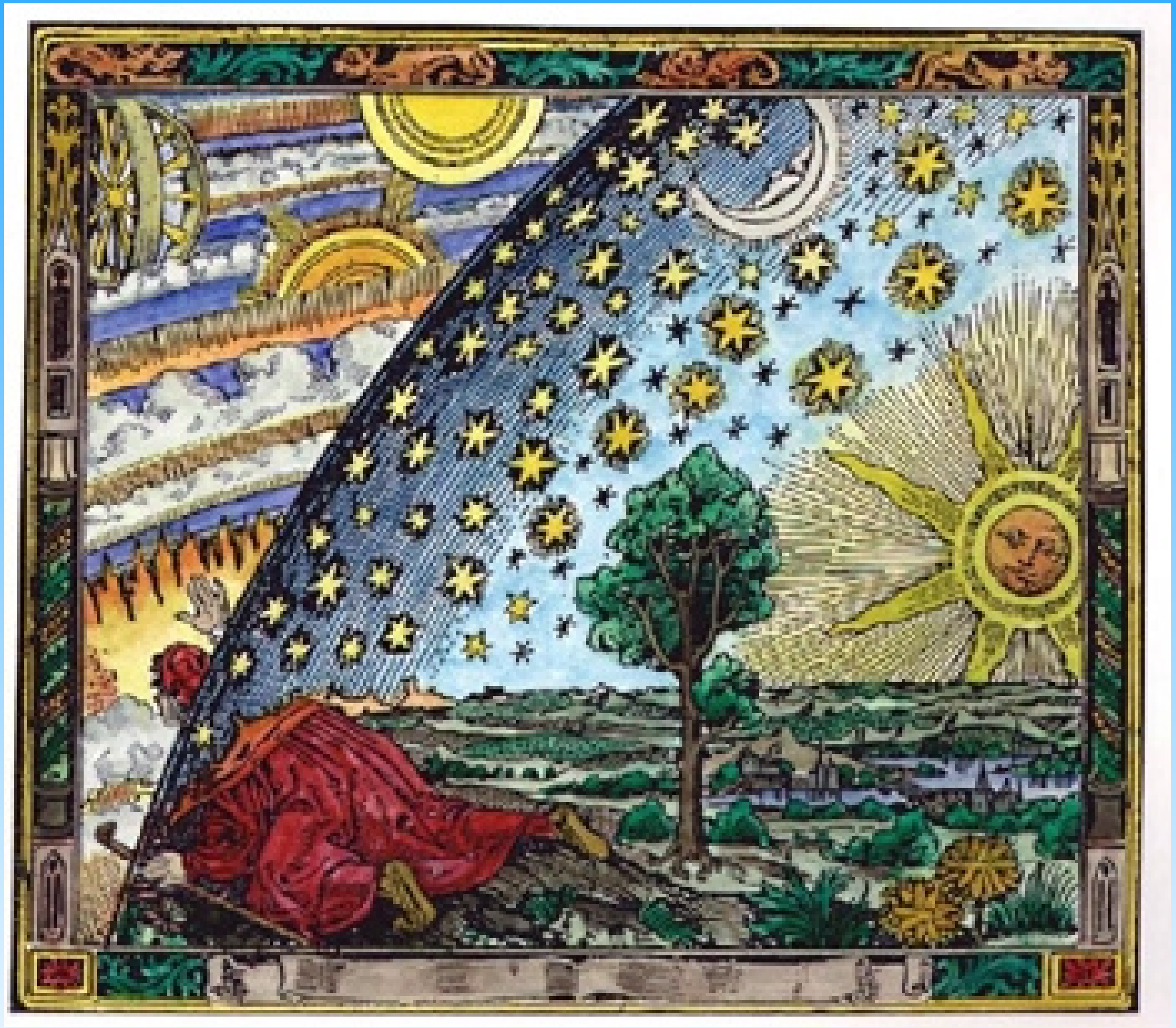
SPUNTI SULL'INFINITO
nei linguaggi di matematica e fisica



Un monaco medievale racconta di aver trovato il punto in cui cielo e terra si toccano (C. Flammarion)

UNA QUESTIONE LINGUISITICA

Il linguaggio scientifico può dar luogo ad equivoci, se non correttamente interpretato.

Motivo: i termini utilizzati in ambito scientifico non significano quello che comunemente si intende.

Anzi, proprio averli svincolati dal loro senso comune li rende utili in ambito scientifico, dove servono a richiamare in forma concisa concetti spesso espressi da lunghe e laboriose definizioni.

Linguaggio naturale: ***infinito*** è qualcosa

1. che non ha principio né fine;
   che si protrae senza limiti;
2. innumerevole, immenso, grandissimo;
   come l'immensa grandezza del cosmo.
3. che non comporta limiti di spazio o di tempo.

L'universo, la maggiore entità che si offre alla nostra osservazione, è spesso associato all'idea di ***infinito***; ecco, forse, perché la scienza è sovente sollecitata a darne una sua interpretazione.

Ma l'***infinito scientifico*** rischia di ***deludere*** da altre prospettive, ad esempio, quella letteraria.

Iniziamo con un gioco:
Vero o Falso?

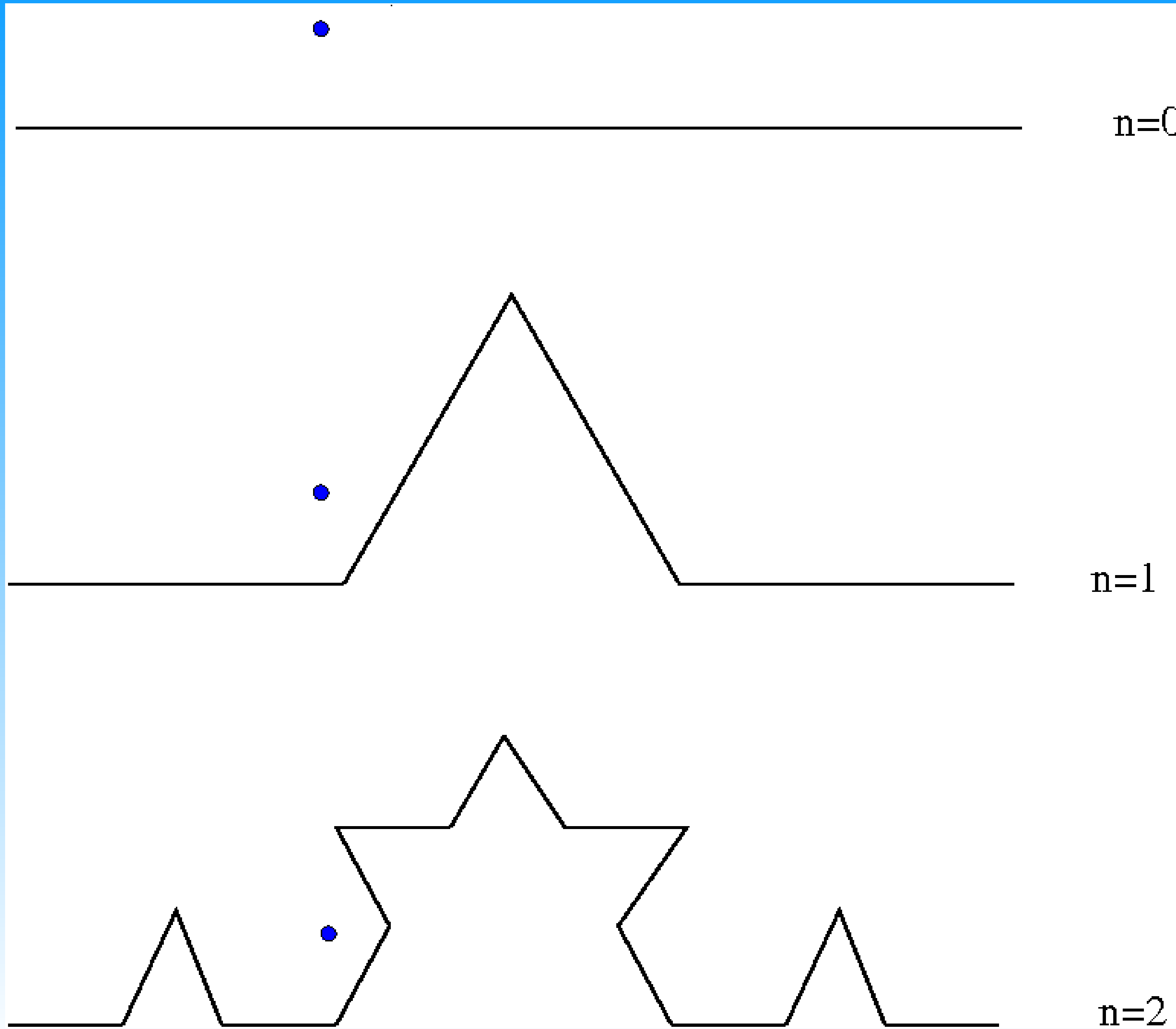
Questa pagina è gialla. V o F?

Domani pioverà. V o F?

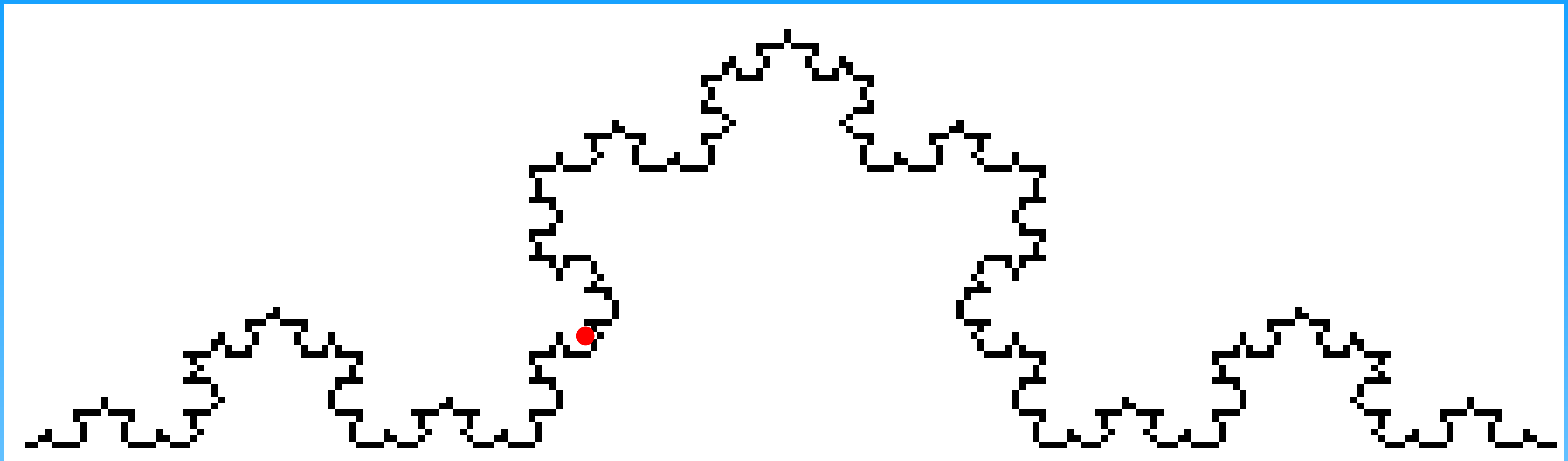
In un caso, si può rispondere subito;
nell'altro si deve attendere il tempo necessario.

A volte non si può proprio rispondere, perché servirebbe una quantità ***infinita*** di informazione, ovvero un processo **senza limite** per acquisirla.

Sopra o sotto?

