Capitolo 1

Algebra elementare, insiemi

Esercizio 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

1. $\sqrt{(-3)^2} = \pm 3$
2. $\sqrt{(-3)^2} = -3$
3. $\sqrt{x^2} = x$
4. $\frac{a}{b} = 0$ se e solo se $a = 0$
5. $0^1 = 0$
6. il doppio di 5^{-5} è 10^{-5}
7. il quadrato di 5^{-5} è 5^{-10}
8. $\left(3^3\right)^2 = 3^5$
9. $\left(3^3\right)^2 = 3^6$

Soluzione

1. vero
2. falso
3. falso: $\sqrt{x^2} = \pm x$

4. vero
5. vero
6. falso: il doppio di 5^{-5} è $2 \cdot 5^{-5} = 2 \cdot 0{,}00032 = 0{,}0064$
7. vero
8. falso: $(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$
9. vero

Esercizio 2

Calcolare le seguenti espressioni:

1. $|\,3\,| + |-4\,|$
2. $-|-3\,| + |-4\,|$
3. $|-|\,3\,| - |-2\,||$
4. $|\,2 - |-2\,||$
5. $|-1 + |-2\,||$

Risoluzione

1. $|\,3\,| + |-4\,| = 3 + 4 = 7$
2. $-|-3\,| + |-4\,| = -3 + 4 = 1$
3. $|-|\,3\,| - |-2\,|| = |-3-2\,| = |-5\,| = 5$
4. $|\,2 - |-2\,|| = |\,2-2\,| = 0$
5. $|-1 + |-2\,|| = |-1+2\,| = 1$

Esercizio 3

Facendo uso del simbolo di valore assoluto, tradurre in formula le seguenti proposizioni:

1. x è 5 oppure -5

2. x è compreso tra 1 e -1
3. x è più distante da 2 che da 4
4. x è compreso tra 2 e 6

Soluzione

1. $|x| = 5$
2. $|x| \leq 1$
3. $|x-2| > |x-4|$
4. $|x-4| \leq 2$

Esercizio 4

Riscrivere le seguenti espressioni senza usare il valore assoluto:

1. $|x+3|$
2. $|x-2|$
3. $\frac{x+|x|}{2}$
4. $\sqrt{|x+1|}$
5. $|x+1| + |x-3|$

Risoluzione

1. $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{se } x+3 \geq 0 \quad \text{cioè se } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{se } x+3 < 0 \quad \text{cioè se } x < -3 \end{cases}$
2. $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \quad \text{cioè se } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{se } x-2 < 0 \quad \text{cioè se } x < 2 \end{cases}$
3. $\frac{x+|x|}{2} = \begin{cases} \frac{x+x}{2} = x & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x-x}{2} = 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
4. $\sqrt{|x+1|} = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x+1 \geq 0 \quad \text{cioè se } x \geq -1 \\ \sqrt{-(x+1)} & \text{se } x+1 < 0 \quad \text{cioè se } x < -1 \end{cases}$

5. $|x+1|+|x-3| = \begin{cases} (x+1)+(x-3) & \text{se } x+1 \geq 0 \text{ e } x-3 \geq 0 \\ -(x+1)+(x-3) & \text{se } x+1 < 0 \text{ e } x-3 \geq 0 \\ (x+1)-(x-3) & \text{se } x+1 \geq 0 \text{ e } x-3 < 0 \\ -(x+1)-(x-3) & \text{se } x+1 < 0 \text{ e } x-3 < 0 \end{cases}$

   $\Rightarrow \quad |x+1|+|x-3| = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x \geq 3 \\ -4 & \text{mai} \\ 4 & \text{se } -1 \leq x < 3 \\ -2x+2 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

Esercizio 5

Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ le seguenti espressioni hanno senso:

1. $\frac{x}{x+1}$
2. $\frac{x}{x^2+1}$
3. $\sqrt{2-x}$
4. $\sqrt[5]{x-2}$
5. $(x-4)^(-1/3)$
6. $(x+1)^(-1/2)$
7. $\frac{x}{|x|}$
8. $\sqrt{x^2-1}$

Risoluzione

1. $\frac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
2. $\frac{x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad x^2+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\sqrt{2-x} \quad \Rightarrow \quad 2-x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (-\infty, 2\,]$
4. $\sqrt[5]{x-2} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}$
5. $(x-4)^(-1/3) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} \quad \Rightarrow \quad x-4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 4 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$
6. $(x+1)^(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \quad \Rightarrow \quad x+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (-\infty, -1\,)$
7. $\frac{x}{|x|} \quad \Rightarrow \quad |x| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
8. $\sqrt{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad x^2-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad |x| \geq 1 \quad \Rightarrow$

$x \le -1$ oppure $x \ge 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in (-\infty, -1\,] \cup [\,1, +\infty\,)$

Esercizio 6

Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ le seguenti espressioni hanno senso, e risolvere le equazioni:

1. $\frac{2x-1}{x+2} = 1$
2. $\frac{x-2}{x+1} = 2$
3. $\frac{x^2-1}{x^2-3} = 0$
4. $\frac{x^2+x-1}{x-1} = 2$
5. $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = 0$

Risoluzione

1. $\frac{2x-1}{x+2} = 1$
   $x+2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -2 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
   $2x-1 = x+2 \quad \Rightarrow \quad x = 3$ (accettabile)

2. $\frac{x-2}{x+1} = 2$
   $x+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
   $x-2 = 2x+2 \quad \Rightarrow \quad x = -4$ (accettabile)

3. $\frac{x^2-1}{x^2-3} = 0$
   $x^2-3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 3 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$
   $x^2-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$ (accettabili)

4. $\frac{x^2+x-1}{x-1} = 2$
   $x-1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $x^2+x-1 = 2x-2 \quad \Rightarrow \quad x^2-x+1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$
   $\Rightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ tale che sia soddisfatta l'equazione

5. $\frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = 0$
   $x^2-4x+3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1$ e $x \neq 3$
   $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1{,}3\}$
   $x^2-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$ (accettabile) oppure $x = +1$ (non accettabile)

Esercizio 7

Dire per quali valori di x reale le seguenti espressioni hanno senso e risolvere le equazioni:

1. $\sqrt{x^2-1}=x$
2. $\sqrt{x^2+1}=x-2$
3. $\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$
4. $\sqrt{x^2-2}=1$
5. $\sqrt[4]{x^2+7}=2$
6. $\sqrt[3]{x^3+1}=x-1$
7. $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=0$

Risoluzione

N.B. Bisogna ricordare che nel caso di equazioni irrazionali, cioè del tipo $\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$ con n intero e $n\geq 2$, si distinguono i seguenti casi:

- ▷ n dispari ($n=2k+1$ con $k\in\mathbb{N}_0$):

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x) \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=[g(x)]^n$$

  (questo perché se a e b sono numeri reali e n un esponente dispari, $a=b\Leftrightarrow a^n=b^n$)
- ▷ n pari ($n=2k$ con $k\in\mathbb{N}_0$):

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x) \quad\Leftrightarrow\quad g(x)\geq 0 \text{ e } f(x)=[g(x)]^n$$

1. $\sqrt{x^2-1}=x$
   $x^2-1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\leq -1\vee x\geq 1$
   $x^2-1=x^2 \quad\Rightarrow\quad -1=0$ impossibile, non esiste soluzione

2. $\sqrt{x^2+1}=x-2$
   $x^2+1\geq 0$ vero $\forall x\in\mathbb{R}$
   $x^2+1=(x-2)^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+1=x^2-4x+4 \quad\Rightarrow\quad 4x=3 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{3}{4}$
   $x-2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq 2$
   $x=\frac{3}{4}$ e $x\geq 2$: impossibile, non esiste soluzione

3. $\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$
   $x-1=x \quad\Rightarrow\quad -1=0$ impossibile, non esiste soluzione

