Politecnico di Torino – Facoltà di Architettura

Istituzioni di Matematiche II, a.a. 1999–00

Esercizi sui vettori - 1^a settimana

1) Siano $\mathbf{u} = (1, 3, 6)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-2, 2, 1)$ tre vettori in $\mathbf{R}^3$. Determinare le componenti di ciascuno dei vettori

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad 5\mathbf{u} - 2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

2) Siano $A = (1, 3, 6)$, $B = (0, 1, -1)$ e $C = (-2, 2, 1)$ tre punti in $\mathbf{R}^3$. Calcolare i vettori $\vec{AC}$, $B - A$, $C - B$ e i relativi versori. Che differenza c'è tra $\vec{CA}$ e $C - A$?

3) Siano $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{w} = (-3, -1, 1)$ tre vettori in $\mathbf{R}^3$. Calcolare

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

4) Dati $\mathbf{u} = (2, 1, -1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, trovare un vettore non nullo $\mathbf{w}$ tale che

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0.$$

5) Calcolare il prodotto misto $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ in ciascuno dei seguenti casi:

$$\mathbf{u} = (3, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 4, 0), \quad \mathbf{w} = (1, 1, 1)$$
$$\mathbf{u} = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v} = (2, 0, 2), \quad \mathbf{w} = (1, -1, 1)$$

6) Dati $\mathbf{u} = (0, 1, -3)$ e $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, trovare i versori associati a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

7) Trovare il coseno dell'angolo che il vettore $\mathbf{v} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1)$ forma con ciascuno degli assi x, y, z.

8) Dati $\mathbf{u} = (4, 1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{w} = (2, 1, 2)$ e $\mathbf{x} = (2, -2, -1)$, trovare tutte le coppie di vettori ortogonali.

9) Calcolare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{k} + \mathbf{i}$.

10) Siano $\mathbf{u} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$; trovare un vettore $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 1$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -1$ e $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 3$.

11) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1,0,0)$, $\mathbf{v} = (2, \frac{1}{2}, -1)$, e $\mathbf{w} = (5,1,-2)$, dire per quali valori di $m \in \mathbf{R}$ esiste un vettore $\mathbf{x}$ tale che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 1, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = -1, \qquad \mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = m.$$

Per tali valori di m, scrivere la corrispondente espressione di $\mathbf{x}$.

12) Dati $\mathbf{u} = (1,0,1)$, $\mathbf{v} = (2,1,-1)$ e $\mathbf{w} = (-1,2,h)$, con $h \in \mathbf{R}$,
   a) determinare h in modo che $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ siano complanari;
   b) determinare h in modo che $|(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \wedge \mathbf{w}| = \sqrt{89}$.

13) Dati $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + (\lambda+2)\mathbf{k}$, e $\mathbf{v} = (3\mu - 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, si determinino λ e μ in modo che $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ siano paralleli.

14) Dati $\mathbf{v} = (1,0,1)$ e $\mathbf{w} = (0,1,1)$, trovare i vettori $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ ortogonali a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ ed aventi modulo $\sqrt{2}$.

15) Dati $\mathbf{u} = (2,1,0)$, $\mathbf{v} = (-1,1,1)$, e $\mathbf{w} = (t+3, -t, t-3)$, con $t \in \mathbf{R}$, calcolare il valore di t per cui i tre vettori sono complanari.

16) Siano $\mathbf{u} = (t+2, -2t, 2t+1)$, $\mathbf{v} = (0,-1,1)$ e $\mathbf{w} = (1,-2,2)$, con $t \in \mathbf{R}$. Calcolato il valore di t per cui $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$ e sostituitolo in $\mathbf{u}$, verificare che $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono complanari.

17) Dato $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinare $\mathbf{x}$ in modo che

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{k}, \qquad \text{e} \qquad |\mathbf{x}| = \sqrt{13}$$

18) Dati $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ e $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, determinare $\mathbf{y}$ in modo che sia parallelo al vettore $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u}-\mathbf{v})$ e che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = 14$.