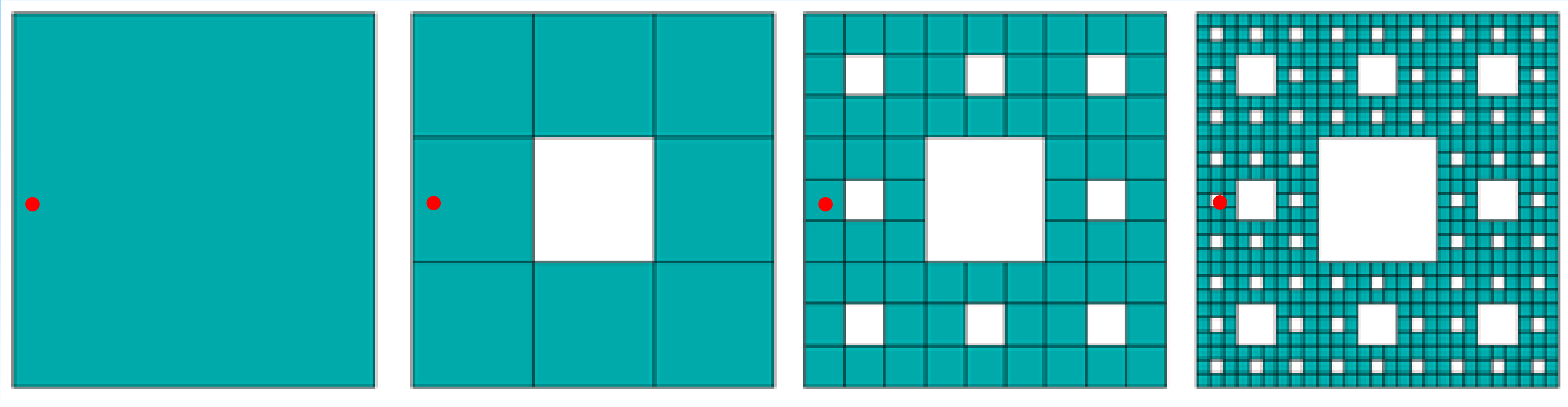


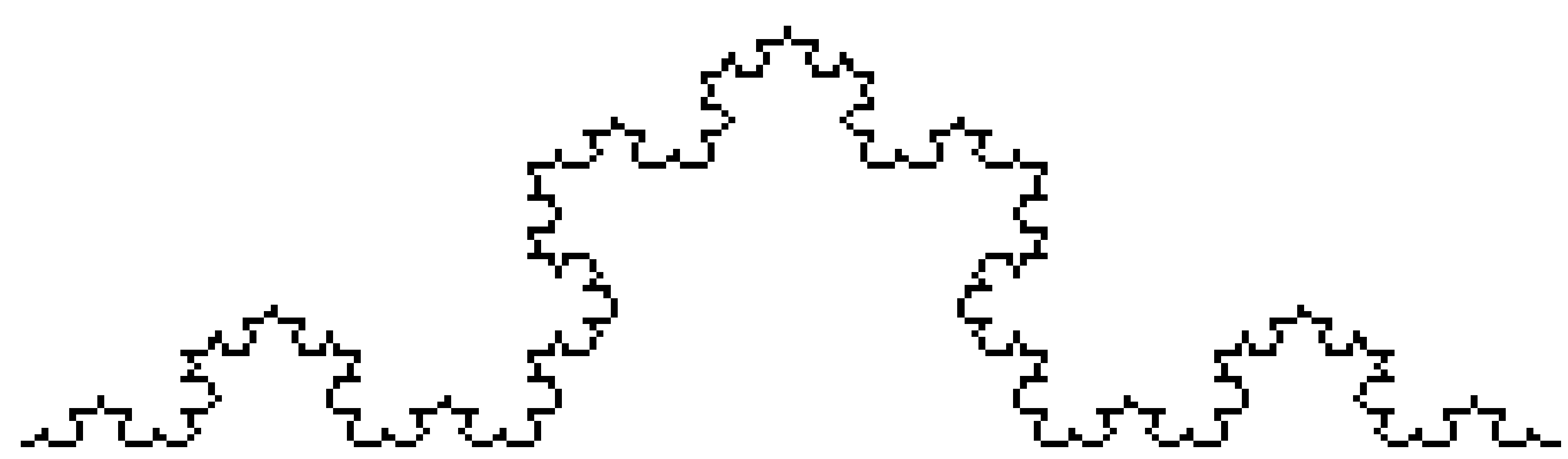
Fiocco di neve di von Koch



Sono note molte figure costruite iterativamente, ***senza limite*** al numero di iterazioni. Per es.

Tappeto di Sierpinski





Ma "*esiste*" questa figura?

C'è un senso in cui si può dire che:
una successione di oggetti *(astratti)* ***converge a***, magari senza mai raggiungere, un ***oggetto limite***.
Può dunque esistere, astrattamente, senza dover essere costruita.

Se il nostro punto finsce sotto la linea frastagliata dopo ***n*** iterazioni, si ha la risposta, ma questo ***n*** potrebbe non arrivare ***mai***!

Matematicamente, sono figure note come

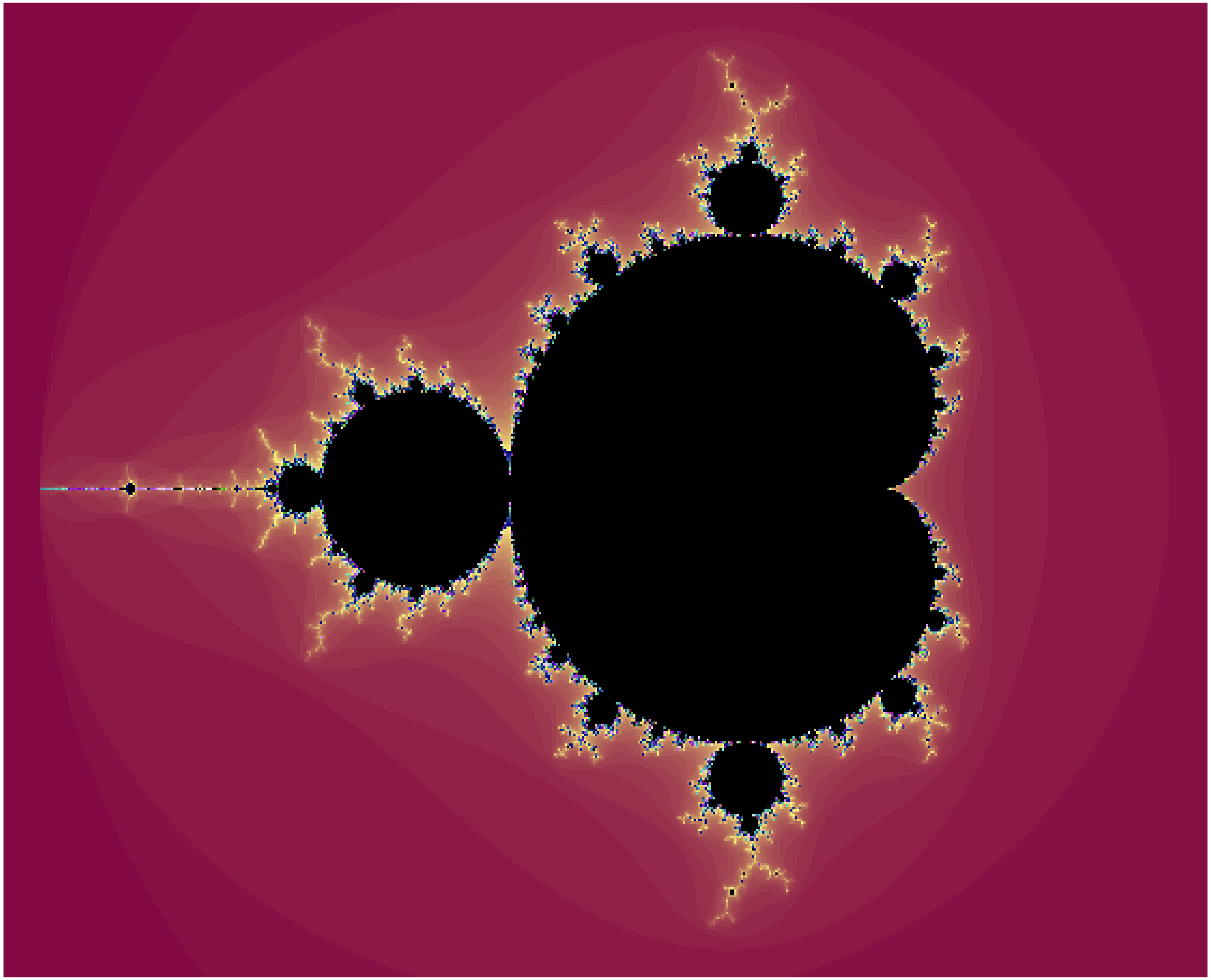
FRATTALI

Si rappresentano graficamente e con formule, quasi come le figure elementari: retta, parabola, circonferenza... ma hanno proprièta molto peculiari, perché non si finisce ***mai*** di costruirle.

Il nome indica che hanno dimensione intermedia fra quelle solite: La curva di von Koch è una linea, infinitamente lunga eppure contenuta entro un'area finita. (ACCARTOCCIARE)

Il tappeto è un'area, ma uguale a zero.

Insieme di Mandelbrot



Numeri complessi (x,y)

1. $(a,b)=(c,d)$ significa $a=c$ e $b=d$

2. $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

3. $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Allora posso indicare i numeri reali con $(x,0)$

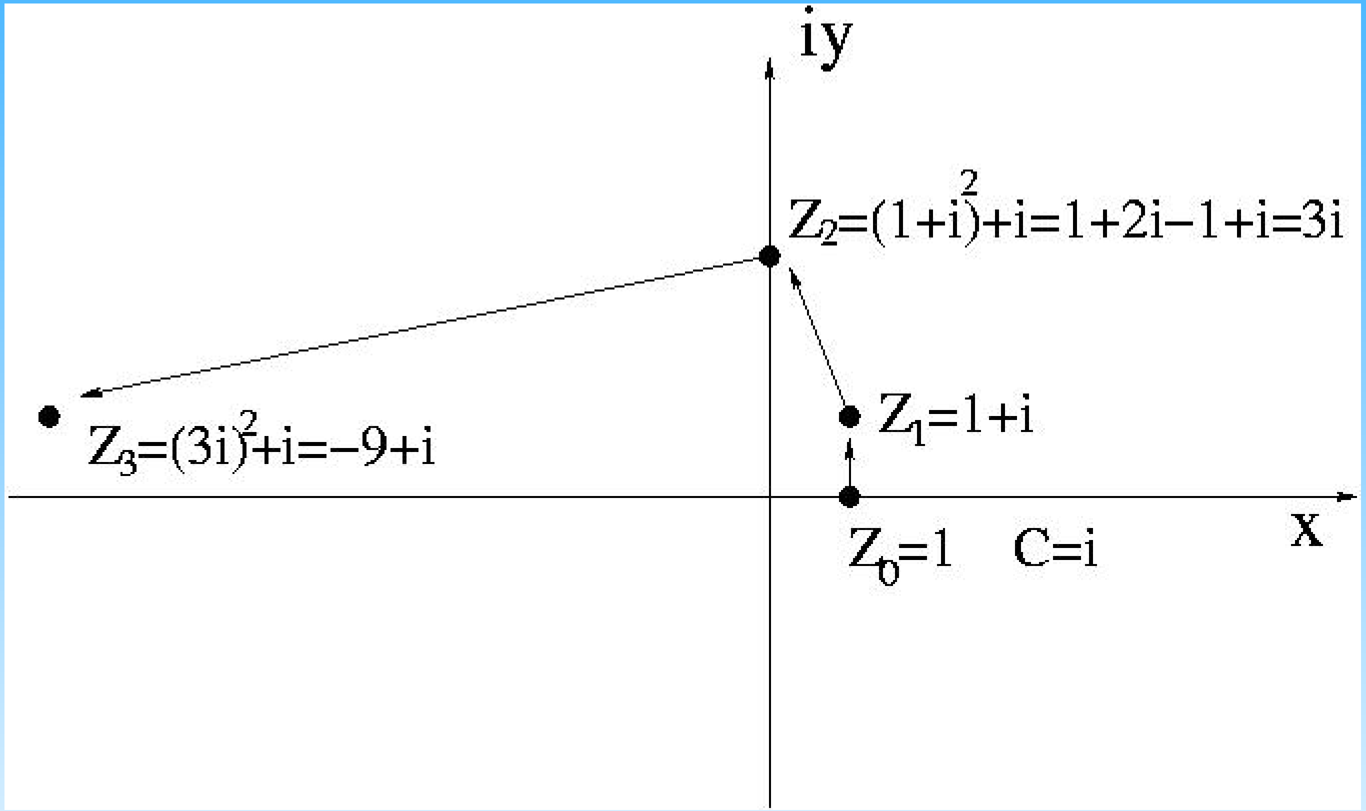
E cosa sarà il prodotto $(0,1)\cdot(0,1)$?

