Punti di estremo e Teorema di Fermat

Nello studio di una funzione, le derivate sono (tra le altre cose) uno strumento utile per la determinazione di *intervalli di monotonia* e *punti di estremo*.

Definizione. *Siano* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \operatorname{dom} f$.

1) *Diciamo che* x_0 *è un* ***punto di massimo assoluto per*** f *se*

$$f(x_0) = \max f \qquad (:= \max \operatorname{im} f)$$

cioè se

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

In tal caso, diciamo anche che $f(x_0) = \max f$ *è* ***il massimo assoluto di*** f.

2) *Diciamo che* x_0 *è un* ***punto di massimo relativo per*** f *se*

$$\exists I(x_0), \quad f(x_0) = \max_{x \in I(x_0) \cap \operatorname{dom} f} f(x)$$

cioè se

$$\exists I(x_0), \quad \forall x \in I(x_0) \cap \operatorname{dom} f, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

In tal caso, diciamo che $f(x_0)$ *è* ***un massimo relativo di*** f.

3) *Analogamente si definiscono* ***minimi e punti di minimo, assoluti e relativi***.

4) *Massimi e minimi sono anche detti* ***estremi****, mentre i punti di massimo o minimo sono anche detti* ***punti di estremo*** *o* ***estremanti***.
Estremi ed estremanti relativi/assoluti sono anche detti ***locali/globali***.

5) *Estremi ed estremanti si dicono* ***stretti*** *se le disuguaglianze che li definiscono sono strette per* $x \neq x_0$.

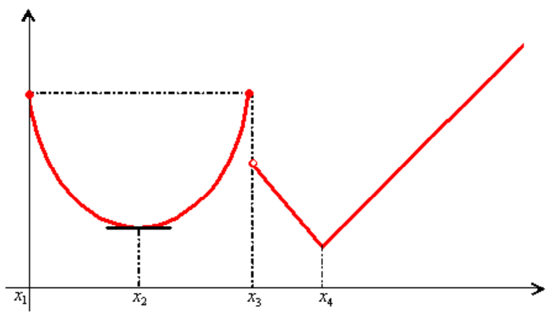
Nota. Gli stessi concetti si possono riferire ad un sottoinsieme $A \subseteq \mathrm{dom}\, f$, considerando la restrizione $f_{|A}$ in luogo di f; si parlerà allora di estremi ed estremanti di f **su** A.

Chiaramente:

• *estremi e punti di estremo assoluti, se esistono, sono anche relativi*;

• *gli estremi assoluti, se esistono, sono unici*; i punti di estremo assoluto, invece, possono non esserlo.

Esempio. La funzione in figura presenta (su $A = [0, +\infty)$):



• nessun punto di max assoluto;

• due punti di max relativo stretto x_1 e x_3:

$$f(x_1) = \max_{x \in I(x_1) \cap A} f(x), \; f(x_3) = \max_{x \in I(x_1)} f(x),$$

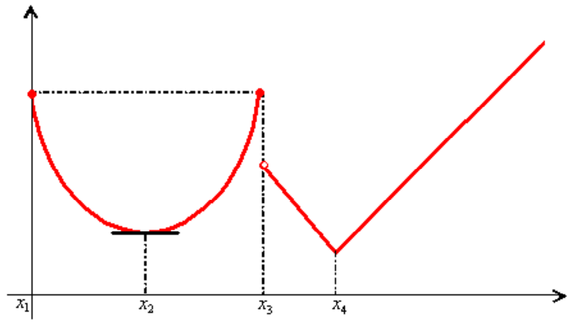
a cui corrisponde lo stesso max relativo $f(x_1) = f(x_3)$;

• due punti di min relativo stretto x_2 e x_4:

$$f(x_2) = \min_{x \in I(x_2)} f(x), \quad f(x_4) = \min_{x \in I(x_4)} f(x)$$

di cui x_4 è anche assoluto.