19) Dati $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinare $\mathbf{x}$ in modo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 21, \qquad \mathbf{x} \text{ sia ortogonale a } \mathbf{v}, \qquad \mathbf{x} \text{ sia complanare con } \mathbf{v} - \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

20) Dati i vettori $\mathbf{u} = (1,0,1)$ e $\mathbf{v} = (2,1,1)$, dire se esiste un vettore $\mathbf{x}$ tale che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{v}$. Calcolare l'angolo formato da $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

21) Dati i vettori $\mathbf{u} = (t,1,t)$, $\mathbf{v} = (0,t,-1)$ e $\mathbf{w} = (1,0,-1)$, dire se esiste $t \in \mathbf{R}$ tale che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ sia perpendicolare a $\mathbf{w}$.

22) Dire per quali valori di k i vettori $\mathbf{u} = (1, 2, k)$, $\mathbf{v} = (k, -2, -k)$ e $\mathbf{w} = (-1, 1, -1)$ non appartengono allo stesso piano.

23): Siano $\vec{u} = (1, 3, 6)$, $\vec{v} = (4, -3, 3)$, $\vec{w} = (2, 1, 5)$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Determinare le componenti e il modulo di ciascuno dei seguenti vettori:

$$\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}, \quad 7\vec{u} - 2\vec{v} - 3\vec{w}, \quad 2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w} \ .$$

Scrivere, per ciascuno dei vettori trovati, le componenti dei rispettivi versori.

24): Siano $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (-1, 2, -3)$, $\vec{w} = (0, 1, 0)$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Calcolare ciascuno dei seguenti prodotti scalari:

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \cdot \vec{w}, \quad \vec{u} \cdot \vec{w}, \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), \quad (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} \ .$$

25): Se $\vec{u} = (2, -1, 2)$ e $\vec{v} = (1, 2, -2)$, si determinino due vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ di $\mathbb{R}^3$ tali che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

$$\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{v} \text{ ortogonale a } \vec{y}, \quad \vec{x} \text{ parallelo a } \vec{v} \ .$$

26): Siano $\vec{u} = (-1, 0, 2)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$, $\vec{w} = (1, 2, 2)$ tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Calcolare le componenti di ciascuno dei seguenti vettori:

$$\vec{u}\mathbf{v}\vec{v}, \quad \vec{u}\mathbf{v}(\vec{v}\mathbf{v}\vec{w}), \quad (\vec{u}\mathbf{v}\vec{v})\mathbf{v}\vec{w}, \quad (\vec{u} + \vec{v})\mathbf{v}(\vec{v} - \vec{w}) \ .$$

27): Siano $\vec{u} = (2, -1, 2)$, $\vec{v} = (3, 4, -1)$ due vettori in $\mathbb{R}^3$. Trovare un vettore $\vec{w}$ tale che $\vec{u}\mathbf{v}\vec{w} = \vec{v}$. C'è più di una soluzione? Trovare un vettore $\vec{w}$ tale che $\vec{u}\mathbf{v}\vec{w} = \vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{w} = 1$. C'è più di una soluzione?

28): Calcolare il prodotto misto $\vec{u} \cdot \vec{v}\mathbf{v}\vec{w}$ in ciascuno dei seguenti casi:

$$\vec{u} = (3, 0, 0), \quad \vec{v} = (0, 4, 0), \quad \vec{w} = (0, 0, 8)$$

$$\vec{u} = (2, 3, -1), \quad \vec{v} = (3 - 7, 5), \quad \vec{w} = (1, -2, 3) \ .$$

29): Che valore dovrà assumere il parametro reale t affinchè i tre vettori di $\mathbb{R}^3$ $\vec{u} = (-3, 0, t)$, $\vec{v} = (5, 2, 1)$, $\vec{w} = (t, 0, 4)$ siano complanari?

30): Determinare un versore perpendicolare al vettore che unisce i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (-1, 2, -1)$.

31): Trovare i vettori $\vec{w}$ di modulo $\sqrt{26}$ perpendicolari sia ad $\vec{u} = (1, 4, 0)$ che a $\vec{v} = (2, 5, -1)$.