4. $\sqrt{x^2-2}=1$
   $x^2-2\geq 0 \quad\Rightarrow\quad |x|\geq\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad x\leq-\sqrt{2}\vee x\geq\sqrt{2}$
   $x^2-2=1 \quad\Rightarrow\quad x^2=3 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{3}$
   $1>0$ sempre vero
   quindi le soluzioni sono $x=\pm\sqrt{3}$

5. $\sqrt[4]{x^2+7}=2$
   $x^2+7\geq 0$ vero $\forall x\in\mathbb{R}$
   $x^2+7=2^4 \quad\Rightarrow\quad x^2=16-7=9 \quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$
   $2\geq 0$ sempre vero
   quindi le soluzioni sono $x=\pm 3$

6. $\sqrt[3]{x^3+1}=x-1$
   $x^3+1=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1 \quad\Rightarrow\quad 3x^2-3x+2=0 \quad\Rightarrow$
   $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-24}}{6}\notin\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad$ quest'equazione non ammette soluzioni reali

7. $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=0$ cioè $\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}$
   $x+1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq -1$
   $1-x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad x\leq 1$
   $x+1=1-x \quad\Rightarrow\quad 2x=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=0$
   quindi la soluzione è $x=0$

Esercizio 8

Risolvere le seguenti disequazioni, disegnando l'insieme soluzione sulla retta reale:

1. $x-2>2x+1$
2. $|x-1|>-x$
3. $(x-1)(x+2)\geq 0$
4. $\frac{x-2}{x+1}>0$
5. $x^2-5x+6>0$
6. $x^2-x+1\leq 0$
7. $(x^2-4x-5)(x+3)\leq 0$
8. $\frac{x+1}{x-1}>3$
9. $\frac{x^2-x-2}{x-3}>0$
10. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}>0$

11. $\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$

Risoluzione

1. $x-2 > 2x+1 \quad \Rightarrow \quad -3 > x \quad \Rightarrow \quad x < -3$

2. $|x-1| > -x$

   $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 > -x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

   oppure

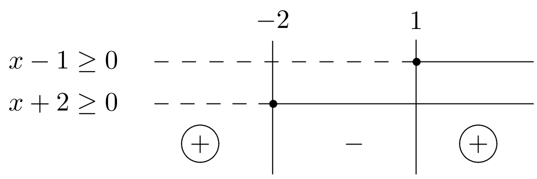
   $\begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) > -x \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x < 1 \\ 1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x < 1$

   Dunque questa disuguaglianza è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. $(x-1)(x+2) \geq 0$

   $(x-1) \geq 0$ se $x \geq 1$
   $(x+2) \geq 0$ se $x \geq -2$
   La tabella 1.1 mostra come rappresentare graficamente queste informazioni nella cosiddetta "tabellina dei segni" per risolvere la disuguaglianza calcolando nei diversi intervalli della retta reale il segno del prodotto a partire dal segno dei diversi fattori.

   Tabella 1.1

   Si ottiene che la disuguaglianza è vera per $x \leq -2$ oppure $x \geq 1$, cioè $\forall x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

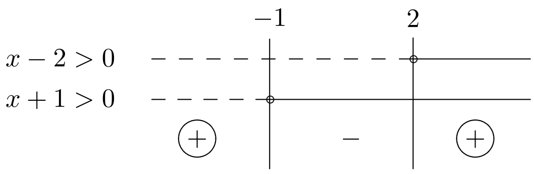
4. $\dfrac{x-2}{x+1} > 0$

   $x-2 > 0$ se $x > 2$
   $x+1 > 0$ se $x > -1$

   Dalla tabella 1.2 si deduce che la disuguaglianza è vera per $x < -1$ oppure $x > 2$, cioè $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

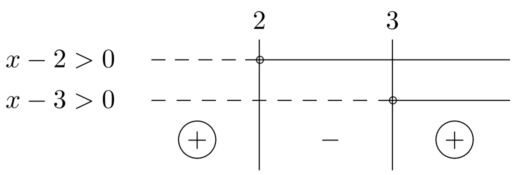
5. $x^2 - 5x + 6 > 0$

Tabella 1.2



$x^2-5x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=2;\ x_2=3$
$\Rightarrow \quad x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$
Dunque si studia la disuguaglianza $(x-2)(x-3)>0$:
$(x-2)>0$ se $x>2$
$(x-3)>0$ se $x>3$

Tabella 1.3



Dalla tabella 1.3 si deduce che la disuguaglianza è vera per $x<2$ oppure $x>3$, cioè $\forall x\in(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$.

6. $x^2-x+1\le 0$
   $x^2-x+1=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}$
   Dunque $\nexists x\in\mathbb{R}$ che soddisfi questa disuguaglianza.

7. $(x^2-4x-5)(x+3)\le 0$
   $x^2-4x-5=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2}=2\pm\sqrt{4+5} \ \Rightarrow\ x_1=-1;\ x_2=5 \ \Rightarrow\ x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$
   Dunque si studia la disuguaglianza $(x+1)(x-5)(x+3)\le 0$:
   $x+1\ge 0$ se $x\ge -1$
   $x-5\ge 0$ se $x\ge 5$
   $x+3\ge 0$ se $x\ge -3$

   Dalla tabella 1.4 si deduce che la disuguaglianza è vera per $x\le -3$ oppure $-1\le x\le 5$, cioè $\forall x\in(-\infty,-3]\cup[-1{,}5]$.

8. $\frac{x+1}{x-1}>3$
   $\Rightarrow\ \frac{x+1}{x-1}-3>0 \ \Rightarrow\ \frac{x+1-3x+3}{x-1}>0 \ \Rightarrow\ \frac{-2x+4}{x-1}>0$
   $-2x+4>0$ se $x<2$
   $x-1>0$ se $x>1$

Tabella 1.4

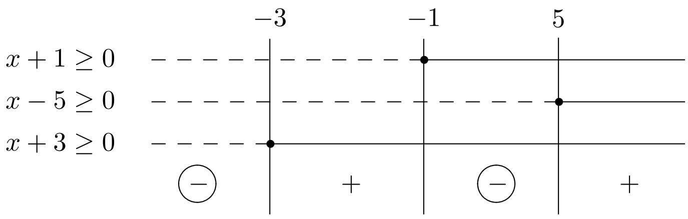
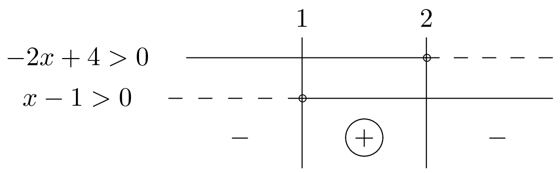


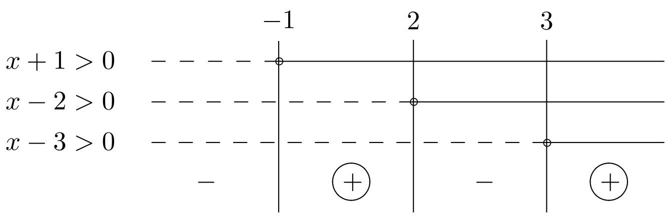
Tabella 1.5



Dalla tabella 1.5 si deduce che la disuguaglianza è vera $\forall x \in (1{,}2)$.

9. $\frac{x^2-x-2}{x-3} > 0$
   $x^2-x-2=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \ \Rightarrow\ x_1=-1;\ x_2=2 \ \Rightarrow\ x^2-x-2=(x+1)(x-2)$
   Dunque si studia la disuguaglianza $\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} > 0$.

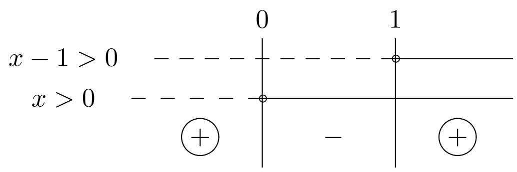
Tabella 1.6



Dalla tabella 1.6 si deduce che la disuguaglianza è vera per $-1<x<2$ oppure $x>3$, cioè $\forall x \in (-1,2)\cup(3,+\infty)$.

10. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x} > 0$
    $x^2-3x+2=0 \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} \ \Rightarrow\ x_1=1;\ x_2=2 \ \Rightarrow\ x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
    $x^2-2x=x(x-2)$
    Dunque si ha la disuguaglianza $\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)} > 0$, dove si può semplificare il fattore $x-2$, riducendosi a studiare la disuguaglianza $\frac{x-1}{x} > 0$ con la condizione $x \neq 2$.

Tabella 1.7



Dalla tabella 1.7 si deduce che la disuguaglianza è vera per $x < 0$ oppure per $x > 1$; non si deve dimenticare la condizione $x \neq 2$. In conclusione, la disuguaglianza è vera $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (1{,}2) \cup (2, +\infty)$.

11. $\frac{x^2-1}{x-1} \geq 0$
$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$
Dunque la disuguaglianza è vera per ogni $x \geq -1$ purché $x \neq +1$, cioè $\forall x \in [-1, +1) \cup (+1, +\infty)$.

Esercizio 9

Risolvere algebricamente i seguenti sistemi di disequazioni:

1. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ 6x + 2 > 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \frac{5-2x}{7-x} < 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$

Risoluzione

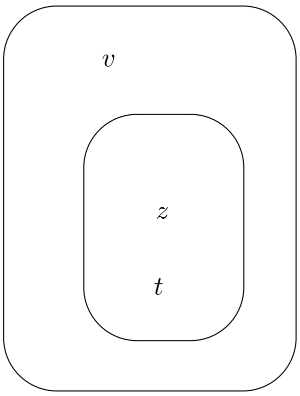
1. $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ 6x + 2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ x > \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6} < x < 3$
2. $\begin{cases} 3x - 4 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ 1 < x < 2 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 2$
3. $\begin{cases} \frac{5-2x}{7-x} < 1 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5-2x-7+x}{7-x} < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x-2}{7-x} < 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < x < 7 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 7$

Esercizio 10

Dati gli insiemi $A = \{t, z\}$ e $B = \{v, z, t\}$ dire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

1. $A \in B$
2. $A \subset B$
3. $z \in A \cap B$
4. $v \subset B$
5. $\{v\} \subset B$

Risoluzione



1. falso, il simbolo non è corretto
2. vero
3. vero
4. falso, il simbolo non è corretto
5. vero

Esercizio 11

Dati gli insiemi $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, f\}$,

1. trovare un insieme X tale che $A \cup B = B \cup X$; questo insieme è unico?

2. esiste un insieme Y tale che $A \cup Y = B$?

Risoluzione

1. X non è unico; deve contenere almeno quegli elementi di A che non si trovano in B, ma in più può contenere anche degli elementi di B. Ad esempio si può scegliere $X = \{a, b\}$ oppure $X = \{a, b, c\}$ ecc.

2. No, non esiste, perché $A \cup Y$ contiene sicuramente gli elementi a e b che non appartengono a B, quindi sicuramente $A \cup Y \neq B$.

Esercizio 12

Trovare inf, sup, min e max dei seguenti insiemi:

- ▷ $A = [-3, 4]$
- ▷ $B = (-3, 4)$
- ▷ $C = (0, 1]$
- ▷ $D = (-\infty, -3)$
- ▷ $E = [-2, +\infty)$
- ▷ $F = (2, 4) \cup [-1, 3]$
- ▷ $G = [-5, 4] \cap (-2, 1]$
- ▷ $H = [0,1] \cup \{3\}$
- ▷ $I = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 \leq 9\}$
- ▷ $J = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |\, x - 1 \,| \leq 3\}$

Soluzione

- ▷ $A = [-3, 4]$ $\quad$ $\inf A = \min A = -3$; $\quad$ $\sup A = \max A = 4$
- ▷ $B = (-3, 4)$ $\quad$ $\inf B = -3$; $\quad$ $\nexists \min B$; $\quad$ $\sup B = 4$; $\quad$ $\nexists \max B$

- ▷ $C = (0, 1]$ $\inf C = 0$; $\nexists \min C$; $\sup C = \max C = 1$
- ▷ $D = (-\infty, -3)$ $\inf D = -\infty$; $\nexists \min D$; $\sup D = -3$; $\nexists \max D$
- ▷ $E = [-2, +\infty)$ $\inf E = \min E = -2$; $\sup E = +\infty$; $\nexists \max E$
- ▷ $F = (2, 4) \cup [-1, 3] = [-1, 4)$ $\inf F = \min F = -1$; $\sup F = 4$; $\nexists \max F$
- ▷ $G = [-5, 4] \cap (-2, 1] = (-2{,}1]$ $\inf G = -2$; $\nexists \min G$; $\sup G = \max G = 1$
- ▷ $H = [0{,}1] \cup \{3\}$ $\inf H = \min H = 0$; $\sup H = \max H = 3$
- ▷ $I = \{x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 \leq 9\} = [-3{,}3]$ $\inf I = \min I = -3$; $\sup I = \max I = 3$
- ▷ $J = \{x \in \mathbb{R} \;/\; |\, x - 1 \,| \leq 3\} = [-2, 4]$ $\inf J = \min J = -2$; $\sup J = \max J = 4$

Esercizio 13

Dati gli insiemi $A = \{\text{studenti di Architettura}\}$ e $B = \{18, 19, \ldots, 29, 30\}$, sia $f : A \to B$ la funzione definita da $f(x) =$ voto riportato da x nell'esame di Storia. Dire:

1. qual è il dominio di f
2. se f è iniettiva

Risoluzione

1. Il dominio di $f(x)$ sono gli elementi di A, cioè $\mathrm{Dom}\, f = A$
2. f non è iniettiva perché due studenti diversi possono ottenere lo stesso voto, quindi possono esserci x_1 e x_2 con $x_1 \neq x_2$ ma con $f(x_1) = f(x_2)$.

Esercizio 14

Sia A l'insieme delle persone, e sia $f : A \to A$ la funzione $f(x) =$ padre di x.

1. Qual è il dominio di f?
2. f è iniettiva?
3. L'immagine di f è tutto A?
4. Decidere la validità delle seguenti affermazioni:

   (1) $\forall\, x \,\exists\, y, f(x) = y$

(2) $\exists\, x\, \forall\, y, f(x) = y$

(3) $\forall\, y\, \exists\, x, f(x) = y$

Risoluzione

1. Il dominio A è formato da tutte le persone che hanno un padre.

2. f non è iniettiva perché due persone distinte possono avere lo stesso padre.

3. L'immagine di f non è tutto A perché una persona può non essere padre.

4. (1) $\forall\, x\, \exists\, y, f(x) = y$ significa "ogni persona ha un padre": vero

   (2) $\exists\, x\, \forall\, y, f(x) = y$ significa "esiste una persona che ha come padri tutte le persone": falso.

   (3) $\forall\, y\, \exists\, x, f(x) = y$ significa "ogni persona è padre di qualcuno": falso.

Esercizio 15

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n$. Trovare dominio e immagine di f; dire se f è iniettiva; trovare l'inversa di f.