$(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$

È il numero reale -1.
Chiamo $i=(0,1)$ unità *immaginaria*
Il suo quadrato vale -1

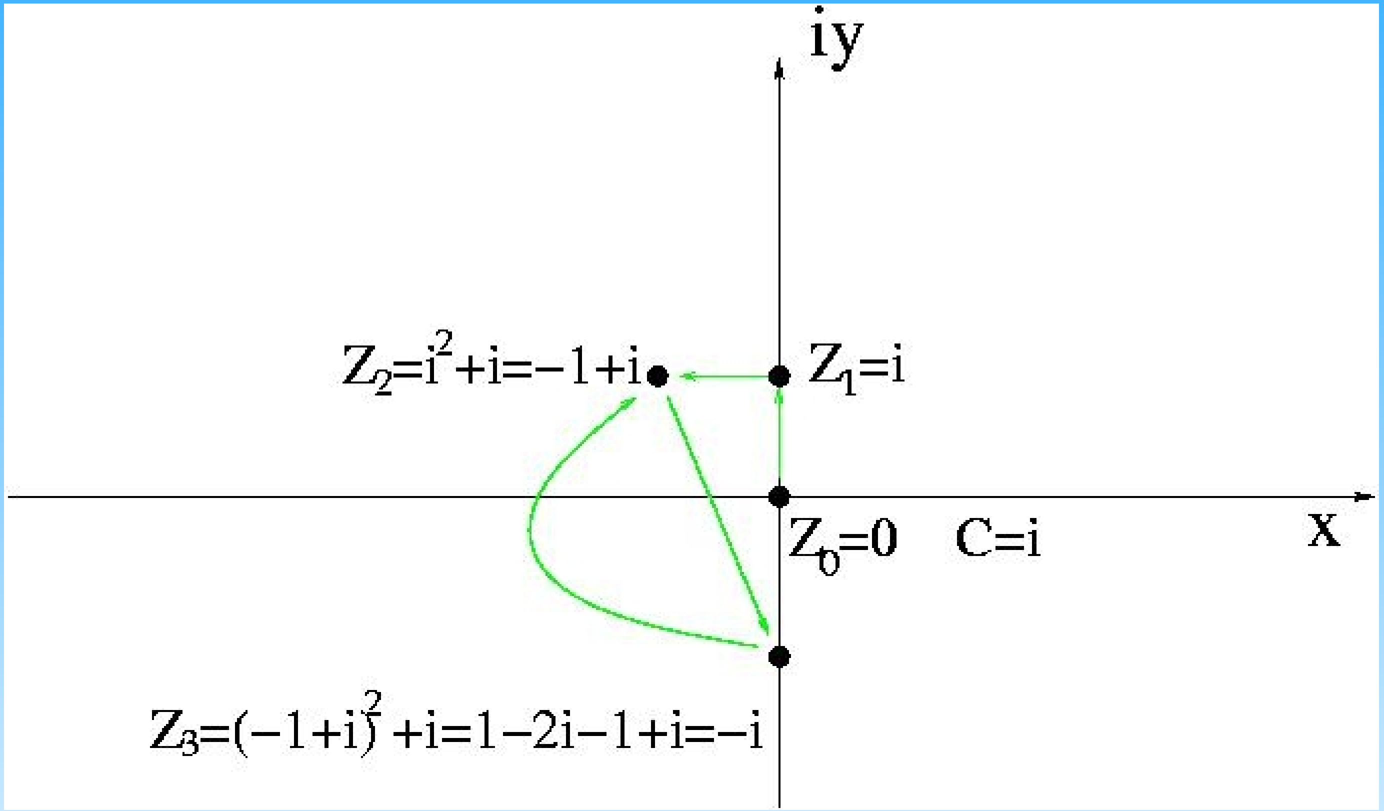
$$Z_n = Z_{n-1}^2 + C$$

Se Z=x+iy resta vicino all'origine, C=a+ib appartien all'insieme. Se Z scappa verso l'infinito, no.

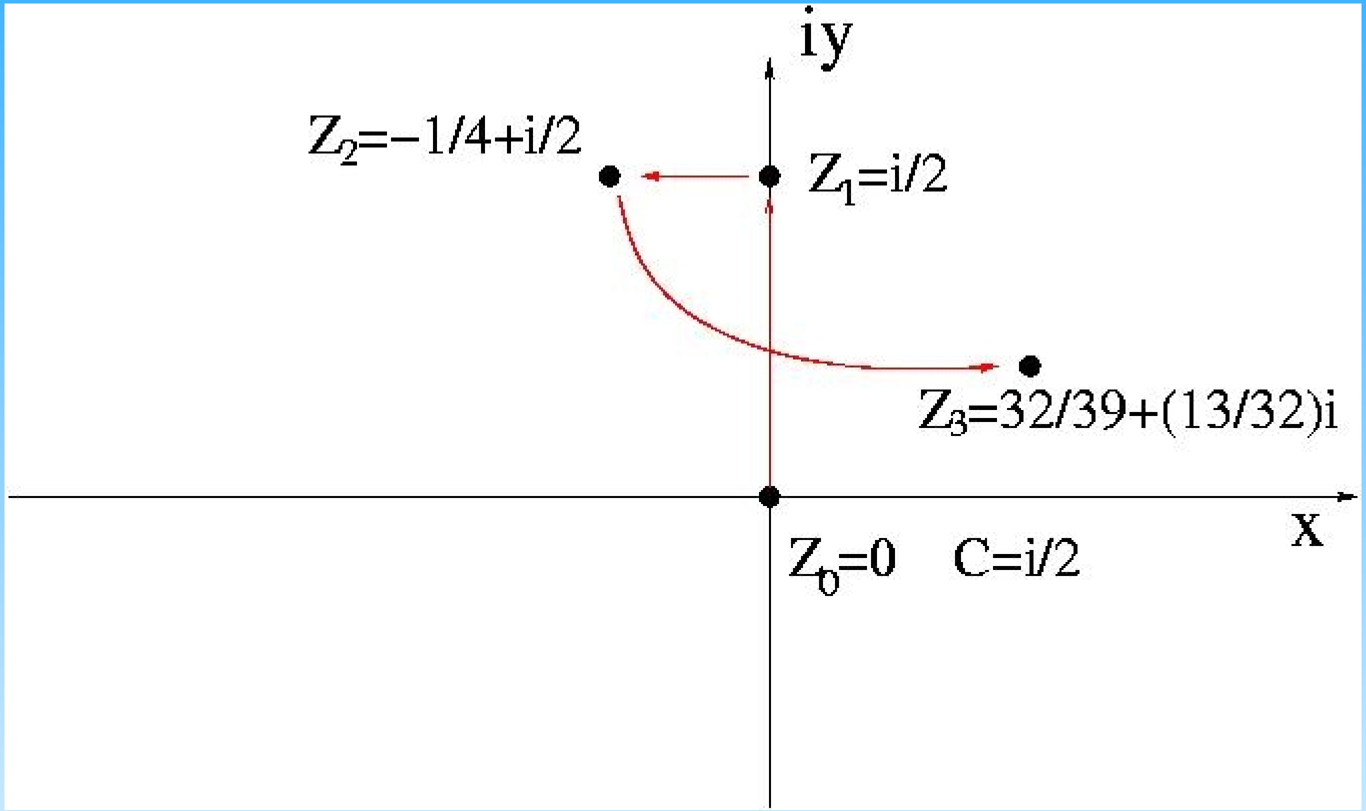


Basta poi dare colori diversi ai punti che scappano con velocità diverse e colorare di nero quelli che restano.

