Campi conservativi e potenziali

Notazioni. Considereremo $n = 2, 3$ ed indicheremo sempre con:

- $\boxed{\mathbf{F}}$ un campo vettoriale *continuo* $\mathbf{F} = (F_1, ..., F_n) : \mathrm{dom}\,\mathbf{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
- $\boxed{\Omega}$ un *aperto connesso* di $\mathbb{R}^n$

Vale il seguente:

Teorema. *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto connesso, allora è connesso per archi regolari a tratti.*

- $\boxed{\Gamma}$ un arco regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$
- $\boxed{\Gamma_{AB}}$ un arco regolare a tratti in $\mathbb{R}^n$, aperto e di estremi A e B
- $\boxed{\Gamma_{\overrightarrow{AB}}}$ l'arco Γ_{AB} orientato da A e B
- $\boxed{\Gamma_{\overleftarrow{AB}}}$ l'arco Γ_{AB} orientato da B ad A.

1 Definizioni e prime proprietà

Definizione 1 *Diciamo che* $\mathbf{F}$ *è* ***conservativo in Ω*** *se esiste una funzione $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\boxed{\nabla U = \mathbf{F} \quad \textit{in ogni punto di } \Omega}, \quad \textit{cioè} \quad (U_{x_1}, ..., U_{x_n}) = (F_1, ..., F_n) \quad \textit{in } \Omega,$$

$$\textit{cioè} \quad \frac{\partial U}{\partial x_1} = F_1 \ , \ \dots \ , \ \frac{\partial U}{\partial x_n} = F_n \quad \textit{in } \Omega.$$

Un tale campo scalare U si chiama ***potenziale di $\mathbf{F}$ in Ω***.

Note. 1) È un'*estensione dell'idea di primitiva*: U si dice anche **primitiva di F su** Ω. Non è più vero che ogni funzione continua ammette primitiva (teorema fondamentale del calcolo integrale), ma si vedranno molte analogie con il caso unidimensionale.

2) *Se* $\mathbf{F}$ *è conservativo in Ω, allora ammette infiniti potenziali su Ω*; infatti è ovvio che

$$U \ \text{ potenziale } \implies U + c \ \text{ potenziale}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R} \text{ costante arbitraria.}$$

Esempio. *Se* $\mathbf{F}$ *è* ***radiale****, cioè del tipo* $\mathbf{F}(P) = g(r)\overrightarrow{OP}$ *con* $r = \|\overrightarrow{OP}\|$ *e* $g \in C((a,b))$*, allora* $\mathbf{F}$ *è conservativo ed i suoi potenziali sono* $U(P) = G(r)$ *con* $G(r) = \int g(r)\, r\, dr$*.*
Infatti, essendo

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}\right) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}} = \frac{x_i}{r}$$

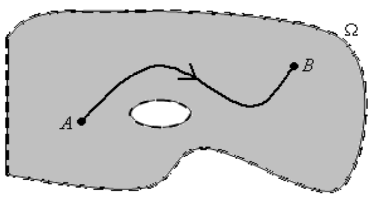
e $G'(r) = g(r)\, r$, risulta

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(P) = G'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} = g(r)\, r\frac{x_i}{r} = g(r)\, x_i$$

e quindi $\nabla U(P) = g(r)(x_1, ..., x_n) = g(r)\overrightarrow{OP} = \mathbf{F}(P)$.

Teorema 2 (di indipendenza del lavoro dal percorso)
Se $\mathbf{F}$ *è conservativo su* Ω*, allora*

$$\forall \Gamma_{AB} \subset \Omega, \qquad \int_{\Gamma_{\overrightarrow{AB}}} \mathbf{F} \cdot dP = U(B) - U(A)$$



(e quindi $L_{\Gamma_{\overleftarrow{AB}}}(\mathbf{F}) = U(A) - U(B)$), *dove* U *è un qualsiasi potenziale di* $\mathbf{F}$ *su* Ω*.*

Dunque: *il lavoro di un campo conservativo lungo un* Γ_{AB} *(comunque orientato) dipende solo dagli estremi* A, B *e non dall'arco* Γ_{AB} *che li unisce.*

