ANALISI MATEMATICA I - A.A. 2013/2014

NUMERI COMPLESSI / ESERCIZI PROPOSTI

1. Scrivere in forma algebrica il numero complesso
$$z = \frac{(1+i)^2}{3-4i} + \left|\overline{(4+i)\,i}\right| \frac{1}{i}.$$
.... $\left[z = -\frac{8}{25} + \left(\frac{6}{25} - \sqrt{17}\right) i\right]$

2. Scrivere in forma trigonometrica ed in forma esponenziale i seguenti numeri complessi:
   a) $z = -1$. .... $\left[z = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}\right]$
   b) $z = 2i$. .... $\left[z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}i}\right]$
   c) $z = 1 - i$. .... $\left[z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right]$
   d) $z = i - \sqrt{3}$. .... $\left[z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}\right]$
   e) $z = 2 + 2i\sqrt{3}$. .... $\left[z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4e^{\frac{\pi}{3}i}\right]$
   f) $z = -1 - \dfrac{i}{\sqrt{3}}$. .... $\left[z = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{\frac{7\pi}{6}i}\right]$

3. Scrivere in forma esponenziale ed in forma algebrica i seguenti numeri complessi:
   a) $z = (1+i)^{10}$. .... $\left[z = 2^5 e^{\frac{\pi}{2}i} = 32i\right]$
   b) $z = i\,(1+i)$. .... $\left[z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -1+i\right]$
   c) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$. .... $\left[z = e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i\right]$
   d) $z = i\dfrac{i-1}{(i+1)^2}$. .... $\left[z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right]$
   e) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$. .... $\left[z = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}i} = \sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12} + i\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{12}\right]$
   f) $z = \dfrac{3}{\left(-1+\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^4}$. .... $\left[z = \frac{27}{16}e^{-\frac{10\pi}{3}i} = -\frac{27}{32} + i\frac{27}{32}\sqrt{3}\right]$

4. Scrivere in forma algebrica i numeri complessi z^4, z^7 e z^{18}, dove $z = \dfrac{1}{(1-i)^2} - i$.
.... $\left[z^4 = \frac{1}{16}e^{-2\pi i} = \frac{1}{16},\ z^7 = \frac{1}{2^7}e^{-\frac{7\pi}{2}i} = \frac{1}{128}i,\ z^{18} = \frac{1}{2^{18}}e^{-9\pi i} = -\frac{1}{2^{18}}\right]$

5. Calcolare le radici n-esime complesse dei seguenti numeri complessi e disegnarle sul piano di Gauss:
   a) $w = 2i, \quad n = 2$. .... $\left[\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}\right]$
   b) $w = \sqrt{5}, \quad n = 3$. .... $\left[\sqrt[6]{5},\ \sqrt[6]{5}e^{\frac{2\pi}{3}i},\ \sqrt[6]{5}e^{\frac{4\pi}{3}i}\right]$
   c) $w = -1, \quad n = 3$. .... $\left[e^{\frac{\pi}{3}i},\ -1,\ e^{\frac{5\pi}{3}i}\right]$
   d) $w = -1 + \sqrt{3}i, \quad n = 4$. .... $\left[\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{6}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{7\pi}{6}i},\ \sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{3}i}\right]$
   e) $w = -8, \quad n = 6$. .... $\left[\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i},\ \sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}\right]$

6. Risolvere in campo complesso le seguenti equazioni algebriche e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss:
   a) $z^2 + z + 1 = 0$. . . . . $\left[\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right]$
   b) $z^2 + i\sqrt{3}z + 6 = 0$. . . . . $\left[i\sqrt{3},\ -2i\sqrt{3}\right]$
   c) $z^3 + 8 - 8i = 0$. . . . . $\left[2\sqrt[6]{2}e^{\frac{\pi}{4}i},\ 2\sqrt[6]{2}e^{\frac{11\pi}{12}i},\ 2\sqrt[6]{2}e^{\frac{19\pi}{12}i}\right]$
   d) $(z+1)^3 = \dfrac{1-i}{1+i}$. . . . . $\left[e^{-\frac{\pi}{6}i} - 1,\ i - 1,\ e^{\frac{7\pi}{6}i} - 1\right]$
   e) $z^6 + z^3 + 1 = 0$. . . . . $\left[e^{\pm\frac{2\pi}{9}i},\ e^{\pm\frac{8\pi}{9}i},\ e^{\pm\frac{14\pi}{9}i}\right]$
   f) $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$. . . . . $\left[\pm\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{12}i},\ \pm\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}i}\right]$
7. Risolvere in campo complesso le seguenti equazioni non algebriche e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss:
   a) $|z|^2 + 5z + 10i = 0$. . . . . [2 soluzioni: $-4 - 2i,\ -1 - 2i$]
   b) $z + i\,\overline{z}^{\,2} = -2i$. . . . . [2 soluzioni: $-i,\ 2i$]
   c) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -1$. . . . . [infinite soluzioni: tutti i punti della circonferenza $\left|z - \frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$]
   d) $z^3 = 2\,\overline{z}$. . . . . [5 soluzioni: $0,\ \pm\sqrt{2},\ \pm i\sqrt{2}$]
   e) $\overline{z}^{\,4} = |z|$. . . . . [4 soluzioni: $\pm 1,\ \pm i$]
8. Rappresentare sul piano di Gauss le soluzioni delle seguenti disequazioni complesse:
   a) $|z - 2 + i| \leq 2$. . . . . [cerchio di centro $2 - i$ e raggio 2]
   b) $(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z) < 0$. . . . . [II e IV quadrante, assi esclusi]
   c) $\operatorname{Im}\left(i^{379}e^{iz}\right) > 0$. . . . . [infinite strisce verticali: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \operatorname{Re} z < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$]
9. Risolvere in campo complesso i seguenti sistemi e rappresentarne le soluzioni sul piano di Gauss:
   a) $\begin{cases} |z| = \frac{1}{2} \\ \operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) = 0 \end{cases}$ . . . . [2 punti: $\pm\frac{1}{2}i$]
   b) $\begin{cases} z^4 - z^2 + 1 = 0 \\ \operatorname{Re} z \geq 0 \end{cases}$ . . . . [2 punti: $\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$]
10. Si sa che il numero complesso z ha modulo uguale a 2 e argomento uguale a $\frac{\pi}{8}$. Si calcolino modulo e argomento principale di $w = \left(\frac{\overline{1+i}}{z}\right)^5$. . . . . $\left[|w| = \frac{\sqrt{2}}{8},\ \operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{8}\right]$
11. Dato il polinomio $P(z) = z^3 - iz^2 + 3iz + 3$, verificare che $z = i$ è una sua radice e fattorizzarlo in $\mathbb{C}$. . . . . $\left[P(z) = (z - i)\left(z - \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - i)\right)\left(z + \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - i)\right)\right]$
12. Trovare il polinomio a coefficienti reali di grado minimo che abbia uno zero doppio in $z = 1$ e uno zero semplice in $z = 2 + i$ e che valga 10 per $z = 0$. . . . . $\left[P(z) = 2(z - 1)^2\left(z^2 - 4z + 5\right)\right]$
13. Si consideri il polinomio complesso $P(z) = z^4 + (4 + i)z^2 + \alpha$. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ il numero complesso $w = 2i$ è radice di $P(z)$ e per tali valori di α determinare tutte le soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$, scrivendole in forma algebrica. . . . $\left[\alpha = 4i;\ \text{soluzioni: } \pm 2i,\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)\right]$