Cambio Z iniziale

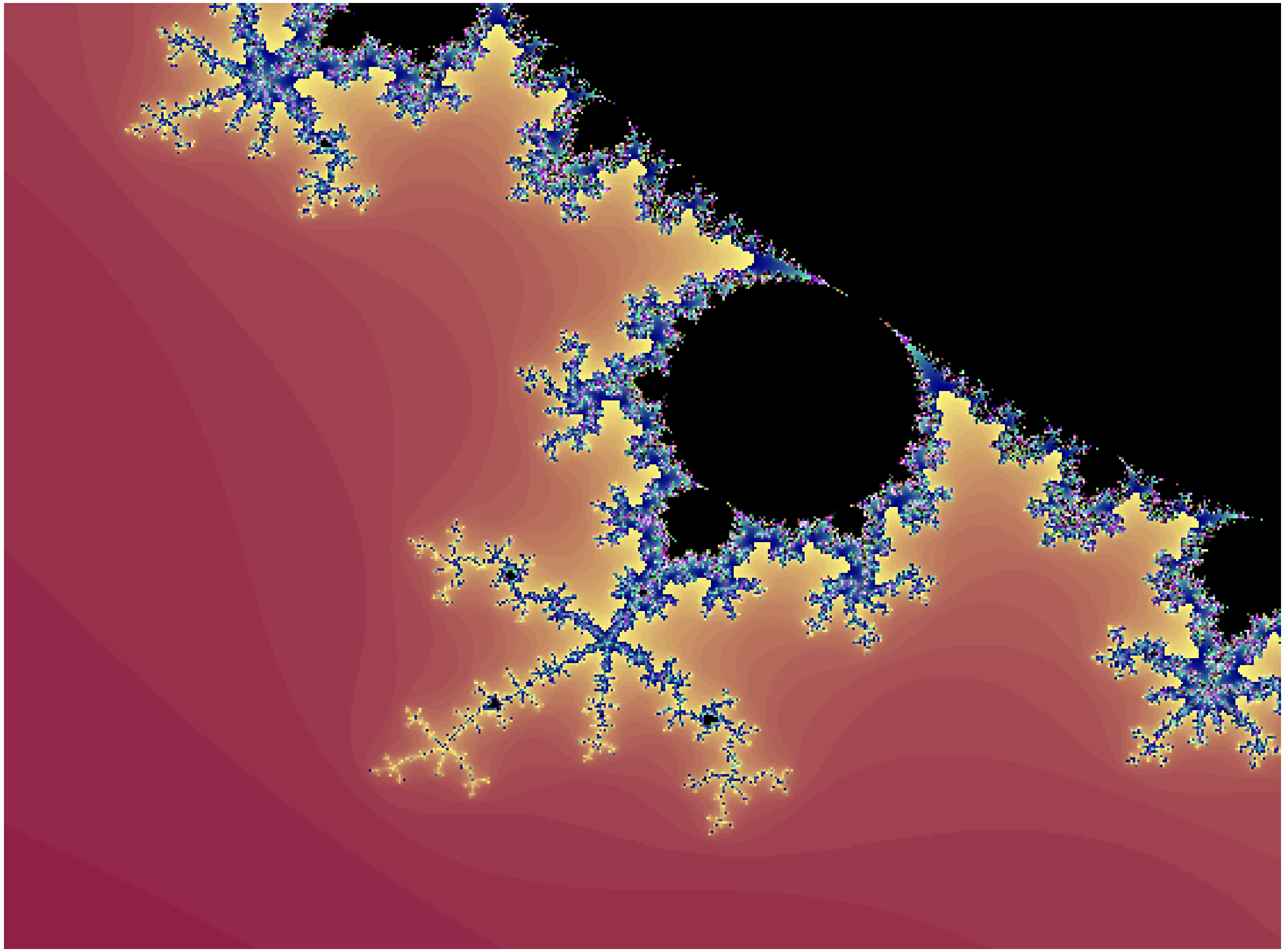


Cambio C

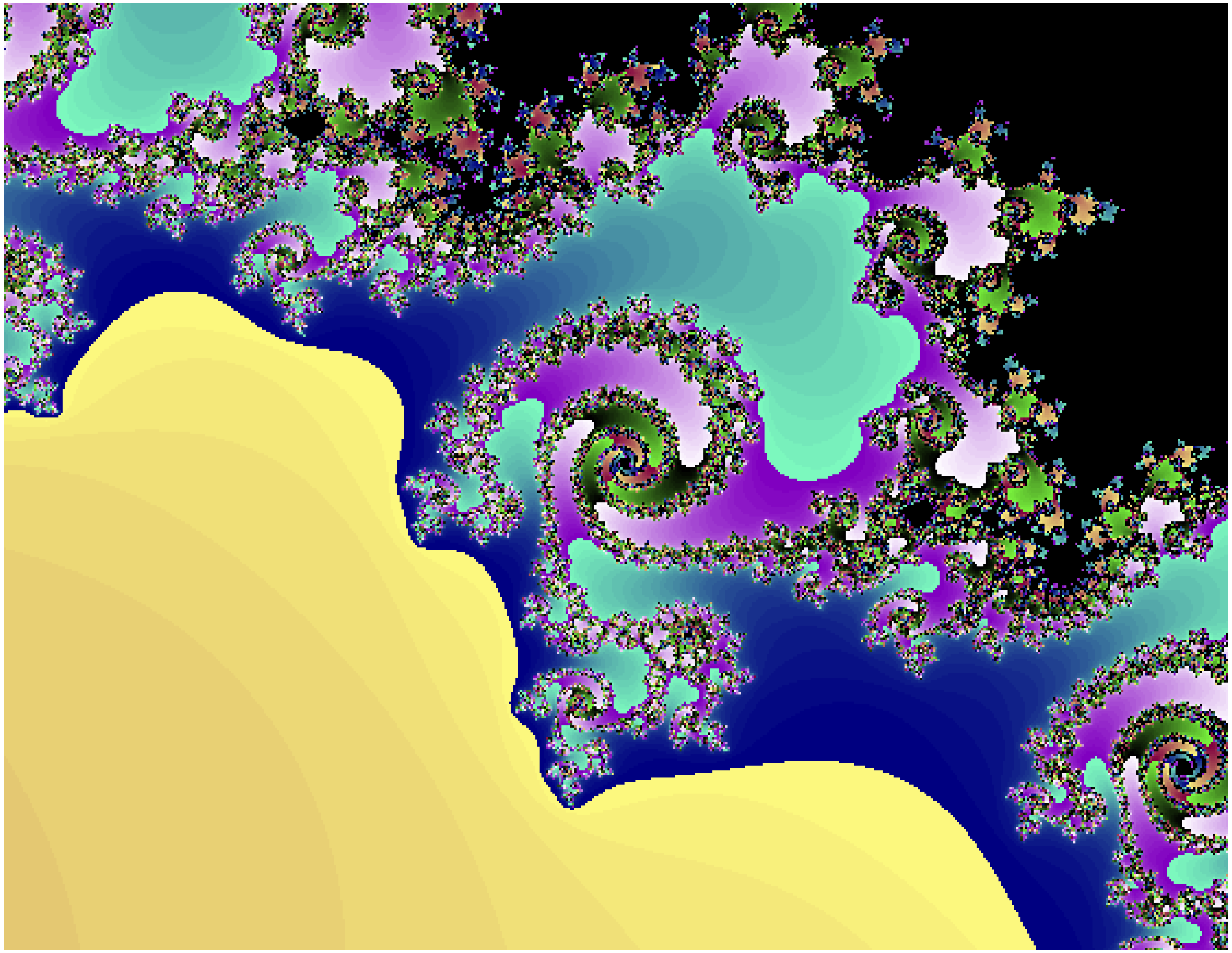


Sfuggirà o resterà?

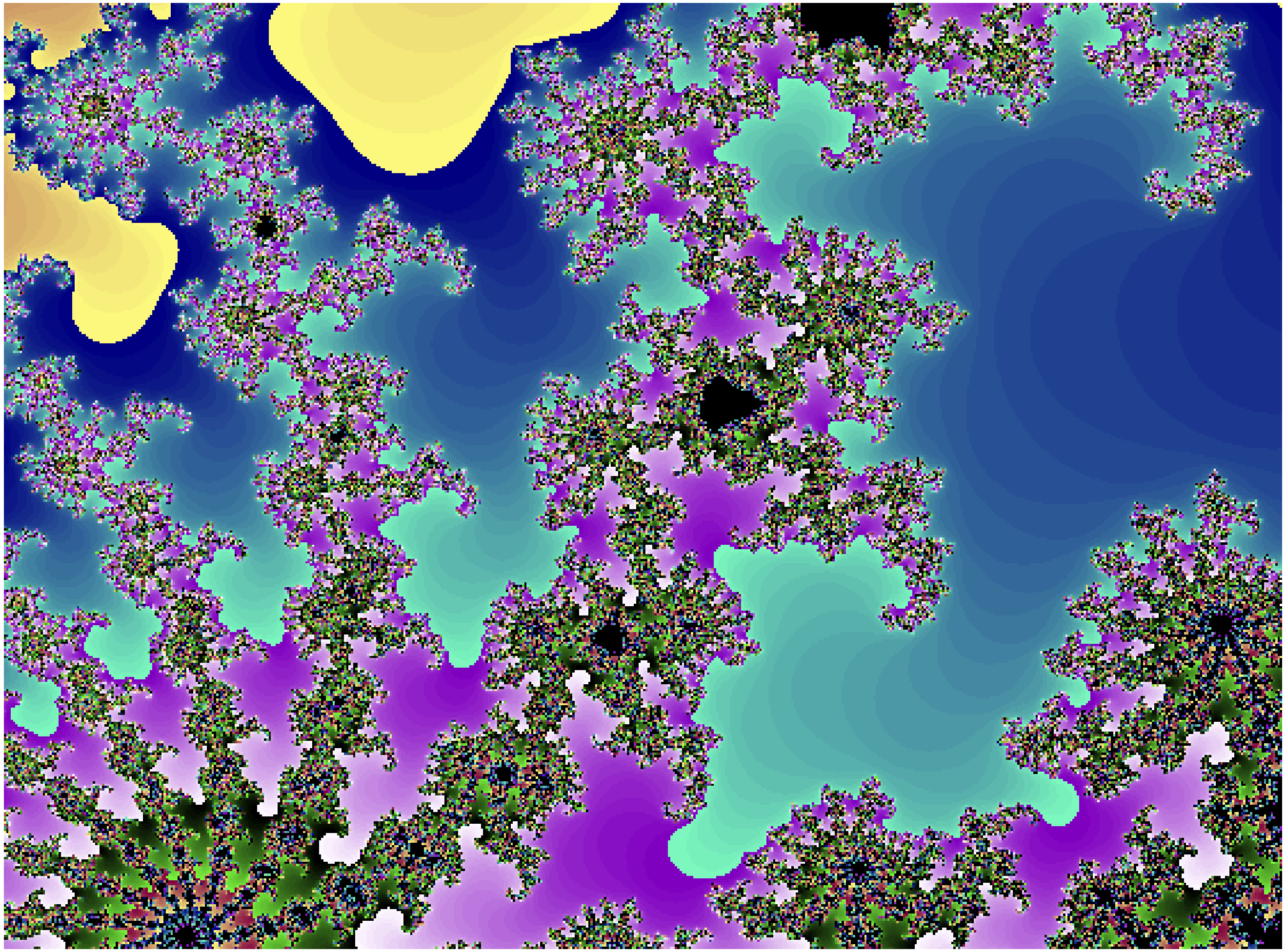
Ingrandisco un dettaglio



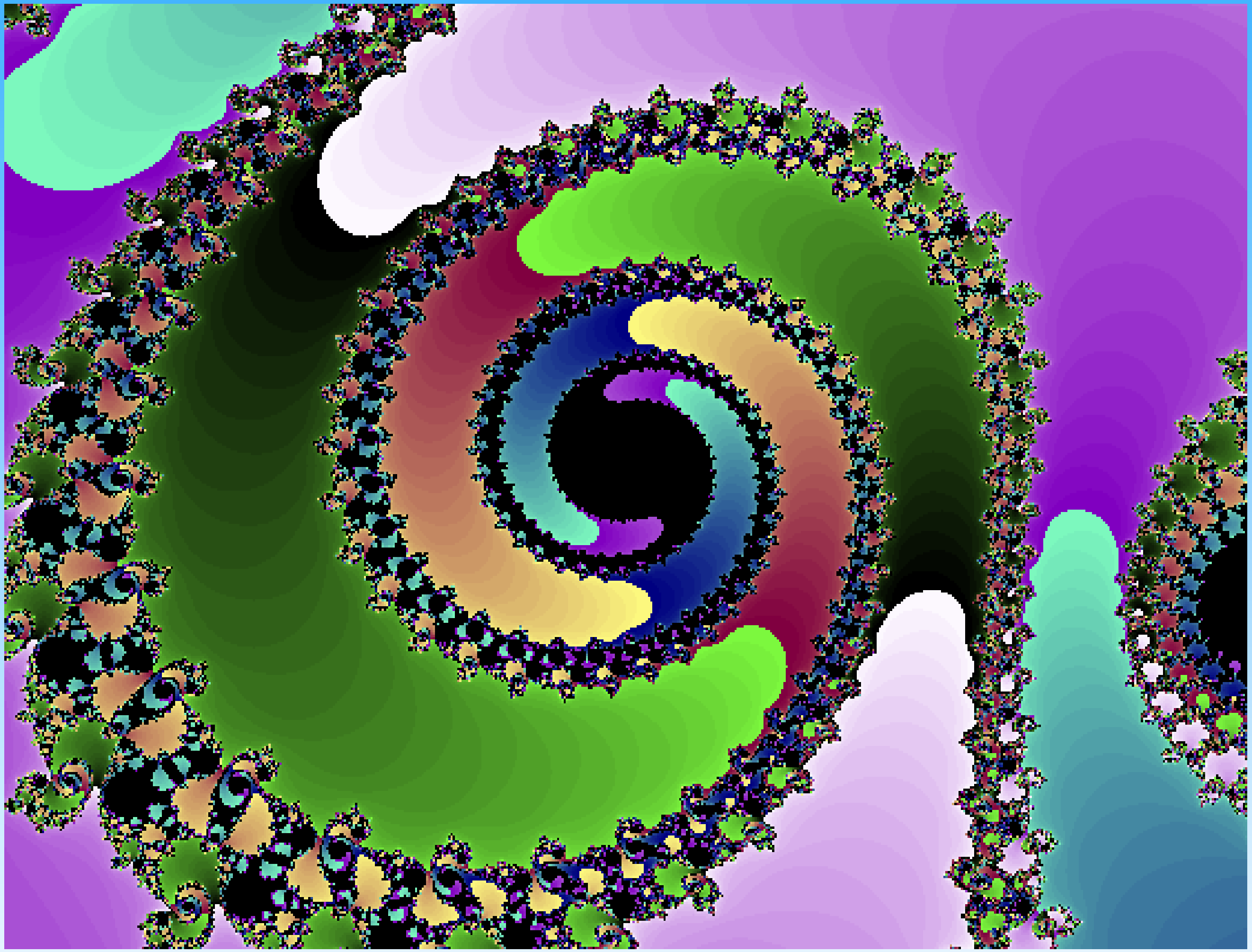
E ancora...