Nota. Si tratta di una generalizzazione della formula fondamentale del calcolo integrale:

$$G \text{ primitiva di } g \text{ su } [a,b] \implies \int_a^b g(t)\, dt = G(b) - G(a).$$

Dimostrazione. Se $\Gamma_{\overrightarrow{AB}}$ ha un solo tratto, prendiamo una sua parametrizz. regolare $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(a) = A$ e $\gamma(b) = B$ (quindi concorde con l'orientamento dato)[1]. Siccome $\mathbf{F} = \nabla U$ in tutti i punti di Ω e quindi di Γ_{AB}, risulta

$$\int_{\Gamma_{\overrightarrow{AB}}} \mathbf{F} \cdot dP = \int_a^b \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \underbrace{\nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{=\frac{d}{dt}[U(\gamma(t))] \text{ (reg.catena)}} dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} \underbrace{[U(\gamma(t))]}_{\text{funz. } \mathbb{R}\to\mathbb{R}} dt \underset{\text{formula fond.}}{=} U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = U(B) - U(A).$$

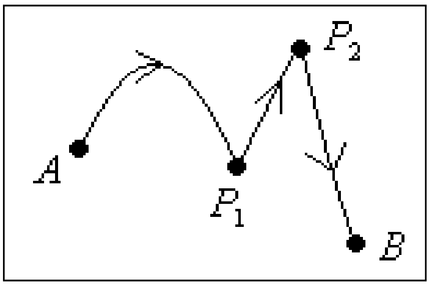
[1] esiste sempre, eventualmente passando alla parametrizzazione opposta

Se invece $\Gamma_{\overrightarrow{AB}} = \Gamma_{\overrightarrow{AP_1}} \cup \Gamma_{\overrightarrow{P_1P_2}} \cup \Gamma_{\overrightarrow{P_2B}}$ (3 tratti solo per fissere le idee), allora

$$\int_{\Gamma_{\overrightarrow{AB}}} \mathbf{F} \cdot dP = \int_{\Gamma_{\overrightarrow{AP_1}}} \mathbf{F} \cdot dP + \int_{\Gamma_{\overrightarrow{P_1P_2}}} \mathbf{F} \cdot dP + \int_{\Gamma_{\overrightarrow{P_2B}}} \mathbf{F} \cdot dP$$

$$= U(P_1) - U(A) + U(P_2) - U(P_1) + U(B) - U(P_2)$$

$$= U(B) - U(A). \quad \blacksquare$$



Corollario 3 (caratterizzazione dei potenziali di uno stesso campo) *Se U è un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω, allora $V : \Omega \to \mathbb{R}$ è un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω se e solo se $V = U + c$ con $c \in \mathbb{R}$ costante.*

Dimostrazione Sia V un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω. Fissato $P_0 \in \Omega$, sia $P \in \Omega$ qualsiasi. Poiché Ω è aperto connesso, esiste un $\Gamma_{P_0 P} \subset \Omega$ e quindi risulta

$$U(P) - U(P_0) = \int_{\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}} \mathbf{F} \cdot dP = V(P) - V(P_0)$$

(applicando il teorema di indipendenza sia con U che con V). Dunque $V(P) = U(P) + c$ con $c = V(P_0) - U(P_0)$ costante. Il viceversa è ovvio (e l'abbiamo già osservato). ■

2 Condizioni di conservatività

Il seguente teorema dà condizioni necessarie e sufficienti per la conservatività di un campo continuo.

Teorema 4 (di equivalenza) *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $\mathbf{F}$ *è conservativo in* Ω*;*

(ii) $\forall \Gamma^1_{AB}, \Gamma^2_{AB} \subset \Omega$, *risulta* $L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}}(\mathbf{F}) = L_{\Gamma^2_{\overrightarrow{AB}}}(\mathbf{F})$*;*

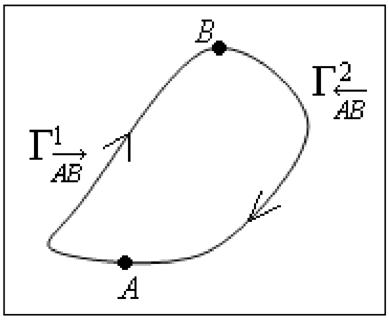
(iii) $\forall \Gamma \subset \Omega$ *chiuso (comunque orientato), risulta* $L_\Gamma(\mathbf{F}) = 0$.

