 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Risolvere il problema di Cauchy con $y(0) = 2$.
3) Determinare l'eventuale integrale singolare.

Esercizio 79. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y' = -2y + y^2 \ .$$

Esercizio 80. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 25y = 50 \ .$$

1) Determinarne l'integrale generale.
2) Determinare la soluzione di equilibrio.
3) Discutere la stabilità della soluzione di equilibrio.

Esercizio 81. È data l'equazione differenziale

$$(x - 1)y' - 2x = 0$$

di cui è noto l'integrale particolare $y_p = 2[x - 1 + \log|x - 1|]$.
a) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
b) Determinare la condizione iniziale $y(x = 0) = y_0$ in corrispondenza della quale si ha il suddetto integrale particolare y_p.

Esercizio 82. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + \frac{1}{2}y = \pi \ .$$

a) Determinarne l'integrale generale.
b) Discutere la stabilità asintotica della soluzione di equilibrio.
c) Discutere l'andamento della soluzione corrispondente ai dati iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 2\pi \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 83. È data l'equazione differenziale

$$(x + 1)y' - 3x = 0$$

di cui è noto l'integrale particolare $y_p = 3[x + 1 - \log|x + 1|]$.
a) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
b) Determinare la condizione iniziale $y(x = 0) = y_0$ in corrispondenza della quale si ha il suddetto integrale particolare y_p.

Esercizio 84. È data l'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + \frac{3}{2}y = \frac{\pi}{2} \ .$$

a) Determinarne l'integrale generale.
b) Discutere la stabilità asintotica della soluzione di equilibrio.
c) Discutere l'andamento della soluzione corrispondente ai dati iniziali

$$\begin{cases} y(0) = \pi/3 \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 85. È data l'equazione differenziale

$$y' - \frac{2}{x}\, y + x^4 = 0$$

di cui è noto l'integrale particolare $y_p = -x^5/3$.
a) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
b) Determinare la condizione iniziale $y(x = 1) = y_0$ in corrispondenza della quale si ha il suddetto integrale particolare y_p.

Esercizio 86. È data l'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = \frac{\pi}{2} \ .$$

a) Determinarne l'integrale generale.
b) Discutere la stabilità asintotica della soluzione di equilibrio.
a) Discutere l'andamento della soluzione corrispondente ai dati iniziali

$$\begin{cases} y(0) = \pi \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 87. È data l'equazione differenziale

$$y' - \frac{2}{x}\, y + x^5 = 0$$

di cui è noto l'integrale particolare $y_p = -x^6/4$.

a) Determinare l'integrale generale dell'equazione data.
b) Determinare la condizione iniziale $y(x=1)=y_0$ in corrispondenza della quale si ha il suddetto integrale particolare y_p.

Esercizio 88. È data l'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + \frac{3}{2}y = 3\pi \ .$$

a) Determinarne l'integrale generale.
b) Discutere la stabilità asintotica della soluzione di equilibrio.
a) Discutere l'andamento della soluzione corrispondente ai dati iniziali

$$\begin{cases} y(0) = 2\pi \\ y'(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Esercizio 89. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

Esercizio 90. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{2}y^3 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

mediante la sostituzione $z = y^{-2}$.

Esercizio 91. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Esercizio 92. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{3}y^4 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

mediante la sostituzione $z = y^{-3}$.

Esercizio 93. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = x \sin x \cos^2 y$$

Esercizio 94. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$2y'' - 8y' + 8y = 7$$

Esercizio 95. Risolvere il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

Esercizio 96. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$3y'' + 6y' + 3y = 5$$

Esercizio 97. Risolvere il sistema differenziale

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Esercizio 98. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{xe^x}{\tan^2 y + 1}$$

Esercizio 99. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 3y + \frac{x^2 e^{3x}}{1 + x^2}$$

Esercizio 100. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 101. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 2y + \frac{4}{y^2}$$

Esercizio 102. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

Esercizio 103. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \frac{e^{2-y^3} \cos x}{y^2}$$

Esercizio 104. Data l'equazione differenziale

$$y'' + (y')^2 - 2y' + 1 = 0,$$

a) verificare che $y = x + \log(C_1 x + C_2)$ é il suo integrale generale (C_1, C_2 costanti arbitrarie);
b) trovare l'integrale particolare y_p dell'equazione che soddisfa

$$\begin{cases} y_p(0) = 0 \\ y_p'(0) = 3 \end{cases}$$

Esercizio 105. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = y + \frac{3}{y^2}$$

Esercizio 106. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 4y + \frac{x^2 e^{4x}}{1 + x^2}$$

Esercizio 107. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 108. Data l'equazione differenziale

$$y'' = \frac{1}{x} y' - 4x^2 y,$$

verificare che $y = C_1 \sin x^2 + C_2 \cos x^2$ é il suo integrale generale (C_1, C_2 costanti arbitrarie).