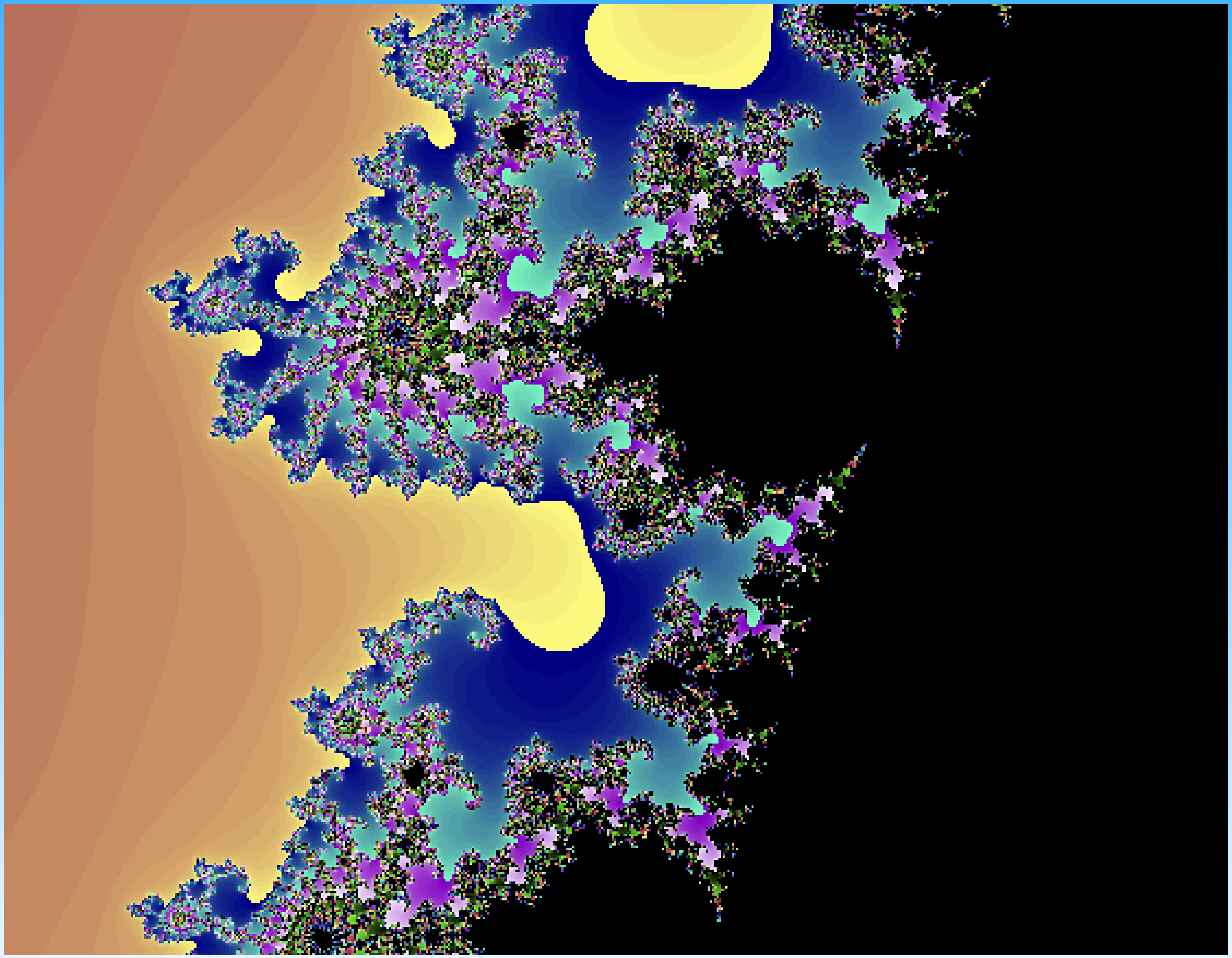
E ancora...



e ancora...



e ancora...



Nella filosofia

Paradosso di Zenone; primo argomento contro il movimento: non si può giungere all'estremità di uno stadio senza prima averne raggiunto la metà, ma prima si dovrebbe raggiungere la metà della metà ecc.

Ci vorrebbero ***infiniti*** passi:

mai si raggiungerà l'estremità dello stadio.

Soluzione matematica moderna: si introduca la velocità, V=distanza/tempo, se V è costante, metà distanza richiede metà tempo. Le distanze e i tempi seguiranno

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

A farla in pratica, la somma resterebbe sempre minore di 1, solo avvicinandocisi via via di più.

Il tempo, invece, scorre inesorabilmente, raggiunge 1, e allora anche la distanza percorsa si completa:

Infiniti passi fatti in una unità di tempo: che senso ha?

Teoria delle serie infinite: Il paradosso rimane, ma si ha un modo di sommare ***"infiniti"*** addendi, senza doverlo veramente fare. Ipotesi del continuo.

Idea già presente nel calcolo di $\boldsymbol{\pi}$ di Archimede.

Metafisica di Aristotele: *“Ed è evidente altresì l'impossibilità dell'esistenza attuale dell'infinito. Altrimenti una qualunque sua parte, presa separatamente, sarebbe infinita.”*

Per Boezio l'infinito sarebbe addirittura una mostruosità.
Per esempio, nei processi numerativi, ammettiamo l'infinito in potenza: 1, 2, 3, 4, 5,...
ma non ammettiamo un infinito in atto (non sconfessato dalla teoria delle serie).

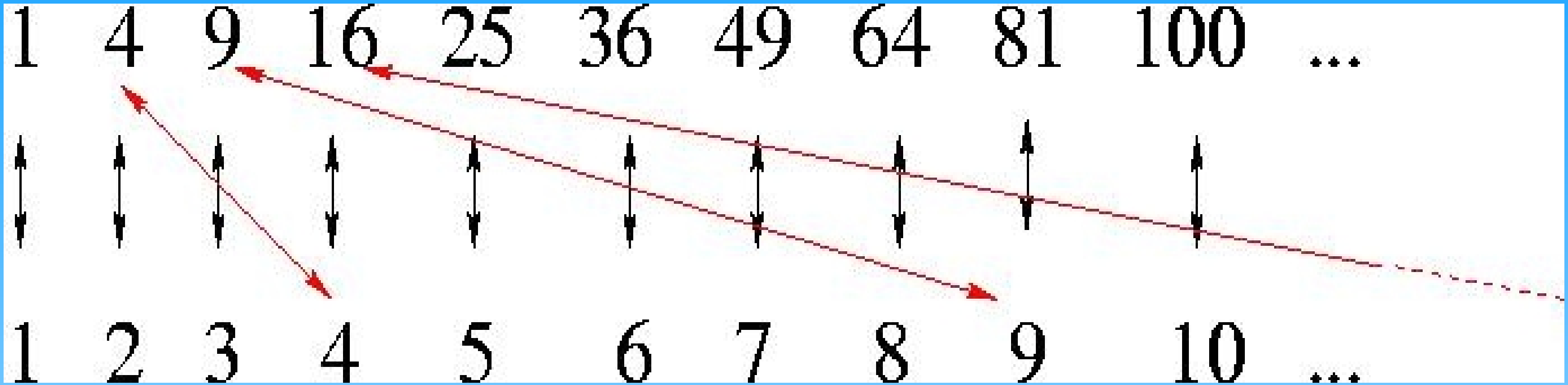
L'infinito in potenza non può essere generato da un finito in atto perché:
la causa non può essere meno perfetta dell'effetto.

Occam, però, si accorse del fatto che il principio per cui la parte è minore del tutto non è universale e, perciò, non esprime una verità metafisica.

Non si può dimostrare (razionalmente) l'impossibilità di andare all'infinito, come per es. da un uomo generato a uno che lo genera.

Ciò non comporta che esistano in atto infiniti esseri, perchè una causa efficiente può anche corrompersi e scomparire dopo aver prodotto il suo effetto.

Galileo osservò, ma non comprese, la corrispondenza 1:1 fra numeri naturali e loro quadrati:



Ma sono di più gli interi o i quadrati?

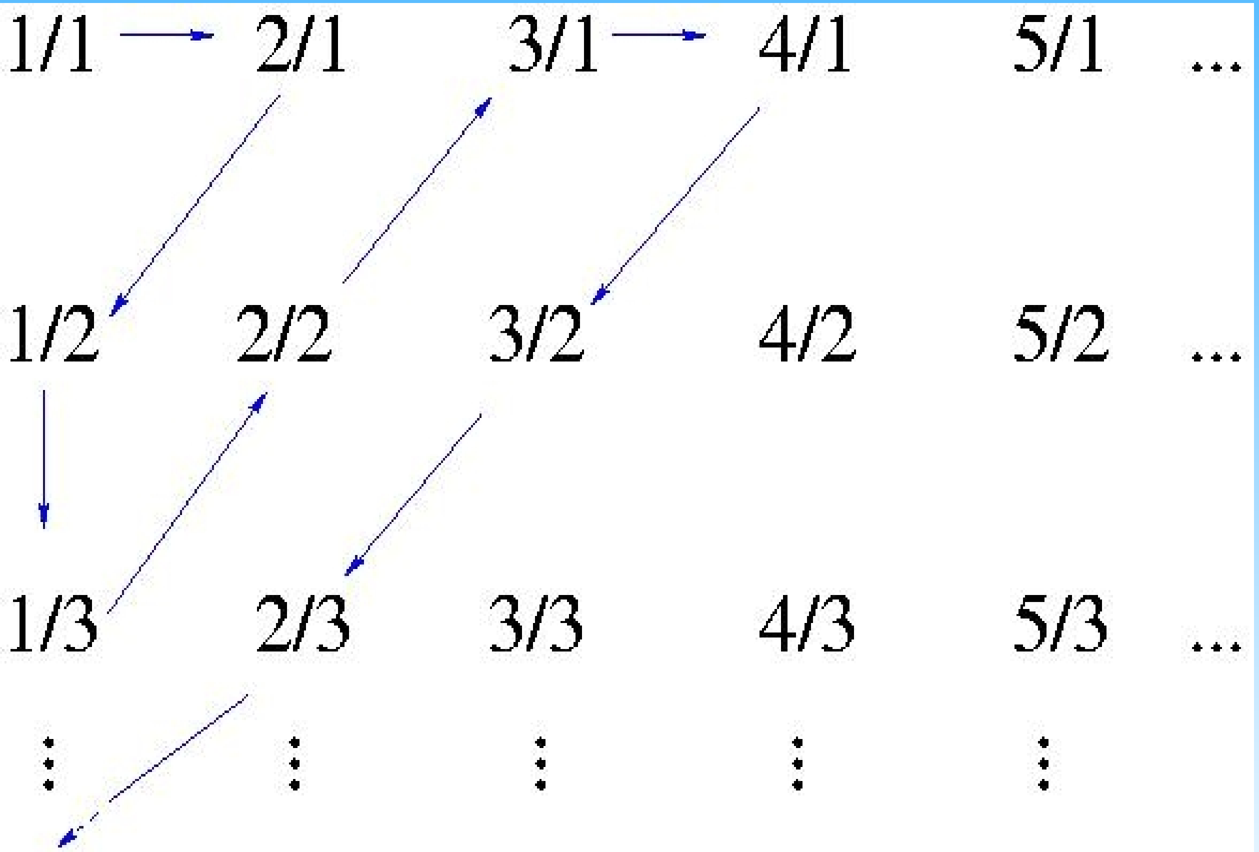
Per Cantor la corrispondenza significa che la loro quantità (*potenza*) è la stessa.
Com'è possibile? 2,3,5... stanno sotto ma non sopra.
Eppure ogni numero sotto ha un corrispondente sopra.