Dimostrazione. Proviamo $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$, con un cenno di $(iii) \Rightarrow (ii)$ e $(ii) \Rightarrow (i)$. Sottintenderemo che i lavori sono del campo $\mathbf{F}$.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Siano $\Gamma^1_{AB}, \Gamma^2_{AB} \subset \Omega$ e sia U un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω (che esiste per (i)). Per indipendenza dal percorso, si ha subito $L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} = U(B) - U(A) = L_{\Gamma^2_{\overrightarrow{AB}}}$.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Sia $\Gamma \subset \Omega$ chiuso. Presi $A, B \in \Gamma$ diversi qualsiasi, Γ resta scomposto in due sottoarchi regolari a tratti Γ^1_{AB} e Γ^2_{AB}. Orientando tutti i tratti compatibilmente (ad esempio in modo che i sottoarchi risultino $\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}$ e $\Gamma^2_{\overleftarrow{AB}}$), si ha

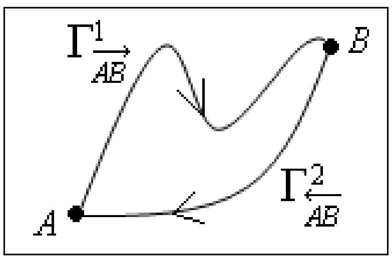
$$\begin{aligned} L_\Gamma &\underset{\substack{\text{def. di } L \text{ su} \\ \text{arco a tratti}}}{=} L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} + L_{\Gamma^2_{\overleftarrow{AB}}} \\ &\underset{\substack{\text{dipendenza di } L \\ \text{dall'orientamento}}}{=} L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} - L_{\Gamma^2_{\overrightarrow{AB}}} \underset{\text{ipotesi } (ii)}{=} 0\,. \end{aligned}$$



$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)}$ Siano $\Gamma^1_{AB}, \Gamma^2_{AB} \subset \Omega$ e supponiamo che $\Gamma^1_{AB} \cap \Gamma^2_{AB} = \{A, B\}$. Considerando l'arco regolare a tratti $\Gamma = \Gamma^1_{AB} \cup \Gamma^2_{AB}$ ed orientando compatibilmente Γ^1_{AB} e Γ^2_{AB}, si ha

$$\begin{aligned} 0 \underset{\text{ipotesi } (iii)}{=} L_\Gamma &\underset{\substack{\text{def. di } L \text{ su} \\ \text{arco a tratti}}}{=} L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} + L_{\Gamma^2_{\overleftarrow{AB}}} \\ &\underset{\substack{\text{dipendenza di } L \\ \text{dall'orientamento}}}{=} L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} - L_{\Gamma^2_{\overrightarrow{AB}}} \end{aligned}$$

e quindi $L_{\Gamma^1_{\overrightarrow{AB}}} = L_{\Gamma^2_{\overrightarrow{AB}}}$.



Se Γ^1_{AB} e Γ^2_{AB} si intersecano anche in punti diversi da A e B, la dimostrazione è più complicata e la omettiamo.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Fissato $P_0 \in \Omega$, definiamo la seguente funzione:

$$\forall P \in \Omega, \quad U(P) := \int_{\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}} \mathbf{F} \cdot dP \tag{1.1}$$

dove $\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}$ è un *qualsiasi* arco regolare a tratti di estremi P_0 e P (che esiste perché Ω è aperto connesso).

L'ipotesi (ii) assicura che il valore $U(P)$ dipende in effetti solo da P e non da $\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}$ (dipende anche da P_0 ed $\mathbf{F}$, ma sono fissi).