Esercizio 109. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Esercizio 110. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}$$

a) trovare l'integrale generale;

b) trovare gli eventuali integrali singolari;
c) trovare l'integrale particolare che verifica la condizione $y(1) = 0$.

Esercizio 111. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Esercizio 112. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}$$

a) trovare l'integrale generale;
b) trovare gli eventuali integrali singolari;
c) trovare l'integrale particolare che verifica la condizione $y(1) = 0$.

Esercizio 113. Data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + (h - 3)y = 0,$$

a) discutere al variare di $h \in \mathbf{R}$ il segno e la natura (reale o complessa) delle soluzioni dell'equazione caratteristica associata;
b) dire per quali valori di h tutte le soluzioni tendono a zero per $x \to +\infty$;
c) trovare l'integrale generale dell'equazione per $h = 4$.

Esercizio 114. Data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + (h + 2)y = 0,$$

a) discutere al variare di $h \in \mathbf{R}$ il segno e la natura (reale o complessa) delle soluzioni dell'equazione caratteristica associata;
b) dire per quali valori di h tutte le soluzioni tendono a zero per $x \to +\infty$;
c) trovare l'integrale generale dell'equazione per $h = -1$.

Esercizio 115. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}}$$

a) trovare l'integrale generale;
b) trovare gli eventuali integrali singolari;
c) trovare l'integrale particolare che verifica la condizione $y(1) = 0$.

Esercizio 116. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 2y = 4x + 3$$

Esercizio 117. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Esercizio 118. Trovare l'integrale generale e gli eventuali integrali singolari dell'equazione

$$y' = 6y + 2e^{3x}\sqrt{y}$$

Esercizio 119. Trovare l'integrale generale e gli eventuali integrali singolari dell'equazione

$$y' = -3y - e^{3x}y^2$$

Esercizio 120. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$$

Esercizio 121. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Esercizio 122. Trovare l'integrale generale e gli eventuali integrali singolari dell'equazione

$$y' = -y - 2e^{x}y^2$$

Esercizio 123. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + 5y = 10x - 1$$

Esercizio 124. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

Esercizio 125. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 6y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Esercizio 126. Trovare l'integrale generale e gli eventuali integrali singolari dell'equazione

$$y' = 4y + 6e^{2x}\sqrt{y}$$

Esercizio 127. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + 2y = 4x + 3$$

Esercizio 128. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y + \frac{e^{4x}}{2y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

mediante il cambio di variabile $z = y^2$.

Esercizio 129. Data l'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 13y = \alpha,$$

a) porre $\alpha = 3$ e trovarne l'integrale generale;
b) porre $\alpha = 0$, dire qual è la soluzione di equilibrio, e analizzarne la stabilità asintotica.

Esercizio 130. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + \frac{e^{3x}}{2y} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

mediante il cambio di variabile $z = y^2$.

Esercizio 131. Data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 8y = \alpha.$$

a) porre $\alpha = 7$ e trovarne l'integrale generale;
b) porre $\alpha = 0$, dire qual è la soluzione di equilibrio, e analizzarne la stabilità asintotica.

Esercizio 132. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3 + \frac{e^{5x}}{e^{y}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

mediante il cambio di variabile $y = \log z$.

Esercizio 133. Data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 13y = \alpha.$$

a) porre $\alpha = 3$ e trovarne l'integrale generale;
b) porre $\alpha = 0$, dire qual è la soluzione di equilibrio, e analizzarne la stabilità asintotica.

Esercizio 134. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2 + \frac{e^{4x}}{e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

mediante il cambio di variabile $y = \log z$.

Esercizio 135. Data l'equazione differenziale

$$y'' + 8y' + 20y = \alpha.$$

a) porre $\alpha = 5$ e trovarne l'integrale generale;
b) porre $\alpha = 0$, dire qual è la soluzione di equilibrio, e analizzarne la stabilità asintotica.

Esercizio 136. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y - 3x}{x}\right)^2$$

a) trovarne l'integrale generale;
b) discutere il comportamento asintotico delle soluzioni (cioè calcolare il limite per $x \to +\infty$ delle soluzioni).

Esercizio 137. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - 3 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + 2 \\ y_1(0) = \frac{4}{5} \\ y_2(0) = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Esercizio 138. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y + 4x}{x}\right)^2$$

a) trovarne l'integrale generale;
b) discutere il comportamento asintotico delle soluzioni (cioè calcolare il limite per $x \to +\infty$ delle soluzioni).

Esercizio 139. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + 5 \\ y_2' = -6y_1 - 2y_2 - 3 \\ y_1(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = -6 \\ y_2(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 16 \end{cases}$$

Esercizio 140. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \cos x \cdot y(x) + \cos x$$

e scrivere la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = 2$.

Esercizio 141. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \sin x \cdot y(x) + \sin x$$

e scrivere la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Esercizio 142. Risolvere l'equazione differenziale non lineare omogenea

$$2x^2y' = x^2 + 2xy + y^2$$

Esercizio 143. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$