Risoluzione

- ▷ dominio $= \mathbb{N}$
- ▷ immagine $= \{$numeri pari$\}$
- ▷ f è iniettiva
- ▷ l'inversa è $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x$

Capitolo 2

Funzioni: dominio, simmetrie, inverse

Esercizio 1

Calcolare le seguenti quantità:

$$f(3);\quad f(-2);\quad f(\sqrt{2});\quad f(x+1);\quad f(2-x);\quad f(x^2);\quad f(-x);\quad f(x+h)-f(x)$$

per le funzioni:

1. $f(x) = 2x + 5$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x + x^2}$

Soluzione

1. $f(x) = 2x + 5$

   - ▷ $f(3) = 11$
   - ▷ $f(-2) = 1$
   - ▷ $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 5$
   - ▷ $f(x+1) = 2(x+1) + 5 = 2x + 7$
   - ▷ $f(2-x) = 2(2-x) + 5 = -2x + 9$
   - ▷ $f(x^2) = 2x^2 + 5$
   - ▷ $f(-x) = -2x + 5$
   - ▷ $f(x+h) - f(x) = 2(x+h) + 5 - (2x+5) = 2x + 2h + 5 - 2x - 5 = 2h$

2. $f(x) = x^2$

   - ▷ $f(3) = 9$
   - ▷ $f(-2) = 4$
   - ▷ $f(\sqrt{2}) = 2$
   - ▷ $f(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

- ▷ $f(2-x) = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$
- ▷ $f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$
- ▷ $f(-x) = (-x)^2 = x^2$
- ▷ $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2hx + h^2 - x^2 = 2hx + h^2$

3. $f(x) = \sqrt{x + x^2}$

- ▷ $f(3) = \sqrt{3 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
- ▷ $f(-2) = \sqrt{-2 + (-2)^2} = \sqrt{-2+4} = \sqrt{2}$
- ▷ $f(\sqrt{2}) = \sqrt{\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$
- ▷ $f(x+1) = \sqrt{(x+1) + (x+1)^2} = \sqrt{x+1+x^2+2x+1} = \sqrt{x^2+3x+2}$
- ▷ $f(2-x) = \sqrt{(2-x) + (2-x)^2} = \sqrt{2-x+x^2-4x+4} = \sqrt{x^2-5x+6}$
- ▷ $f(x^2) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2+x^4} = \sqrt{x^2(1+x^2)} = |x|\sqrt{1+x^2}$
- ▷ $f(-x) = \sqrt{-x + (-x)^2} = \sqrt{-x + x^2}$
- ▷ $f(x+h) - f(x) = \sqrt{(x+h) + (x+h)^2} - \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x+h+x^2+2hx+h^2} - \sqrt{x+x^2} = \sqrt{x^2+(2h+1)x+(h^2+h)} - \sqrt{x+x^2}$

Esercizio 2

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (x^3-1)^{1/3}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-2}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
4. $f(x) = \tan(x-1)$
5. $f(x) = \arcsin(x^2+1)$
6. $f(x) = \log(2-|x|)$
7. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+x+2}}$
8. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$
9. $f(x) = \sin(\frac{1}{|x+1|-4})$
10. $f(x) = \log|x+3|$
11. $f(x) = \log(\frac{(x+1)^2}{x^2+1})$
12. $f(x) = \log(1-x)\log(2x-1)$

Risoluzione

1. $f(x) = (x^3-1)^{1/3} = \sqrt[3]{x^3-1}$ $\qquad \mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2-2}$
   $x^2 - 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq -\sqrt{2} \vee x \geq \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dom} f = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Dom} f = [-1, 0) \cup (0{,}1]$

4. $f(x) = \tan(x - 1)$
$(x - 1) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ \forall k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi \ \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k\in\mathbb{N}} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(1 - \frac{\pi}{2} + k\pi, 1 + \frac{\pi}{2} + k\pi)$

5. $f(x) = \arcsin(x^2 + 1)$
$-1 \leq (x^2 + 1) \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \leq 1 \\ x^2 + 1 \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 0 \\ x^2 + 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$
$\text{Dom} f = \{0\}$

6. $f(x) = \log(2 - |x|)$
$2 - |x| > 0 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \Rightarrow \text{Dom} f = (-2, 2)$

7. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+x+2}}$
$x^2 + x + 2 \neq 0$ soddisfatta $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R}$

8. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-5x+6}}$
$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2} \Rightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 3 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

9. $f(x) = \sin(\frac{1}{|x+1|-4})$
$|x + 1| - 4 \neq 0 \Rightarrow |x + 1| \neq 4 \Rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -5 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 3\}$

10. $f(x) = \log |x + 3|$
$|x + 3| > 0 \Rightarrow x + 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \Rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

11. $f(x) = \log(\frac{(x+1)^2}{x^2+1})$
$x^2 + 1 \neq 0$ sempre vero
$\frac{(x+1)^2}{x^2+1} > 0$ vero $\forall x \neq -1$ $\text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

12. $f(x) = \log(1 - x) \log(2x - 1)$
$\begin{cases} 1 - x > 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow \text{Dom} f = (\frac{1}{2}, 1)$

Esercizio 3

Date le seguenti coppie di funzioni f e g, costruire le funzioni composte $h = g \circ f$ e $k = f \circ g$. Trovare inoltre i domini di h e di k.

1. $f(x) = x^2; \qquad g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2. $f(x) = \frac{x-1}{2-x^3}$; $\qquad g(x) = (x+1)^2$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$; $\qquad g(x) = |x| + 1$
4. $f(x) = -\frac{1}{2x+1}$; $\qquad g(x) = -x^{-\frac{1}{3}}$
5. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $\qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

Risoluzione

1. $f(x) = x^2$; $\qquad g(x) = \sqrt{x^2+1}$

   $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^4+1}$
   $\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R}$

   $k(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x^2+1})^2 = x^2+1$
   $\mathrm{Dom}\, k = \mathbb{R}$

2. $f(x) = \frac{x-1}{2-x^3}$; $\qquad g(x) = (x+1)^2$

   $h(x) = g(f(x)) = (\frac{x-1}{2-x^3} + 1) = \frac{-x^3+x+1}{-x^3+2}$
   $x^3 \neq 2 \quad \Rightarrow \quad x \neq \sqrt[3]{2}$
   $\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{2}\}$

   $k(x) = f(g(x)) = \frac{(x+1)^2-1}{2-(x+1)^6}$
   $(x+1)^6 \neq 2 \quad \Rightarrow \quad x+1 \neq \pm\sqrt[6]{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq -1 \pm \sqrt[6]{2}$
   $\mathrm{Dom}\, k = \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt[6]{2}, -1+\sqrt[6]{2}\}$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$; $\qquad g(x) = |x| + 1$

   $h(x) = g(f(x)) = |\sqrt[3]{x-2}| + 1$
   $\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R}$

   $k(x) = f(g(x)) = \sqrt[3]{|x|+1-2} = \sqrt[3]{|x|-1}$
   $\mathrm{Dom}\, k = \mathbb{R}$

4. $f(x) = -\frac{1}{2x+1}$; $\qquad g(x) = -x^{-\frac{1}{3}}$

   $h(x) = g(f(x)) = (-\frac{1}{2x+1})^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-(2x+1)}$
   $\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R}$

   $k(x) = f(g(x)) = -\frac{1}{2(-x)^{-\frac{1}{3}}+1} = -\frac{1}{\frac{2}{\sqrt[3]{-x}}+1} = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[3]{+x}}-1} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2-\sqrt[3]{x}}$
   $2 - \sqrt[3]{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2^3 = 8$
   $\mathrm{Dom}\, k = \mathbb{R} \setminus \{8\}$

5. $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $\quad g(x) = \sqrt{x-1}$

   $h(x) = g(f(x)) = \sqrt{\frac{1}{x+1} - 1} = \sqrt{-\frac{x}{x+1}}$
   $\frac{-x}{x+1} \geq 0 \wedge x+1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 < x \leq 0$
   $\mathrm{Dom}\, h = (-1, 0]$

   $k(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$
   $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x-1} \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \quad x > 1$
   $\mathrm{Dom}\, k = [1, +\infty)$

Esercizio 4

Dire se le seguenti funzioni sono pari o dispari:

- ▷ $f_1(x) = x - x^3$
- ▷ $f_2(x) = x^4 + 2$
- ▷ $f_3(x) = \sqrt{|x|}$
- ▷ $f_4(x) = x^6 + 2|x|$
- ▷ $f_5(x) = |-x^2 + 2x|$