Si può dimostrare che $\nabla U = \mathbf{F}$ in tutto Ω e pertanto U è un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω (quello tale che $U(P_0) = 0$). ■

Stabilire la conservatività di un campo tramite le condizioni del teorema di equivalenza non è pratico, perché esse richiedono infinite verifiche (il calcolo di L su tutti gli archi aperti o chiusi). Vedremo fra poco una condizione sufficiente più comoda, che rovescerà la seguente condizione necessaria mediante l'aggiunta di un'ipotesi di tipo topologico sul dominio Ω.

Proposizione 5 (condizione necessaria di conservatività) *Se* $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, *allora*[2]

$$\boxed{\mathbf{F} \textit{ conservativo in } \Omega \implies \mathbf{F} \textit{ irrotazionale in } \Omega} \quad (\textit{cioè } \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0 \textit{ in ogni punto di } \Omega).$$

Dimostrazione. Se $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ è conservativo, allora $\mathbf{F} = \nabla U$ con $U \in C^2(\Omega)$ e quindi, ragionando ad esempio nel caso $n = 2$, risulta

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \operatorname{rot} \nabla U = \operatorname{rot}(U_x, U_y) = \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0$$

per il teorema di Schwarz sull'indipendenza delle derivate miste dall'ordine di derivazione. ■

[2] Si veda l'apposito pdf per definizioni e proprietà del *rotore* e di altri operatori differenziali.

L'implicazione equivale a $\boxed{\mathbf{F}\ \textit{non}\ \text{irrotazionale in } \Omega \ \Rightarrow\ \mathbf{F}\ \textit{non}\ \text{conservativo in } \Omega}$
e non può essere rovesciata in generale: la condizione è *solo necessaria* ed infatti ***esistono campi irrotazionali non conservativi***.
Ad esempio

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right), \qquad \forall (x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{1.2}$$

soddisfa $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ e $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$ in Ω, ma risulta $L_\Gamma(\mathbf{F}) = 2\pi \neq 0$ per $\Gamma : x^2+y^2 = 1$ con verso antiorario.

Per avere una condizione sufficiente occorre aggiungere un'ipotesi topologica su Ω: la *semplice connessione*[3].

Teorema 6 (Lemma di Poincaré) *Se* $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, *allora*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\mathbf{F}\ \textit{irrotazionale in } \Omega \textit{ e} \\ \Omega \textit{ semplicemente connesso}\end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{F}\ \textit{conservativo in } \Omega.}$$

Dunque: *un campo irrotazionale di classe C^1 è conservativo su ogni aperto semplicemente connesso contenuto nel proprio dominio.*

Ad esempio, il campo (1.2) non è conservativo su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ma lo è su ogni aperto semplicemente connesso contenuto in Ω. ($\rightarrow$ specificare sempre l'aperto!)

Non si cada però nell'errore di pensare che il campo (1.2) non sia conservativo su Ω *per il fatto che* Ω non è semplicemente connesso: l'implicazione del lemma di Poincaré non può essere rovesciata in generale (le ipotesi sono *solo sufficienti*) ed infatti ***esistono campi conservativi su aperti non semplicemente connessi***.

[3] Per comodità, la nozione di *aperto semplicemente connesso* è discussa a parte, nell'ultima sezione.

Due esempi:

• il campo

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right), \qquad \forall (x,y) \in \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

soddisfa $\mathbf{F}(x,y) = \nabla \left[\log\left(x^2+y^2\right)\right]$ in tutto Ω, ma Ω non è semplicemente connesso.

• se $\mathbf{F}$ è conservativo in Ω allora $\mathbf{F}$ è conservativo anche su ogni aperto connesso $\Omega' \subset \Omega$, quindi basta prendere un $\Omega' \subset \Omega$ non semplicemente connesso.

Dimostrazione (per $n = 2$). Proviamo che vale la caratterizzazione (iii).

Sia $\Gamma \subset \Omega$ chiuso e sia A l'interno di Γ (nel senso del teorema di Jordan). Allora

• A è un dominio di Green;

• Ω semplicemente connesso $\Rightarrow \overline{A} = A \cup \Gamma \subset \Omega$, per cui $\mathbf{F} \in C^1\left(\overline{A}\right)$ (perché $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$).