È possibile che un punto di estremo per una f su un intervallo I sia un estremo di I, oppure un punto di non derivabilità di f (persino di discontinuità).
Se però f è definita in un intorno completo di x_0 e x_0 è punto di estremo in cui G_f ha retta tangente, allora tale tangente deve essere orizzontale. Vale infatti il seguente



Teorema (di Fermat). *Siano* $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in \operatorname{dom} f$. *Se*

i) f *è definita in un intorno completo di* x_0 *ed è derivabile in* x_0

ii) x_0 *è punto di estremo per* f

allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Per fissare le idee, supponiamo x_0 punto di minimo.

Allora $\exists I(x_0)$ tale che $I(x_0) \subseteq \operatorname{dom} f$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in I(x_0)$ $(= I(x_0) \cap \operatorname{dom} f)$.

Di conseguenza, per ogni $x \in I(x_0)$, si ha

$$x < x_0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{e} \qquad x > x_0 \;\Rightarrow\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e quindi (per il corollario del teorema di permanenza del segno) risulta

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \qquad \text{e} \qquad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Dunque si ottiene

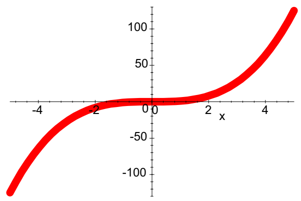
$$0 \geq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \geq 0,$$

per cui deve essere $f'(x_0) = 0$. ■

Un punto x_0 in cui una funzione f sia derivabile e si abbia $f'(x_0) = 0$ si dice **punto critico** (o **stazionario**) **per** f.

Il teorema di Fermat afferma dunque che: *se f è definita in un intorno completo di un suo punto di estremo x_0 ed è derivabile in x_0, allora x_0 deve essere punto critico per f.*

Non vale invece il viceversa: un punto critico può non essere punto di estremo.



Ad esempio $x_0 = 0$ non è punto di massimo né di minimo per la funzione $f(x) = x^3$, nonostante si abbia $f'(0) = 0$.

Disporremo più avanti di tecniche per stabilire se un punto critico sia punto di estremo o meno.

Nello studio dei punti di estremo (relativo o assoluto) di una funzione f su un intervallo I, è utile tener presente che essi sono da ricercarsi tra i punti delle tre classi individuate dal seguente:

Corollario (ricerca di punti di estremo). *Se x_0 è punto di estremo per una funzione f su un intervallo I, allora vale una ed una sola delle seguenti alternative:*

- *x_0 è un estremo dell'intervallo I*
- *x_0 è interno all'intervallo I ed f non è derivabile in x_0*
- *x_0 è interno all'intervallo I ed è punto critico per f.*

Osserviamo che ciascuna delle tre classi (estremi di I, punti di non derivabilità di f, punti critici *interni ad* I) può contenere punti che non sono estremanti.

Esempio. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x) = |x| + \cos x$ sull'intervallo $I = \left[-\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

• f è derivabile ovunque, eccetto nel punto $x_0 = 0$ (altrimenti $|x| = f(x) - \cos x$ sarebbe derivabile in x_0 per differenza, mentre non lo è).

• $\forall x \neq 0$ si ha $f'(x) = \operatorname{sign} x - \sin x$ e quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \operatorname{sign} x$, cioè

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in (0, \pi] \end{cases} \vee \begin{cases} \sin x = -1 \\ x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right). \end{cases}$$

Il secondo sistema è impossibile. Il primo fornisce il punto $x_1 = \frac{\pi}{2}$, unico punto critico di f in I.

• $\max_I f$ e $\min_I f$ esistono per il teorema di Weierstrass e i punti in cui sono assunti sono necessariamente tra i punti $a = -\frac{\pi}{3}$, $b = \pi$ (estremi di I), $x_0 = 0$ (punto di non derivabilità), $x_1 = \frac{\pi}{2}$ (punto critico interno ad I).

• Si ha $f(a) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cong 1.5$, $f(b) = \pi - 1 \cong 2.14$, $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = \frac{\pi}{2} \cong 1.57$ e quindi risulta

$$\max_I f = f(\pi) = \pi - 1 \quad \text{e} \quad \min_I f = f(0) = 1.$$