Risoluzione

- ▷ $f_1(x) = x - x^3$
  $f_1(-x) = -x - (-x)^3 = -x + x^3 = -(x - x^3) = -f_1(x) \quad \Rightarrow \quad f_1(x)$ è dispari
- ▷ $f_2(x) = x^4 + 2$
  $f_2(-x) = (-x)^4 + 2 = x^4 + 2 = f_2(x) \quad \Rightarrow \quad f_2(x)$ è pari
- ▷ $f_3(x) = \sqrt{|x|}$
  $f_3(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f_3(x) \quad \Rightarrow \quad f_3(x)$ è pari
- ▷ $f_4(x) = x^6 + 2|x|$
  $f_4(-x) = (-x)^6 + 2|-x| = x^6 + 2|x| = f_4(x) \quad \Rightarrow \quad f_4(x)$ è pari
- ▷ $f_5(x) = |-x^2 + 2x|$
  $f_5(-x) = |-(-x)^2 + 2(-x)| = |-x^2 - 2x| \quad \Rightarrow \quad f_5(x)$ non è né pari né dispari

Esercizio 5

Trovare le inverse delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^3 - 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

Risoluzione

1. $f(x) = x^3 - 1$.
   Sia $y = f(x) \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y)$.
   $y = x^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad x^3 = y + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+1} = f^{-1}(y)$.
   Cambiando il nome alla variabile della funzione f^{-1} si ottiene $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$
2. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
   $y = f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x+1 = \frac{1}{y}$ (purché $y \neq 0$, ma con questa f si ha $f(x) \neq 0 \; \forall x$)
   $\Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = -1 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = -1 + \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
   $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x^3+1} = \frac{1}{y} \quad (y = f(x) \neq 0 \; \forall x) \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = \left(\frac{1}{y}\right)^3 = \frac{1}{y^3} \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{-1 + \frac{1}{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{1-y^3}}{y} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}$

Esercizio 6

Dire perché le funzioni $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ e $g(x) = (x-3)(x+2)$ non sono invertibili.

Risoluzione

- ▷ $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ non è iniettiva, perchè $f(a) = f(-a)$: due valori distinti della x ($x_1 = a$ e $x_2 = -a$) danno la stessa $f(x)$.
  Una funzione non iniettiva non è invertibile. Infatti, se cercassimo l'inversa, ci troveremmo con una relazione che non è una funzione:
  $y = f(x) = \sqrt{1+x^4} \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 + x^4 \quad \Rightarrow \quad x^4 = y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt[4]{y^2-1}$
  dunque la "funzione inversa" dovrebbe essere $f^{-1}(x) = \pm\sqrt[4]{x^2-1}$, che però non è una funzione a causa del segno "$\pm$" che permette di ottenere due valori diversi a partire da una stessa x.

  Osservazione: con lo stesso ragionamento usato in questo esempio, si deduce che tutte le funzioni pari, cioè con $f(x) = f(-x)$, non sono invertibili, perchè non sono iniettive.

▷ $g(x) = (x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$ non è invertibile perché non è iniettiva. Si può vedere dal suo grafico (è una parabola) o osservare ad esempio che $g(3) = g(-2) = 0$ (e quindi abbiamo due valori distinti di x che danno la stessa $g(x)$).
Se si prova a trovare l'inversa, si ottiene una relazione che non è una funzione:
$y = g(x) = x^2 - x - 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - (6+y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(6+y)}}{2}$
dunque la "funzione inversa" dovrebbe essere $g^{-1}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(x+6)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4x+25}}{2}$, che per ogni valore di x che non annulla $(4x+25)$ dà due diversi valori di $g^{-1}(x)$ e dunque non è una funzione.

Capitolo 3

Limiti

Esercizio 1

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{4x^2+2x+3}$
2. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x^3-5x-5}$
3. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+x^2-x}{3x^2-x+1}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}(x+1)}{x^2+3}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}$
6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}+1}{5\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-2}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{x}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

Risoluzione

1. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3-2x^2+1}{4x^2+2x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x\cdot\dfrac{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{4+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}\right] = \pm\infty$
2. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{x^3-5x-5} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{5}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{5}{x^2}-\frac{5}{x^3}}\right] = 0$

3. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+x^2-x}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x\cdot\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]=\pm\infty$

4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}(x+1)}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}\right]=0$

5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}=2$

6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[5]{x}+1}{5\sqrt{x}+3\sqrt[4]{x}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{5}}+1}{5x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{4}}-2}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(2+x^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{3}{10}}+1\right)}{x^{\frac{1}{2}}\left(5+3x^{-\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[10]{x^3}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{5+3\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-2\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{2}{5}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}{x}=$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{\sqrt{x}}=0$

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}\right)=$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}\right]=$

$\displaystyle=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x)-(x^2+3x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+3x}}=-\frac{1}{2}$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{3x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\tan x}{1-\cos x}$

Risoluzione

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\sin x \cdot \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0\cdot 1 = 0$

   N.B. Si usa il limite notevole $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cdot \sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{x\cdot\sin x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right) =$

   $= \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[4\cdot\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right] =$

   $= \lim_{x\to 0}\left[2\cdot\dfrac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right] = 2\cdot\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{1}\cdot 1 = 2$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-\cos^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2} =$

   $= \lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\right] = \dfrac{1}{3}$

4. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}\cdot\dfrac{x^2}{x^2} =$

   $= \lim_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-2}\right] = 0\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1 = 0$

   N.B. Nel calcolo di questo limite si usa il fatto che

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

   Per la dimostrazione di questo limite notevole si procede come fatto in precedenza per il limite numero 2:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right]^2 = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right) = 1$

6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x\tan x}{1-\cos x}\cdot\dfrac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\tan x}{x}\right) = 2\cdot 1 = 2$

Esercizio 3

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\sin(5x)}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{4x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{2x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x^2-4)}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\tan x)-1}{\tan x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\left(x^2\right)}{x}$

Risoluzione

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(4x)}{\sin(5x)} = \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sin(4x)}{4x}\cdot\dfrac{5x}{\sin(5x)}\right] = \dfrac{4}{5}\cdot 1\cdot 1 = \dfrac{4}{5}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{4x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin(5x)}{4x}-\dfrac{\sin(3x)}{4x}\right] =$
   $= \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{\sin(5x)}{5x}-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{\sin(3x)}{3x}\right] = \dfrac{5}{4}\cdot 1-\dfrac{3}{4}\cdot 1 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{x}\cdot\dfrac{1}{x}\right) =$
   $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{4}\cdot 1\cdot \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{\sin(x^2-4)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y} = 1$
   Si è usata la sostituzione $y = x^2-4$ osservando che se $x\to 2$ allora $y\to 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\tan x)-1}{\tan x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\cos y-1}{y} = -\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos y}{y} = -\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y} =$
   $= -\lim\limits_{y\to 0}\left[\sin\left(\dfrac{y}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}}\right] = -0\cdot 1 = 0$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos\left(x^2\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\sin\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}\right] = 0\cdot 0\cdot 1 = 0$

Esercizio 4

Calcolare i seguenti limiti:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\sqrt{3x+1}}{2x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\log(1+4x)}$

Risoluzione

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\sqrt{3x+1}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\log(3x+1)}{2x} = \dfrac{3}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(3x+1)}{3x} = \dfrac{3}{4}\cdot 1 = \dfrac{3}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3x}{e^{3x}-1}\right) = 2\cdot 1\cdot\dfrac{1}{3}\cdot 1 = \dfrac{2}{3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{-x}\cdot 2\cdot\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right) = 2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\log(1+4x)} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^{x}-1}{x}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4x}{\log(1+4x)}\right] = \dfrac{1}{4}$

Esercizio 5

Determinare il dominio e il comportamento agli estremi del dominio delle seguenti funzioni:

1. $f_1(x) = \dfrac{x^3-x^2+3}{x^2+3x+2}$
2. $f_2 = \dfrac{e^x}{1+x^2}$
3. $f_3(x) = x\arctan(\log x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\log x}$