Si può dunque applicare il teorema di Green e, orientando Γ positivamente, si ottiene

$$L_\Gamma(\mathbf{F}) = \int_{\mathrm{A}} \operatorname{rot} \mathbf{F}\, dxdy = 0 \qquad (\text{perché } \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0).$$

■

Per $n = 3$, la dimostrazione è più complicata e la omettiamo.

Per $n \geq 4$, il lemma *non vale* (mentre il resto della teoria si può ripetere).

3 Calcolo di potenziali

Supponiamo che $\mathbf{F}$ sia conservativo in Ω e vediamo due metodi per calcolarne i potenziali.

Metodo dell'integrazione lungo cammini comodi.

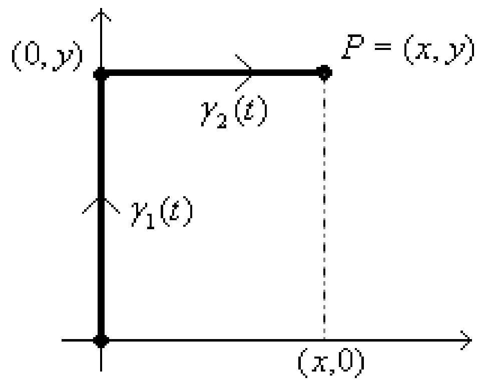
In accordo con la dimostrazione del teorema di equivalenza (cenno di $(ii) \Rightarrow (i)$), un potenziale di $\mathbf{F}$ (quello che si annulla in P_0) è dato dalla funzione (1.1). Allora, in accordo con il corollario di caratterizzazione dei potenziali di uno stesso campo, *la famiglia dei potenziali di* $\mathbf{F}$ *è data da*

$$\forall P \in \Omega, \quad U(P) = \int_{\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}} \mathbf{F} \cdot dP + c$$

dove c è una costante reale arbitraria, P_0 è un punto fissato qualsiasi di Ω e $\Gamma_{\overrightarrow{P_0 P}}$ è un ***qualsiasi*** *arco regolare a tratti di estremi iniziale e finale P_0 e P* (essendo qualsiasi, tale arco può via via essere scelto in modo che l'integrale sia facilmente calcolabile).

Esempio. Il campo $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 + 2y - 3x^2, 2x(y+1))$ è conservativo su $\operatorname{dom}\mathbf{F} = \mathbb{R}^2$, in quanto $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 2(y+1) - (2y+2) = 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Preso $O = (0,0)$ come punto base fissato, un arco regolare a tratti di estremi iniziale O e finale $P = (x,y)$ generico è ad esempio la spezzata in figura, dove $\gamma_1(t) = (0,t)$, $t \in [0,y]$ e $\gamma_2(t) = (t,y)$, $t \in [0,x]$.



Allora i potenziali di $\mathbf{F}$ sono

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_{\Gamma_{\overrightarrow{OP}}} \mathbf{F} \cdot dP + c = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot dP + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot dP + c \\ &= \int_0^y \mathbf{F}(0,t) \cdot (0,1)\, dt + \int_0^x \mathbf{F}(t,y) \cdot (1,0)\, dt + c \\ &= 0 + \int_0^x \left(y^2 + 2y - 3t^2\right) dt + c = y^2 x + 2yx - x^3 + c. \end{aligned}$$

Metodo delle integrazioni indefinite (per $n = 2$).