32): Determinare per quali valori di k i punti $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 3, 2)$, $C = (-1, k, 0)$ e $D = (2, -1, 1)$ giacciono sullo stesso piano.

33): Dati $\vec{u} = (1, -1, 3)$ e $\vec{v} = (1, 1, 0)$, trovare un vettore $\vec{x}$ tale che $\vec{x}\mathbf{v}\vec{u} = \vec{u} + \vec{v}$.

34): Trovare un versore $\vec{\tau}$ parallelo a $\vec{v} = (3, 0, -1)$.

35): Dati i vettori $\vec{u} = (-7, 2, 3)$, $\vec{v} = \vec{i} + \beta\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = (2, 3, -1)$, determinare β in modo che $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{w}$ siano paralleli.

36): Dati i vettori $\vec{u} = (1, 2, -1)$, $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{k}$, stabilire se esistono numeri $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $(\lambda\vec{u} - \vec{v})\mathbf{v}\vec{w} = \vec{i}$.

37): Dati i vettori $\vec{u} = (1, 1, 2)$, $\vec{v} = (2, -2, 0)$ e $\vec{w} = (\beta, 1, 2)$, determinare β in modo che $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ e $2\vec{w}$ siano complanari.

38): Dati i vettori $\vec{u} = (2, \alpha, -1)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$ e $\vec{w} = \beta\vec{i} + 2\vec{j} + \beta\vec{k}$, stabilire se esistono valori di α e β tali che $\vec{u}\mathbf{v}\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

39): Dati i vettori $\vec{u} = (0, 1, \lambda)$ e $\vec{v} = (-\sqrt{5}, 0, 2)$, determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che:

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ risultino paralleli

$\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ risultino ortogonali

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ formino un angolo di $\pi/3$.

40): Dati i punti $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (1, -2, 1)$, trovare l'area del triangolo ABC e trovare un vettore perpendicolare al piano contenente detto triangolo.

41): Dati i vettori $\vec{u} = (0, 2, 2)$ e $\vec{v} = (1, 2, 1)$ trovare un vettore $\vec{w}$ ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$. Quanti vettori con questa proprietà esistono? Calcolarne poi il modulo e il versore associato.

42): Dati i vettori $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 1, -\lambda)$, trovare i valori di λ per cui l'area del parallelogramma costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{w}$ valga $\sqrt{6}$. Dire poi quale dei vettori $\vec{w}$ così trovati risulta complanare con $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determinare λ in modo che il prodotto vettoriale tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$ abbia modulo unitario.

43): Dati i vettori $\vec{x} = (1, 0, 1)$, $\vec{y} = (2, 1, -1)$, $\vec{u} = (-1, -2, 5)$ e $v = (h, h, 1)$, determinare due numeri α e β tali che $\alpha\vec{x} - \beta\vec{y} = \vec{u}$. Per tali valori di α e β trovare per quali numeri h si ha che $\alpha\vec{x}$, $\beta\vec{y}$ e $\vec{v}$ sono complanari.

44): Dato il vettore $\vec{u} = (0, 1, 0)$, calcolare $(\vec{i} - \vec{j})\mathbf{v}(\vec{i} + \vec{k})\mathbf{v}\vec{u}$.

45): Dati i punti $A = (-2, 1, 0)$, $B = (-1, 3, k)$, $C = (0, 2, 1)$, $D = (2, -1, 0)$, determinare k in modo che il parallelepipedo costruito su $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ abbia volume unitario; $\vec{BC}$ e $\vec{CD}$ siano ortogonali; $\vec{AB}$ sia parallelo al vettore $\vec{v} = (2, 4, 1)$.

46): Dati i punti $A = (-3, 2, 0)$, $B = (-1, 1, 1)$ e $C = (-2, 4, \sigma)$, determinare σ in modo che un vettore $\vec{x}$ ortogonale sia ad $\vec{AB}$ che ad $\vec{AC}$ coincida con $-\vec{i} + 3\vec{j} + 5k$.