5. $f_5(x) = x(2\log|x|) = x\log(x^2)$
6. $f_6(x) = e^{-x^2}\sqrt[3]{x}$
7. $f_7(x) = e^{\arctan\left((x^2-1)^{-1}\right)}$
8. $f_8(x) = \log\left(e^{\frac{x^2+1}{x}} + 1\right)$

Risoluzione

1. $f_1(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2}$

   Dominio:
   $x^2 + 3x + 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} \neq \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad \Rightarrow \quad x \neq -2 \wedge x \neq -1$
   $\mathrm{Dom}\, f_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \pm\infty$$
   $$\lim_{x\to-2^-} f_1(x) = \frac{-9}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to-2^+} f_1(x) = \frac{-9}{0^-} = +\infty$$
   $$\lim_{x\to-1^-} f_1(x) = \frac{+1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} f_1(x) = \frac{+1}{0^+} = +\infty$$

2. $f_2 = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

   Dominio:
   $1 + x^2 \neq 0 \quad$ vero $\quad \forall x \in \mathbb{R}$
   $\mathrm{Dom}\, f_2 = \mathbb{R}$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = 0$$

3. $f_3(x) = x\arctan(\log x)$

   Dominio:
   $x > 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dom}\, f_3 = (0, +\infty)$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to0^+} f_3(x) = \lim_{y\to-\infty} (e^y \arctan y) = 0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
   $$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{y\to+\infty} (e^y \arctan y) = +\infty$$

4. $f_4(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\log x}$

   Dominio:
   $$\begin{cases} 1+\log x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \log x \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x \neq e^{-1} \\ x > 0 \end{cases}$$
   $$\operatorname{Dom} f_4 = \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to 0^+} f_4(x) = \lim_{y\to -\infty} \frac{e^{y/2}}{1+y} = 0$$
   $$\lim_{x\to +\infty} f_4(x) = +\infty$$
   $$\lim_{x\to \left(\frac{1}{e}\right)^-} f_4(x) = \frac{+\sqrt{\frac{1}{e}}}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to \left(\frac{1}{e}\right)^+} f_4(x) = \frac{+\sqrt{\frac{1}{e}}}{0^+} = +\infty$$

5. $f_5(x) = x(2\log|x|) = x\log(x^2)$

   Dominio:
   $$|x| > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Dom} f_5 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to 0^\pm} f_5(x) = 0 \qquad \lim_{x\to \pm\infty} f_5(x) = \pm\infty$$

6. $f_6(x) = e^{-x^2}\sqrt[3]{x}$

   Dominio:
   $$\operatorname{Dom} f_6 = \mathbb{R}$$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to \pm\infty} f_6(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{-y} \cdot y^{3/2} = 0$$

7. $f_7(x) = e^{\arctan\left((x^2-1)^{-1}\right)}$

   Dominio:
   $$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Dom} f_7 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to \pm\infty} f_7(x) = \lim_{y\to 0} e^{\arctan y} = e^0 = 1$$
   $$\lim_{x\to -1^-} f_7(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{\arctan y} = e^{+\pi/2}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f_7(x) = \lim_{y\to -\infty} e^{\arctan y} = e^{-\pi/2}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f_7(x) = \lim_{y\to -\infty} e^{\arctan y} = e^{-\pi/2}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f_7(x) = \lim_{y\to +\infty} e^{\arctan y} = e^{+\pi/2}$$

8. $f_8(x) = \log\left(e^{\frac{x^2+1}{x}} + 1\right)$

   Dominio:
   $$\begin{cases} x \neq 0 \\ e^{\frac{x^2+1}{x}} + 1 > 0 \quad \text{vero} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   $\mathrm{Dom}\, f_8 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Limiti:
   $$\lim_{x\to -\infty} f_8(x) = \lim_{y\to -\infty} \log(e^y + 1) = \log 1 = 0$$
   $$\lim_{x\to 0^-} f_8(x) = \lim_{y\to -\infty} \log(e^y + 1) = \log 1 = 0$$
   $$\lim_{x\to 0^+} f_8(x) = \lim_{y\to +\infty} \log(e^y + 1) = +\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} f_8(x) = \lim_{y\to +\infty} \log(e^y + 1) = +\infty$$

Esercizio 6

Studiare l'esistenza di asintoti per le seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{x^2-1}$
3. $f(x) = x + 2\arctan x$

Risoluzione

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

   Dominio:
   $$\begin{cases} \sqrt{x^2-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1 \\ x^2 - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \end{cases}$$

Dom $f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Asintoti:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +1^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = +1 \quad \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{potrebbero esserci asintoti obliqui}$$

$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\,|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -1$$

$$q_- = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m_- x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} + x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + x\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad y = -x \quad$ asintoto obliquo sinistro

$$m_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\,|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = +1$$

$$q_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m_+ x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - x\right) = 0$$

$\Rightarrow \quad y = x \quad$ asintoto obliquo destro

Osservazione: poiché $f(x)$ è pari, sarebbe stato sufficiente calcolare gli asintoti $x = 1$ e $y = x$ ed ottenere gli altri per simmetria rispetto all'asse delle y.

2. $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{x^2-1} = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2-1}$

Dominio:

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Asintoti:

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1 \quad \text{asintoti verticali}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{potrebbero esserci asintoti obliqui}$$
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^3 - x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 1$$
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x - 2 + \frac{x^2}{x^2 - 1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = -1$$
$$\Rightarrow \quad y = x - 1 \quad \text{asintoto obliquo destro e sinistro}$$

3. $f(x) = x + 2\arctan x$

Dominio:

$\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$

Asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{potrebbero esserci asintoti obliqui}$$
$$m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + 2\,\frac{\arctan x}{x}\right) = 1$$
$$q_- = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m_- x) = \lim_{x\to-\infty} (x + 2\arctan x - x) = \lim_{x\to-\infty} (2\arctan x) = -\pi$$
$$\Rightarrow \quad y = x - \pi \quad \text{asintoto obliquo sinistro}$$

$$m_+ = \lim x \to +\infty \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + 2\frac{\arctan x}{x}\right) = 1$$
$$q_+ = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m_+ x) = \lim_{x\to+\infty} (x + 2\arctan x - x) = \lim_{x\to+\infty} (2\arctan x) = +\pi$$
$$\Rightarrow \quad y = x + \pi \quad \text{asintoto obliquo destro}$$

Osservazione: poiché $f(x)$ è dispari, sarebbe stato sufficiente calcolare uno solo dei due asintoti obliqui ed ottenere l'altro per simmetria rispetto all'origine.

Capitolo 4

Derivate

Esercizio 1

Derivare le seguenti somme di funzioni:

1. $f_1(x) = x^5 - 7$
2. $f_2(x) = \sin x + 3x^8$
3. $f_3(x) = \sqrt{x} - \ln x + 1$
4. $f_4(x) = \arctan x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^3}$
5. $f_5(x) = \sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}$
6. $f_6(x) = 2 \arcsin x - 2e^x + \dfrac{1}{2} \cos x$

Risoluzione

1. $f_1(x) = x^5 - 7 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = 5x^4$
2. $f_2(x) = \sin x + 3x^8 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \cos x + 24x^7$
3. $f_3(x) = \sqrt{x} - \ln x + 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$
4. $f_4(x) = \arctan x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{x^2}$
5. $f_5(x) = \sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x} = x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $f_6(x) = 2 \arcsin x - 2e^x + \dfrac{1}{2} \cos x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 2e^x - \dfrac{1}{2} \sin x$

Esercizio 2

Derivare i seguenti prodotti di funzioni:

1. $f_1(x) = x \ln x$
2. $f_2(x) = \sin x \cos x$
3. $f_3(x) = 2x^3 e^x$
4. $f_4(x) = x \cos x \ln x$
5. $f_5(x) = -3\sqrt{x} e^x \tan x$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^2} \sin x \arctan x$