Poiché (essendo $\mathbf{F}$ conservativo in Ω) esiste $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \quad \text{per ogni } (x,y) \in \Omega,$$

e poiché $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$ sono sostanzialmente derivate di funzioni di una sola variabile (ottenute fissandone una e derivando rispetto all'altra), si può procedere così:

- *integrando in senso indefinito, si ricostruisce U a partire da una delle sue derivate* (F_1, F_2 sono note); ad esempio

  $$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\,dx = \int F_1(x,y)\,dx = \varphi_1(x,y) + k(y)$$

  dove $\varphi_1(x,y)$ è il risultato dell'integrazione (cioè una primitiva di $F_1(x,y)$ vista come funzione della sola x) e $k = k(y)$ è la costante arbitraria dell'integrazione fatta rispetto ad x, la quale dipenderà però da y, che è fissato solo momentaneamente;

- *si determina $k(y)$ imponendo che anche l'altra derivata della funzione U trovata sia uguale alla corrispondente componente del campo* $\mathbf{F}$; ad esempio

  $$F_2(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) + k'(y) \;\Rightarrow\; k'(y) = F_2(x,y) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y)$$

  (dove il 2^o membro è noto e, se i conti sono corretti, non dipende da x) e quindi

  $$k(y) = \int \left(F_2(x,y) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y)\right) dy = \varphi_2(x,y) + c;$$

- in definitiva

  $$U(x,y) = \varphi_1(x,y) + \varphi_2(x,y) + c$$

  con $(x,y) \in \Omega$ e c costante reale arbitraria.

Esempio. Riprendiamo il campo conservativo dell'esempio precedente e sia $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = y^2 + 2y - 3x^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = 2x(y+1).$$

Si ha

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x}(x,y)\,dx = \int \left(y^2 + 2y - 3x^2\right) dx = y^2 x + 2yx - x^3 + k(y)$$

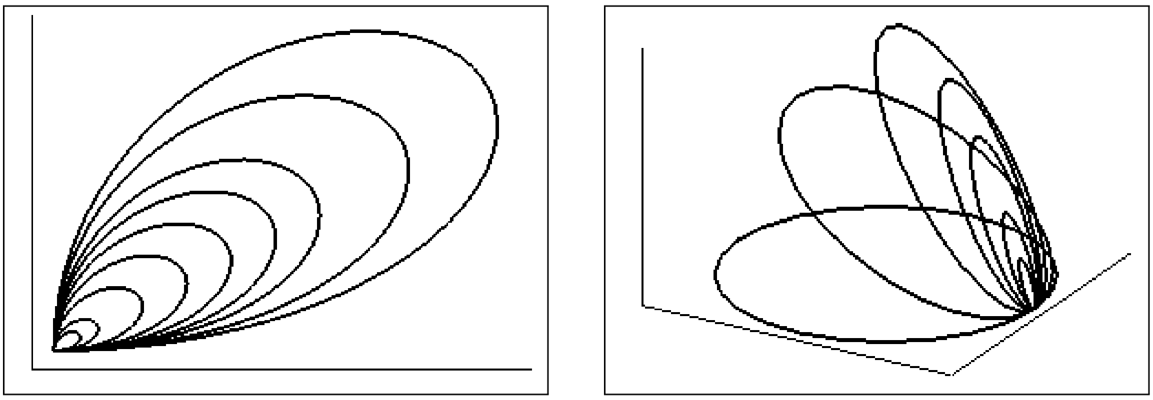
e quindi

$$F_2(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) \;\Leftrightarrow\; 2x(y+1) = 2yx + 2x + k'(y)$$

cioè $k'(y) = 2x(y+1) - 2yx - 2x = 0$. Allora $k(y) = c$ (costante reale arbitraria) e dunque $U(x,y) = y^2 x + 2yx - x^3 + c$.

4 Aperti semplicemente connessi

Definizione 7 *Un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$ si dice* ***semplicemente connesso*** *se*
(i) è connesso;
(ii) ogni arco semplice chiuso interamente contenuto in Ω è omotopo *ad un suo punto*[4], cioè, in termini intuitivi, *può essere deformato con continuità fino a ridurlo ad un suo punto, senza mai aprirlo e senza mai uscire dall'insieme Ω.*



Deformazioni continue di archi chiusi ad un loro punto, passanti per archi intermedi chiusi e "vicini tra loro" (continuità della deformazione).