Una parte ***propria*** tanto potente quanto il tutto?

Forse è per via dello spazio vuoto fra interi? No!

I ***razionali*** ***m/n*** sono ***densi*** nei ***reali***: dati due numeri ***reali*** qualunque, fra loro c'è sempre un razionale.

Non lasciano vuoti! Ma si numerano



Cantor: "*Lo vedo e non lo credo*"

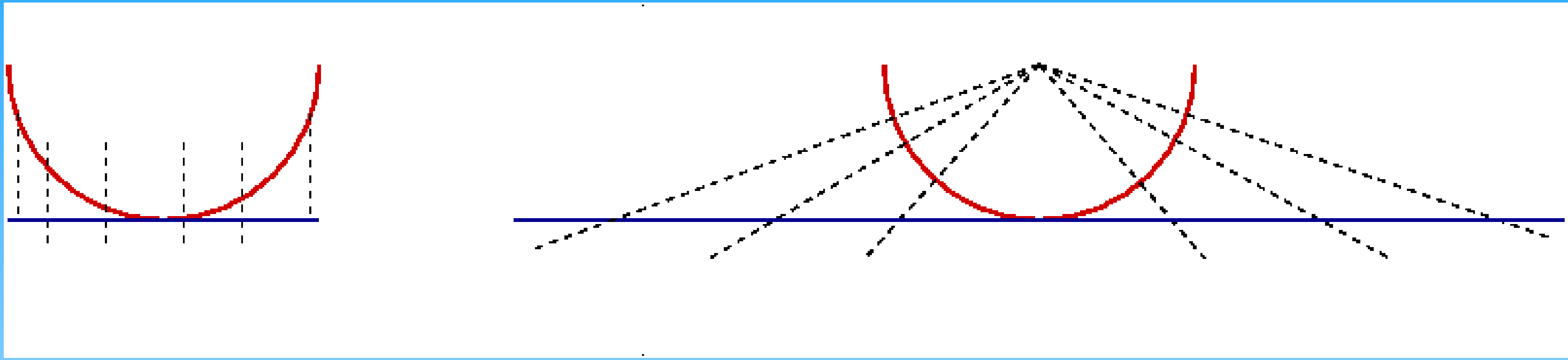
Se la parte propria di un insieme di oggetti è equipotente al tutto diciamo che l'insieme è

INFINITO

Cantor poi farà vedere che non tutti gli infiniti sono uguali

(idea già presente nella matematica jaina all'inizio dell'era cristiana)

Ci sono tanti numeri reali in un intervallo (segmento di retta), quanti tutti i numeri reali (l'intera retta). È un ***infinito*** diverso dagli interi.



Quanti reali in [0,1]? Asumiamoli "numerabili" ordiniamoli (anche se senza limite):

$\boldsymbol{0.a_1a_2a_3a_4\ldots} \quad \boldsymbol{0.b_1b_2b_3b_4\ldots} \quad \boldsymbol{0.c_1c_2c_3c_4\ldots}$

e prendiamo il numero

$\boldsymbol{0.d_1d_2d_3d_4\ldots}$ con $\boldsymbol{d_1 =/= a_1;\ d_2 =/= b_2;\ d_3 =/= c_3;\ \ldots}$

Non c'è nella lista!! NON-NUMERABILI!

Si tratta di “**insiemi**” di oggetti, precisamente numeri.

Cantor si era trovato alle soglie di un paradosso, nel definire l'insieme più grade possibile:

L'insieme di tutti gli insiemi.

Bertrand Russell introdusse l'insieme **S**, ***per es.*** di ***tutti gli oggetti descrivibili in esattamente otto parole*** il quale contiene se stesso e quello ***R*** di ***tutti gli insiemi che non appartengono a se stessi (barbiere rade tutti quelli che non radono se stessi).***

Rade se stesso? Se ***si***, contraddice la definizione, se ***no***, si deve radere... Problema di carattere linguistico evidente nel comprendere un “tutto” o l'infinito.

Nel definire un insieme, allora, non si può usare l'insieme stesso: “qualunque cosa contenga tutto di una collezione di oggetti, non deve appartenere alla collezione”. Ma non basta a evitare paradossi.

Zermelo e Fränkel tentarono un'assiomatizzazione degli insiemi, simile in scopo a quella di Euclide per la geometria. Dei loro 9 assiomi, quello detto di scelta ha generato forti controversie:
“Se S è un insieme (finito o no) di insiemi non vuoti e senza elementi in comune, allora si può creare l'***insieme di scelta*** prendendo da ogni insieme di S precisamente un solo elemento”.
Ma come si può fare questa scelta, se gli insiemi di S sono ***infiniti***?

Gödel: il nono assioma non contraddice gli altri,
Cohen: non può essere dimostrato a partire da essi: è indipendente dagli altri, come il Postulato di Euclide delle parallele (***infinitamente lunghe***).

Ancora una volta, il concetto di ***infinito*** impone un mutamento al corso dello sviluppo della matematica.

Come non c'è una unica geometria logicamente coerente, così non c'è un'unica teoria logicamente coerente degli insiemi.

L'infinito ci forzerà, tramite il lavoro di Gödel, ad ammettere che certe proposizioni, anche se vere, non possono essere dimostrate.

Conseguenze di ciò, fra cui il fatto che l'ipotesi del continuo è "indecidibile", restano ancora da capire.

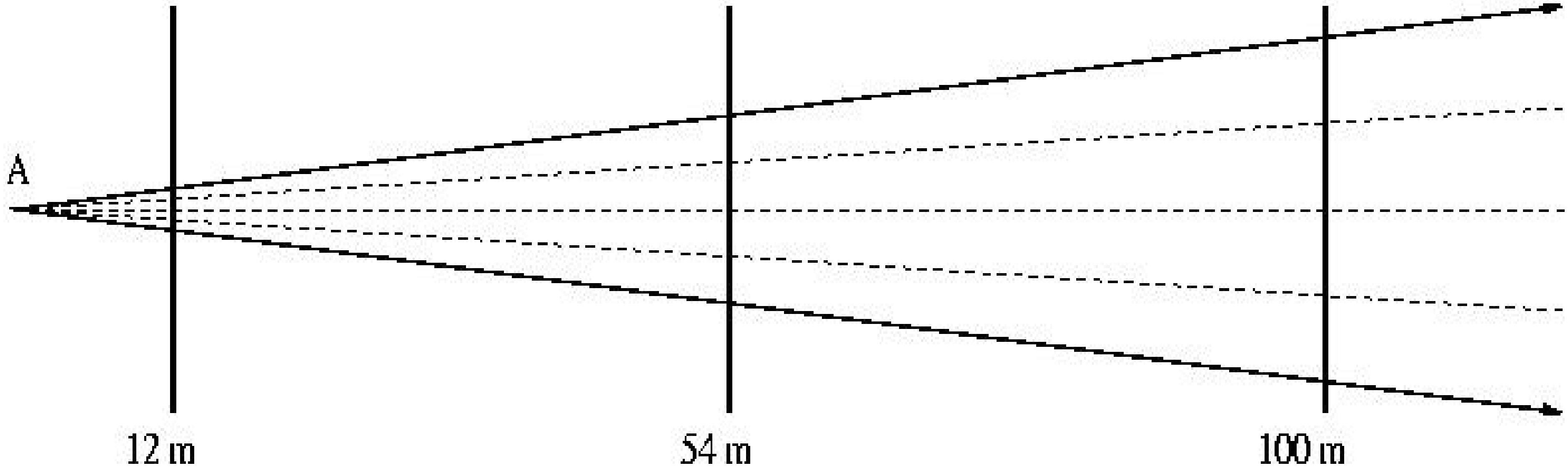
IL CAOS

Fare previsioni sulla base di leggi note, richiede prima delle ***misure***, per conoscere la situazione di partenza, ovvero la ***condizione iniziale***.

Fare previsioni ed effettuare le necessarie misure, sono attività umane e, dato che ogni misura che si può fare va soggetta a ***incertezze***, accuratezza ***finita***, le previsioni sono sempre affette da un margine d'errore, che ci ricordala nostra ***finitezza*** e i nostri ***limiti***.

L'incertezza appare anche nei fenomeni più semplici. Se questi hanno particolari caratteristiche, che ne impediscono la prevedibilità anche in linea di principio, si parla di: ***Caos Deterministico***.

Anche i moti più semplici diventano ***imprevedibili***. Crescita lineare delle incertezze iniziali: distanza doppia implica incertezza doppia; dimezzare l'incertezza iniziale la dimezza a tutte le distanze

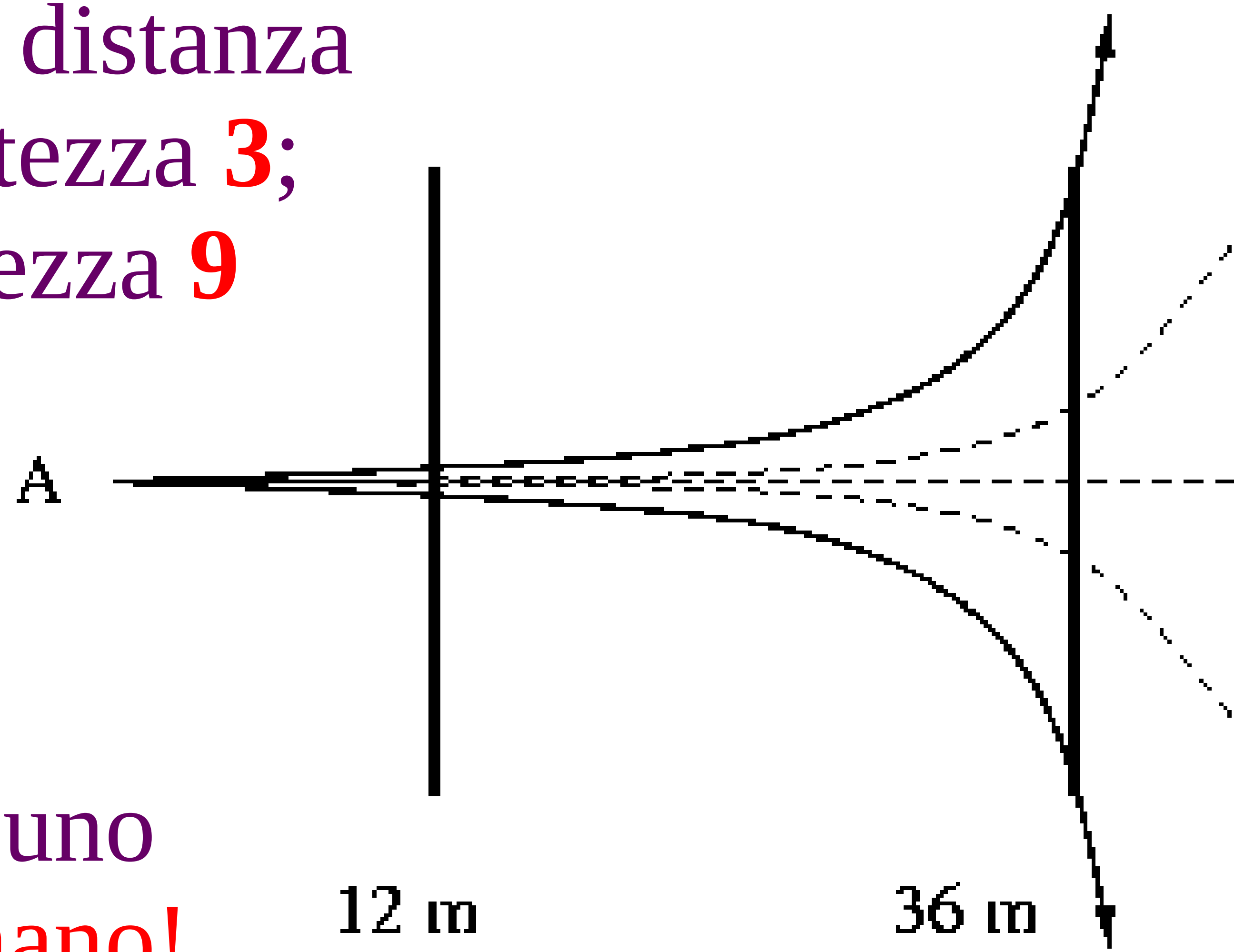


A sufficiente distanza un punto nel bersaglio o un altro, è indifferente.