Risoluzione

1. $f_1(x) = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$
2. $f_2(x) = \sin x \cos x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$
3. $f_3(x) = 2x^3 e^x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = 6x^2 e^x + 2x^3 e^x = 2x^2 e^x (3 + x)$
4. $f_4(x) = x \cos x \ln x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}x} = \cos x \ln x + x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x \ln x) =$
   $= \cos x \ln x - x \sin x \ln x + x \cos x\dfrac{1}{x} = \cos x \ln x - x \sin x \ln x + \cos x$
5. $f_5(x) = -3\sqrt{x} e^x \tan x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}x} = -3\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, e^x \tan x + \sqrt{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x \tan x)\right] =$
   $= -\dfrac{3}{2\sqrt{x}} e^x \tan x - 3e^x\sqrt{x} \tan x - 3\sqrt{x} e^x \dfrac{1}{\cos^2 x} =$
   $= -3\, e^x \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \tan x + \sqrt{x} \tan x + \sqrt{x}\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$
6. $f_6(x) = \sqrt[3]{x^2} \sin x \arctan x = x^{2/3} \cdot (\sin x \arctan x) \quad \Rightarrow$
   $$\frac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \cdot (\sin x \arctan x) + x^{2/3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x \arctan x) =$$
   $$= \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin x \arctan x + \sqrt[3]{x^2}\left(\cos x \arctan x + \sin x\frac{1}{1 + x^2}\right)$$

Esercizio 3

Derivare i seguenti rapporti di funzioni:

1. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x + 1}$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{\arctan x}$
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x+2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2 + x + 4}$

Risoluzione

1. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
3. $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x + 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 1) - \sqrt{x}\frac{1}{x}}{(\ln x + 1)^2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2}(\ln x + 1) - 1\right]}{(\ln x + 1)^2} =$
$$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\right)}{(\ln x + 1)^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x + 1)^2}$$
4. $f_4(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{\arctan x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(3x^2 + 4x)\arctan x - (x^3 + 2x^2)\frac{1}{1+x^2}}{(\arctan x)^2} =$
$$= \dfrac{(3x^2 + 4x)(1 + x^2)\arctan x - (x^3 + 2x^2)}{(\arctan x)^2(1 + x^2)}$$
5. $f_5(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x+2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(\cos x - \sin x)(x+2) - (\cos x + \sin x)}{(x+2)^2}$
6. $f_6(x) = \dfrac{x^3 + 2x - 4}{x^2 + x + 4} \quad \Rightarrow$
$$\dfrac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(3x^2 + 2)(x^2 + x + 4) - (x^3 + 2x - 4)(2x + 1)}{(x^2 + x + 4)^2} =$$
$$= \dfrac{3x^4 + 3x^2 + 12x^2 + 2x^2 + 2x + 8 - 2x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x + 8x + 4}{(x^2 + x + 4)^2} =$$
$$= \dfrac{x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 8x + 12}{(x^2 + x + 4)^2}$$

Esercizio 4

Derivare le seguenti funzioni composte:

1. $f_1(x) = \sin\sqrt{x}$
2. $f_2(x) = \ln(\arcsin x)$
3. $f_3(x) = \sqrt{\ln x + 1}$
4. $f_4(x) = e^{\sqrt[3]{x-2}}$
5. $f_5(x) = \cos(5x^3)$
6. $f_6(x) = \sqrt{3-2x}$
7. $f_7(x) = (\ln(\sin x))^4$
8. $f_8(x) = \tan\sqrt{x}$
9. $f_9(x) = \sqrt[4]{x + \sin x}$

Risoluzione

1. $f_1(x) = \sin\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = (\cos\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$
2. $f_2(x) = \ln(\arcsin x) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\arcsin x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\ln x + 1} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\ln x + 1}} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}}$
4. $f_4(x) = e^{\sqrt[3]{x-2}} = e^{\left[(x-2)^{1/3}\right]} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}x} = e^{\left[(x-2)^{1/3}\right]} \cdot \dfrac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{e^{\sqrt[3]{x-2}}}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$
5. $f_5(x) = \cos(5x^3) \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}x} = -\sin(5x^3) \cdot 15x^2 = -15x^2\sin(5x^2)$
6. $f_6(x) = \sqrt{3-2x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}} \cdot (-2) = -\dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$
7. $f_7(x) = (\ln(\sin x))^4 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_7}{\mathrm{d}x} = 4(\ln(\sin x))^3 \dfrac{1}{\sin x}\cos x = \dfrac{4(\ln(\sin x))^3}{\tan x}$
8. $f_8(x) = \tan\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_8}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\cos^2(\sqrt{x})} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
9. $f_9(x) = \sqrt[4]{x + \sin x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}f_9}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{4} \cdot (x + \sin x)^{-3/4} \cdot (1 + \cos x) = \dfrac{1 + \cos x}{4\sqrt[4]{(x + \sin x)^3}}$

Esercizio 5

Derivare le seguenti funzioni:

1. $f_1(x) = x \sin\sqrt{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x+1}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(x+1)}{x}}$
4. $f_4(x) = e^2 x \sin\sqrt{x}$
5. $f_5(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
6. $f_6(x) = \sqrt{\sin x^3}$
7. $f_7(x) = \ln(\ln x))$
8. $f_8(x) = \dfrac{(\tan x)^2}{x^2+x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{\sin e^{-x}}{x}$

Risoluzione

1. $f_1(x) = x \sin\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = \sin\sqrt{x} + x\cos\sqrt{x}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \sin\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\cos\sqrt{x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right)(x+1) - \ln(1+x^2)}{(1+x)^2} =$
   $= \dfrac{2x(x+1) - (1+x^2)\ln(1+x^2)}{(1+x)^2(1+x^2)}$
3. $f_3(x) = \sqrt{\dfrac{\ln(x+1)}{x}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\ln(x+1)}}\left(\dfrac{\frac{1}{x+1}\cdot x - \ln(x+1)}{x^2}\right) =$
   $= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x}{\ln(x+1)}}\left(\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}\right)$
4. $f_4(x) = e^2 x\sin\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}x} = e^2\left(\sin\sqrt{x} + x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\cos\sqrt{x}\right) =$
   $= e^2\left(\sin\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}\cos\sqrt{x}\right)$
5. $f_5(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}x} = -\left[\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

6. $f_6(x) = \sqrt{\sin x^3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x^3}} \cdot (\cos x^3) \cdot (3x^2) = \dfrac{3x^2 \cos x^3}{2\sqrt{\sin x^3}}$
7. $f_7(x) = \ln(\ln x)) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_7}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \ln x}$
8. $f_8(x) = \dfrac{(\tan x)^2}{x^2 + x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_8}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{2\tan x}{\cos^2 x} \cdot (x^2 + x) - (\tan x)^2 \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x)^2} =$
   $= \dfrac{2(x^2 + x)^2 \tan x - (2x + 1) \sin^2 x}{(x^2 + x)^2 \cos^2 x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{\sin e^{-x}}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}f_9}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(-\cos(e^{-x}) \cdot e^{-x}) \cdot x - \sin(e^{-x})}{x^2} =$
   $= -\dfrac{e^{-x} \cos(e^{-x}) + \sin(e^{-x})}{x^2}$

Esercizio 6

Calcolare i seguenti limiti usando la regola di De l'Hôpital:

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 - x^2\right)}{\ln(1 + x^2)}$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan\left(3x^2\right)}{1 - \cos x}$
3. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{\arctan x}$
4. $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x}{x - \pi}$
5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$
6. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x + x^2}$
7. $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x)$
8. $\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x} \ln x)$
9. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x + x^2}{1 + e^x}$
10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{\sqrt{9 + x} - 3}$
11. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x - \tan x}{x + \tan x}$
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$

13. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+3)}{x}$

14. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x-1} - e^{3x}$

15. $\lim_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x}\right)$

Risoluzione

1. $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln\left(1-x^2\right)}{\ln(1+x^2)} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln\left(1-x^2\right)\right]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\ln(1+x^2)\right]} = \lim_{x\to0} \dfrac{\frac{-2x}{1-x^2}}{\frac{2x}{1+x^2}} =$
$= \lim_{x\to0} \left(-\dfrac{2x}{1-x^2}\cdot\dfrac{1+x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to0}\left(-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = -1$

2. $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan\left(3x^2\right)}{1-\cos x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{\frac{6x}{\cos^2(3x^2)}}{\sin x} = \lim_{x\to0}\left(\dfrac{6}{\cos^2\left(3x^2\right)}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right) = 6$

3. $\lim_{x\to0} \dfrac{\arcsin x}{\arctan x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x\to0} \dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

4. $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x-\pi} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to\pi} \dfrac{2\sin x\cos x}{1} = 0$

5. $\lim_{x\to0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$

6. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x+x^2} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+2x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

7. $\lim_{x\to0^+} (x\ln x) = \lim_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}\left(-\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0$

8. $\lim_{x\to0^+} (\sqrt{x}\ln x) = \lim_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to0^+} \dfrac{-2x^{\frac{3}{2}}}{x} =$
$= \lim_{x\to0^+} \left(-2\sqrt{x}\right) = 0$

9. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+x^2}{1+e^x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+2x}{e^x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

10. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{9+x}-3} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}} = \lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{9+x}}{\sqrt{4+x}} = \dfrac{3}{2}$

11. $\lim_{x\to0} \dfrac{2x-\tan x}{x+\tan x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{2-\frac{1}{\cos^2 x}}{1+\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to0} \dfrac{2\cos^2 x-1}{\cos^2 x+1} = \dfrac{1}{2}$

12. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x} \stackrel{\text{H}}{=} \lim_{x\to0} \dfrac{e^x+e^x}{\cos x} = 2$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+3)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{e^x+3}\cdot e^x}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+3} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x-1} - e^{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - e^{3x}(2x-1)}{2x-1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - 3e^{3x}(2x-1) - 2e^{3x}}{2} =$
$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[xe^{3x} \left(\dfrac{1}{e^{3x}} - 3 + \dfrac{1}{2x} \right) \right] = +\infty \cdot (0 - 3 + 0) = -\infty$

15. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x - 2x^2}{x^2(1-\cos x)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - 4x}{2x(1-\cos x) + x^2 \sin x} \overset{\text{H}}{=}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 4}{2(1-\cos x) + 2x\sin x + 2x \sin x + x^2 \cos x} = \dfrac{-3}{0} = -\infty$

Esercizio 7

Calcolare la retta tangente, se possibile, delle funzioni indicate nei punti assegnati:

1. $f(x) = 3x^2 - 3\,; \qquad x_0 = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2+1}\,; \qquad x_0 = 0$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 1}\,; \qquad x_0 = 1\,; \qquad x_1 = 2$

Risoluzione

1. $f(x) = 3x^2 - 3\,; \qquad x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 3 \cdot 4 - 3 = 9$

   $f'(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 12$

   retta tangente: $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$

   $y - 9 = 12\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = 12x - 15$

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2+1}\,; \qquad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = 0$

   $f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x^2+1) - (x^2-x)(2x)}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \dfrac{-1\cdot 1 - 0}{1} = -1$

   retta tangente: $\quad y - 0 = -(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = -x$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x^2 - 1}$

   $x_0 = 1 \notin \mathrm{Dom}\, f \quad \Rightarrow \quad$ non si può calcolare la retta tangente a f in x_0

$$x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = \frac{\sqrt{4-6+2}}{4-1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}} \cdot \left(x^2-1\right) - \left(\sqrt{x^2-3x+2}\right) \cdot (2x)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\nexists\, f'(2) \text{ perché } \sqrt{2^2 - 3 \cdot 2 + 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 2^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$$

$\Rightarrow$ non si può calcolare la retta tangente a f in $x_1 = 2$

Esercizio 8

Trovare dominio e punti critici delle seguenti funzioni:

1. $f_1(x) = x^5 + x^4 - 3x^3$
2. $f_2(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$
3. $f_3(x) = x^3\sqrt{x+2}$
4. $f_4(x) = \ln\left(4x^2 - 5x - 6\right)$
5. $f_5(x) = (1-x)\,e^{-2x}$
6. $f_6(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+1}$
7. $f_7(x) = \sqrt{x^2-2x-1}$
8. $f_8(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} = (x-1)^{\frac{2}{3}}$
9. $f_9(x) = e^{2x-x^2}$

Risoluzione

1. $f_1(x) = x^5 + x^4 - 3x^3$

   Dominio: $\quad \mathrm{Dom}\, f_1 = \mathbb{R}$

   Punti critici:

   $$f_1'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 = x^2(5x^2 + 4x - 9)$$

   $$f_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(5x^2+4x-9) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 0\ ;\ x_{3,4} = \frac{-2 + \sqrt{4+45}}{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0 \; ; \; x_3 = -\frac{9}{5} \; ; \; x_4 = 1$$

2. $f_2(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$

   Dominio: $\quad \mathrm{Dom}\, f_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   Punti critici:

$$f_2'(x) = \frac{x^3 + 1 - x \cdot 3x^2}{(x^3+1)^3} = \frac{-2x^3+1}{(x^3+1)^2}$$

$$f_2'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

3. $f_3(x) = x^3\sqrt{x+2}$

   Dominio: $\quad x + 2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Dom}\, f_3 = [-2, +\infty)$

   Punti critici:

$$f_3'(x) = 3x^2\sqrt{x+2} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{7x^3 + 12x^2}{2\sqrt{x+2}} = \frac{x^2(7x+12)}{2\sqrt{x+2}}$$

$$f_3'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \vee 7x + 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0\,, \; x_3 = -\frac{12}{7}$$

4. $f_4(x) = \ln\left(4x^2 - 5x - 6\right)$

   Dominio: $\quad 4x^2 - 5x - 6 > 0$

$$4x^2 - 5x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{4}\,, \; x_2 = 2$$

$$4x^2 - 5x - 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{3}{4} \vee x > 2$$

$$\mathrm{Dom}\, f_4 = \left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup (2, +\infty)$$

   Punti critici:

$$f_4'(x) = \frac{8x-5}{4x^2-5x-6}$$

$$f_4'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{8} \notin \mathrm{Dom}\, f_4$$

   f_4 non ha punti critici

5. $f_5(x) = (1-x)\, e^{-2x}$

   Dominio: $\quad \text{Dom}\, f_5 = \mathbb{R}$

   Punti critici:

   $$f_5'(x) = -e^{-2x} - 2(1-x)e^{-2x} = -e^{-2x}(3-2x)$$

   $$f_5'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

6. $f_6(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+1}$

   Dominio: $\quad \text{Dom}\, f_6 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   Punti critici:

   $$f_6'(x) = \frac{4x(x+1) - \left(2x^2-1\right)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$$

   $$f_6'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   $$\Rightarrow \quad x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

7. $f_7(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 1}$

   Dominio: $\quad x^2 - 2x - 1 \geq 0$

   $$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

   $$x^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \leq 1 - \sqrt{2} \vee x \geq 1 + \sqrt{2}$$

   $$\text{Dom}\, f_7 = (-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, +\infty)$$

   Punti critici:

   $$f_7'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}$$

   $$f_7'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \notin \text{Dom}\, f_7$$

   f_7 non ha punti critici

8. $f_8(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} = (x-1)^{\frac{2}{3}}$

Dominio: $\quad \text{Dom}\, f_8 = \mathbb{R}$

Punti critici:

$$f_8'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

$\nexists\, x$ tale che $f_8'(x) = 0$

f_8 non ha punti critici

9. $f_9(x) = e^{2x-x^2}$

Dominio: $\quad \text{Dom}\, f_9 = \mathbb{R}$

Punti critici:

$$f_9'(x) = (2-2x)e^{2x-x^2} = 2(1-x)e^{2x-x^2}$$

$$f_9(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$