[4]in termini rigorosi, ciò significa che: *se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una parametrizzazione semplice dell'arco e $P_0 = \gamma(a) = \gamma(b)$, allora esiste una funzione continua $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ tale che per ogni $(t,s) \in [a,b] \times [0,1]$ risulta $H(t,s) \in \Omega$, $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = P_0$, $H(a,s) = H(b,s) = P_0$*

Si può pensare[5] alla deformazione come al movimento di un elastico che si richiude su un suo punto, tenuto fisso; si chiede allora che ciò possa avvenire senza che l'elastico debba mai uscire dall'insieme Ω, né rompersi, e che il tutto possa farsi per ogni arco chiuso contenuto in Ω.

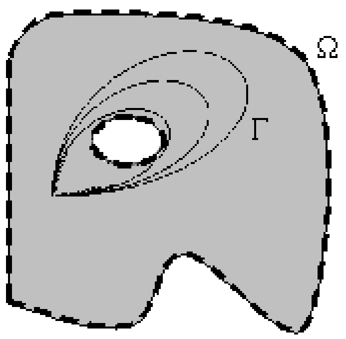
Una classe (non esaustiva) di aperti semplicemente connessi è data dalla seguente:

Proposizione 8 *Tutti gli aperti **convessi** (e, più in generale, quelli **stellati**) di $\mathbb{R}^n$ sono semplicemente connessi.*

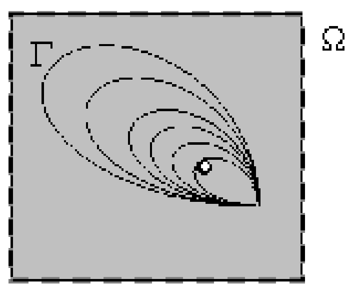
[5] anche se in $\mathbb{R}^3$ si dovrebbe immaginare che l'elastico possa avere "nodi"

Nel piano

In sintesi: *un aperto **del piano** è semplicemente connesso se è "fatto di un solo pezzo"* (connesso) *e "non ha buchi"*.



non semplicemente connesso



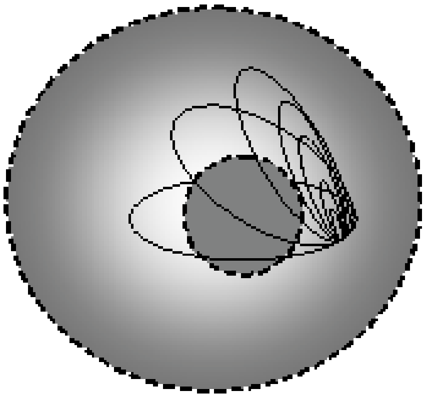
non semplicemente connesso

Osserviamo che i buchi non devono necessariamente avere area non nulla: *un qualsiasi aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ (anche $\mathbb{R}^2$ stesso) privato di un suo punto* (resta connesso ma) *non è semplicemente connesso.*

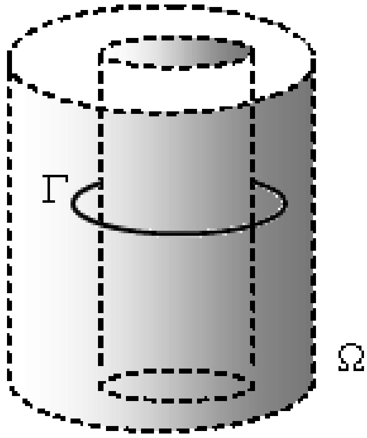
Si può anche dimostrare che: *un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso se e solo se*
(i) *è connesso;*
(ii) *per ogni arco regolare a tratti chiuso Γ contenuto in Ω, il suo interno* (nel senso del teorema di Jordan) *è interamente contenuto in Ω.*

Nello spazio

Nello spazio, la semplice connessione *non traduce più l'idea dell'assenza di buchi* (v. prima figura).



semplicemente connesso



non semplicemente connesso

In particolare, non è più vero che un aperto privato di un punto non è semplicemente connesso, mentre risulta che *un qualsiasi aperto connesso di* $\mathbb{R}^3$ *(anche* $\mathbb{R}^3$ *stesso) privato dei punti di una retta che lo intersechi* (resta connesso ma) *non è semplicemente connesso.*