Ma questo non è chiamato "***caos***", oggi.

Caos: dipendenza esponenziale dalle condizioni iniziali

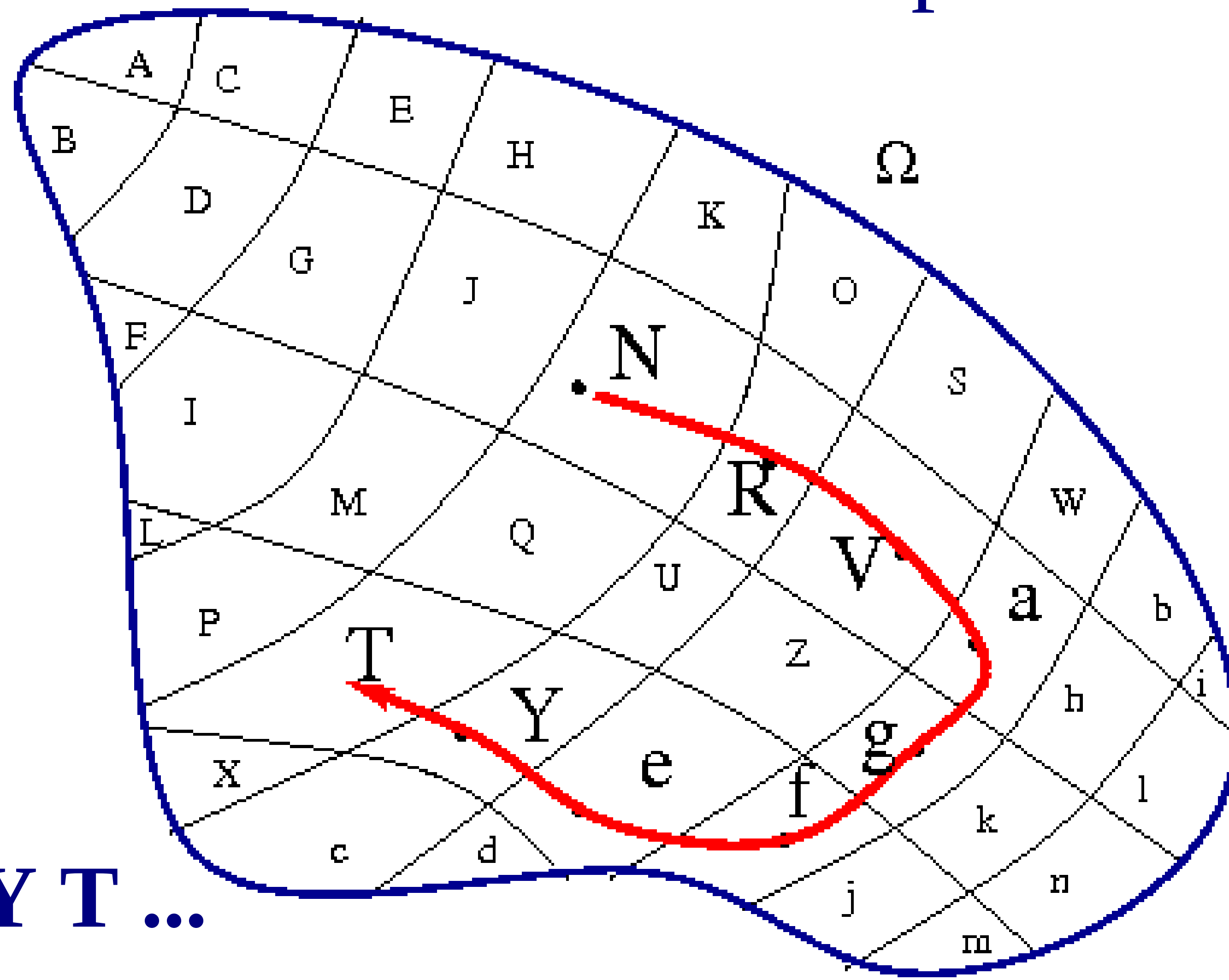
Esponenziale: distanza unitaria, incertezza **3**; doppia, incertezza **9** tripla, **27**.



Migliorare la previsione richiederebbe uno sforzo sovrumano!

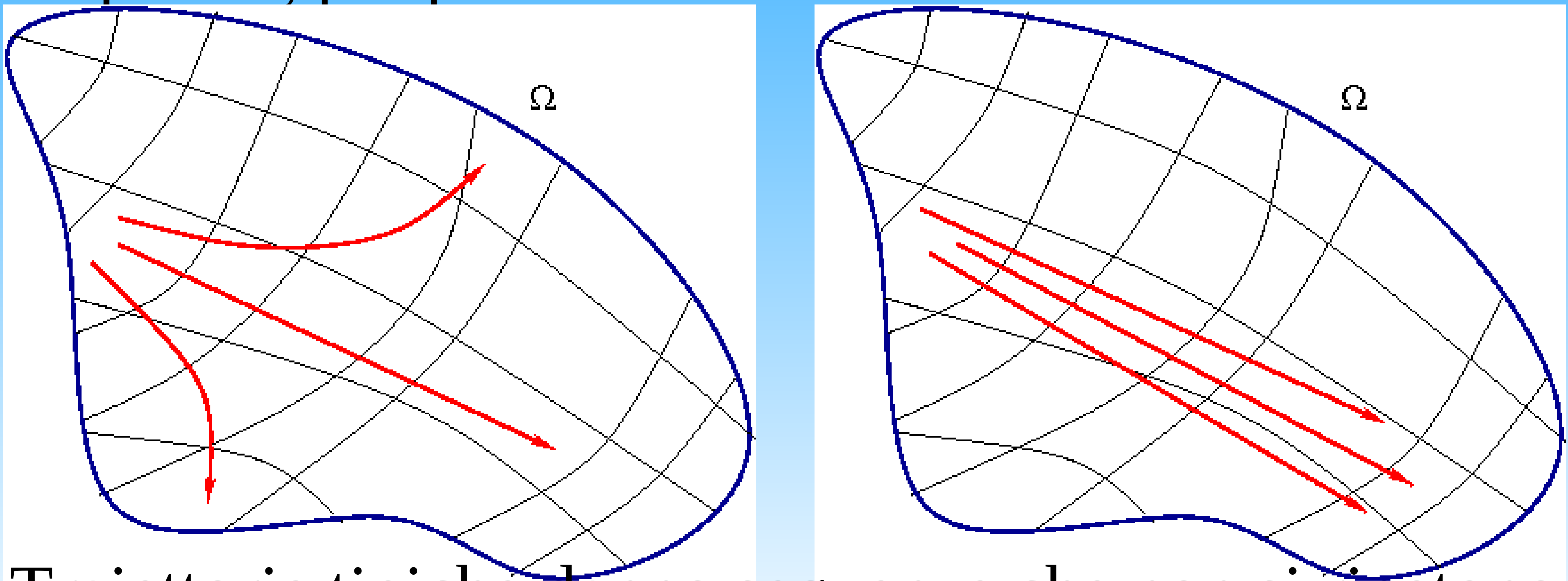
Notare la taglia finita del bersaglio.

Una evoluzione continua nel tempo, può essere espressa in termini di una successione di simboli, che codificano le regioni visitate nella evoluzione temporale.



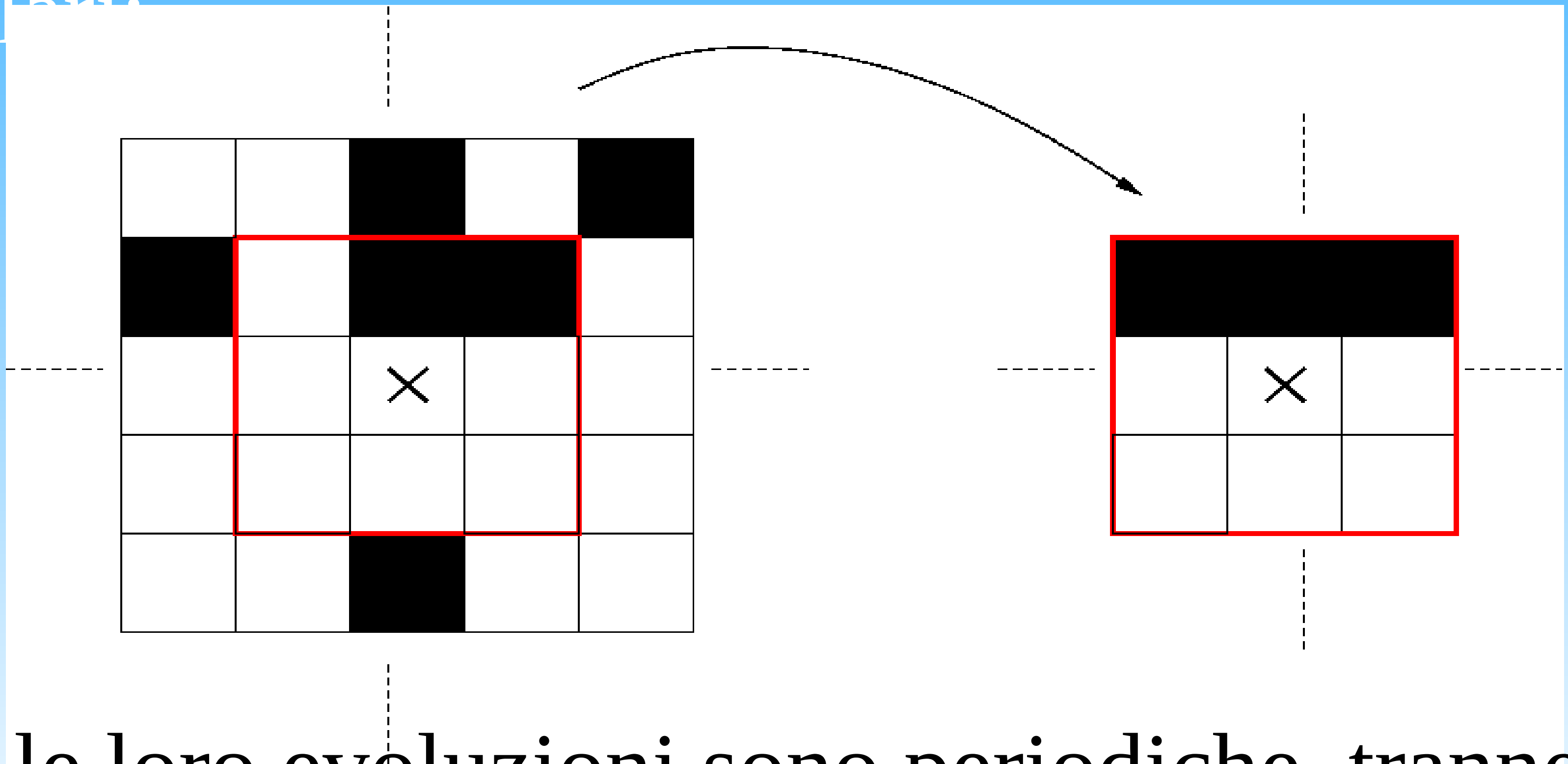
N R V a g f e Y T …

Se la dinamica è caotica, traiettorie vicine si separano rapidamente, hanno sequenze simboliche diverse e ad ogni sequenza si associa una data traiettoria. L'informazione di una sequenza intera equivale alla conoscenza della condizione iniziale. Più lunga è la sequenza, più precisa è tale conoscenza.



Traiettorie tipiche danno sequenze che non si ripetono nel tempo.

Questo perché i punti dello spazio, ovvero gli stati del sistema di interesse, sono ***infiniti***. Fossero finiti, dopo un certo tempo, qualunque traiettoria tornerebbe sui suoi passi e proseguirebbe per un cammino già percorso in passato. Questo avviene con gli automi cellulari:



Tutte le loro evoluzioni sono periodiche, tranne che nel limite in cui lo spazio dei loro stati diventi ***infinito***.

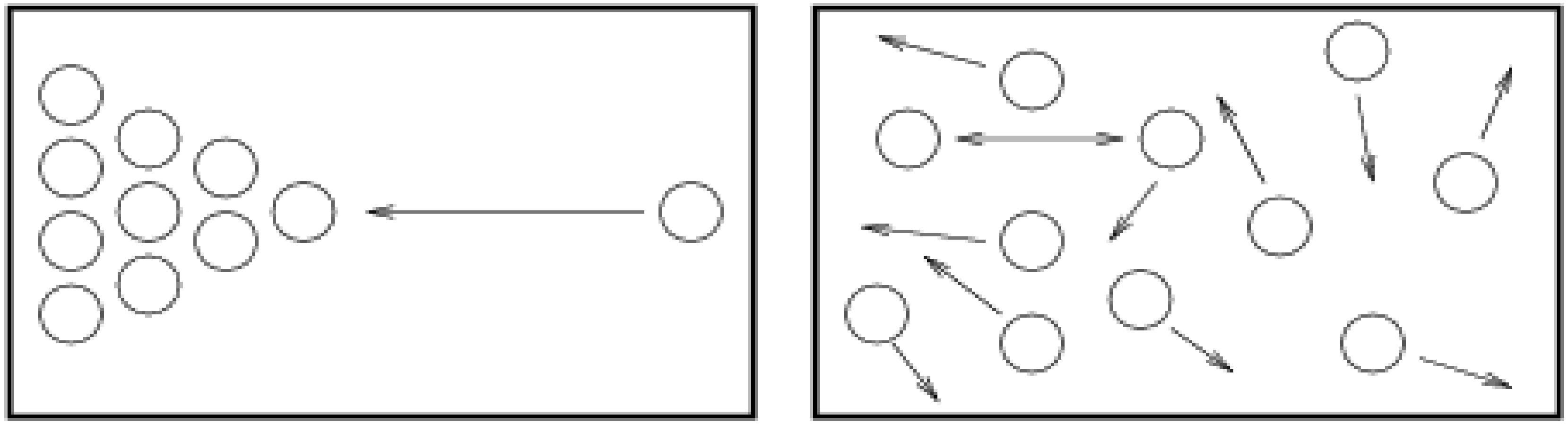
Quando le dinamiche sono caotiche, producono sequenze di simboli apparentemente casuali.

Dato un pezzo finito di sequenza simbolica, come si può evidenziare se è casuale (prodotta per es. nel gio-co del testa o croce) o se segue una regola?

Non si può: solo l'analisi dell'intera sequenza infinita potrebbe rispondere alla nostra domanda, perché:

a. una sequenza casuale infinita contiene al suo interno ogni sotto-sequenza anche ordinata (anche la Divina Commedia)
b. per qualunque sequenza finita si può trovare una regola.

Date due foto di un certo numero di bocce?



È come nel ***moto delle molecole di un gas***, di cui la Fisica dice: ***l'entropia (disordine) cresce***: ***irreversibilità***: ***freccia del tempo***.

Evoluzione verso distribuzione ***disordinata***, cioè ***uniforme***, cioè ***casuale*** delle molecole nel loro spazio.

Se ci sono pochi oggetti, non si parla neanche di ordine o disordine: non fa differenza.

Se sono tanti e “interagiscono” (condividono la propria energia) evolvono.

Come si equilibra le densità, così si trasporta calore, per equilibrare la temperatura, ecc.

e si genera la freccia del tempo: tendenza verso un ***crescente disordine*****,** grazie alla ***infinità*** dei possibili stati.

A cosa si deve che tutto nell'universo evolva in modo da
non tornare indietro?

Perchè il calore flusice dai corpi caldi a quelli freddi e non torna mai indietro?
Perchè se metto del latte nel caffè,
non li separo più?

Innanzitutto, ***meno male che è così!***

Meno male che è così! **Ma perché?**

Per lo stesso motivo per il quale è facile mettere una camera in disordine e richiede lavoro (***energia***) rimetterla in ordine.

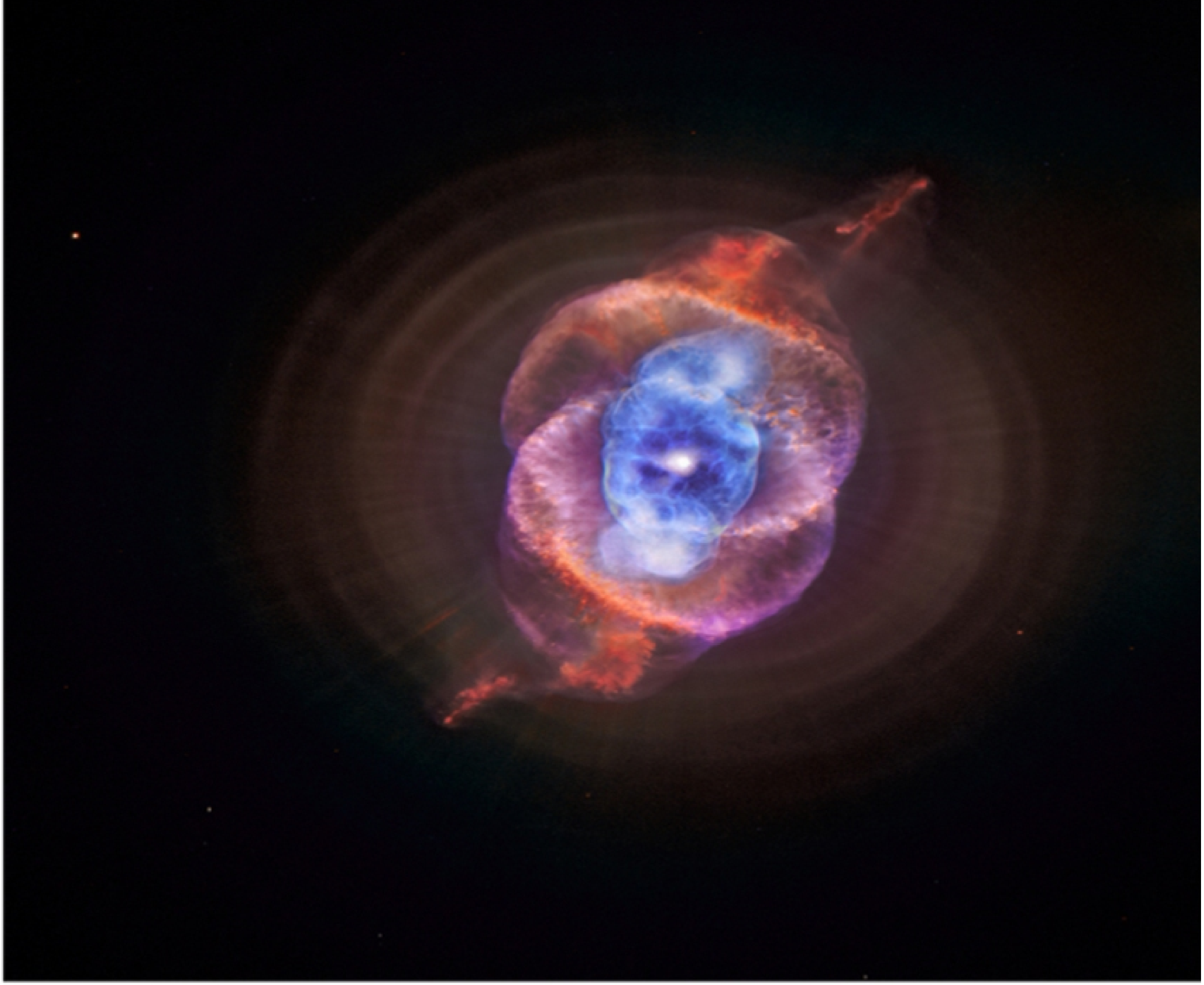
Le combinazioni disordinate (uniformi) sono tante di più di quelle ordinate!

Soprattutto quando gli oggetti sono tanti.

I moti caotici sono come casuali e il casuale preferisce l'uniformità.

Praticamente tutta la materia è soggetta a ***moti*** caotici, quindi tende verso l'uniformità, se lasciata a se stessa (isolata).
Ci vuole lavoro, ***energia***, per vincere questa tendenza.

Sulla Terra l'energia è fornita dal Sole. Una grande parte viene ***dissipata*** (restituita all'Universo). Questo consente il miracolo di ordine ed armonia che è la ***vita***.
Lo stesso accade nel resto dell'universo.



Cat's Eye Nebula: stella morente; il Sole fra 5 miliardi anni.

Nebulosa del Granchio: resti di supernova

Nebulosa Rosetta: giovani stelle a 5000 anni luce

Nebulosa Testa di Cavallo:
una nube di polveri a 1500 anni luce.

NGC2440: più caotica di NGC2346; la vogliamo chiamare dis-ordinata?

Era questo che intendevamo per ***INFINITO?***

Forse dobbiamo ammettere che c'è una questione di carattere linguistico:

la scienza parla di "altro"

Noi scopriremo il semplice sotto il complesso, poi il complesso sotto il semplice, poi di nuovo il semplice sotto il complesso, e così via, senza poter prevedere quale sarà l'ultimo termine. Ma dovremo pure fermarci da qualche parte e, perchè la scienza sia possibile, occorre farlo quando si incontra la semplicità...

Ma se la semplicità è solo apparente, questo terreno sarà abbastanza solido?

È quanto conviene investigare.

(H. Poincarè)

Riferimenti bibliografici

D.R. Hofstadter, Gödel, Escher, Bach, Adelphi, Milano (1984)

R. Penrose, The emperor's new mind, Vintage Books, London (1990)

J.P. Luminet, M. Lachièze-Rey, Finito o infinito?, Mondadori, Milano (2005)

E. Maor, To infinity and beyond, Birkhäuser, Stuttgart (1986)

L. Rondoni, Caos, informazione e calore, Bollettino della Unione Matematica Italiana Vol. 8 Sez. A, 51-82 (2005)

L. Rondoni, Complessità, caos e la presunta supremazia dell'informazione sulla materia (Serie SEFIR, in stampa)

L. Rondoni, Sistemi complessi nella fisica odierna e cenni alla complessità nelle scienze contemporanee (Serie SEFIR, in stampa)