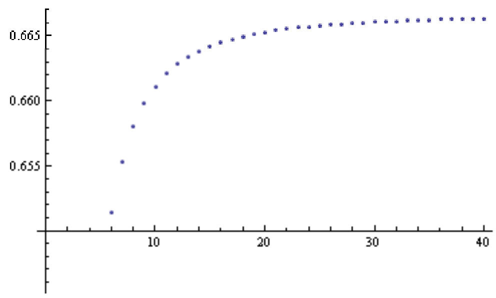
Limiti di successioni

Ricordiamo che si chiama **successione** (numerica) una qualsiasi funzione $a : n \in \mathbb{N} \mapsto a(n) \in \mathbb{R}$. Per evidenziare il fatto che i valori assunti dalla funzione a si possono *numerare* (cioè *contare*), si preferisce la notazione a_n in luogo di $a(n)$ e la successione stessa viene comunemente indicata con

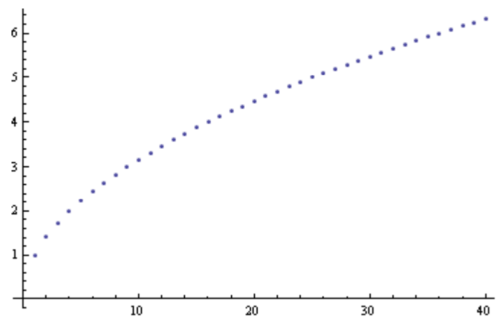
$$(a_n)_{n\geq 0} \qquad \text{oppure} \qquad a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots \; .$$

Si dice che $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sono i **termini** della successione e che a_n ne è il **termine generale**. È anche ammesso che il dominio di a non sia tutto $\mathbb{N}$, ma un insieme del tipo $\operatorname{dom} a = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per qualche $n_0 \in \mathbb{N}$. In tal caso, la successione sarà indicata con $(a_n)_{n\geq n_0}$ oppure $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$.

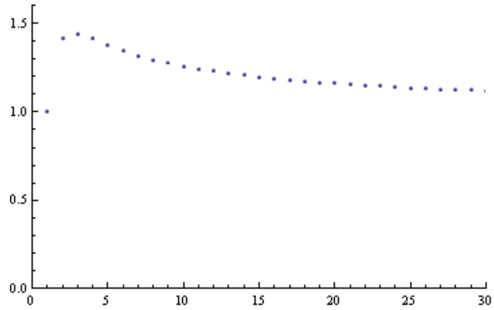
In figura sono riportati i grafici di alcune successioni.



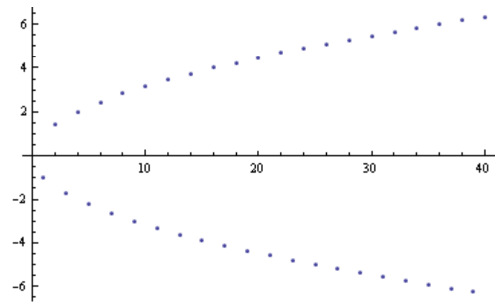
$$a_n = \frac{2n^2-1}{3n^2+1}$$



$$a_n = \sqrt{n}$$



$$a_n = \sqrt[n]{n}$$



$$a_n = (-1)^n \sqrt{n}$$

Osserviamo che una successione $(a_n)_{n\geq n_0}$ è spesso definita tramite un'espressione $a_n = a(n)$ che può essere valutata anche su numeri reali qualsiasi, cioè tale che $a(x)$ esiste per ogni $x \in [n_0, +\infty)$. In tal caso, a_n può essere vista come restrizione ad $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ della funzione a definita su tutto l'intervallo $[n_0, +\infty)$ (v. prime tre figure). Tuttavia, va anche notato che ciò non è sempre possibile, in quanto esistono operazioni che sono lecite sui naturali e non lo sono, invece, sui reali qualsiasi; ad esempio

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, 2, 4, \ldots \text{ (pari)} \\ -1 & \text{se } n = 1, 3, 5, \ldots \text{ (dispari)} \end{cases}$$

e

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n(n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

non hanno significato se n è una variabile reale qualsiasi.

1. **Limite di una successione**

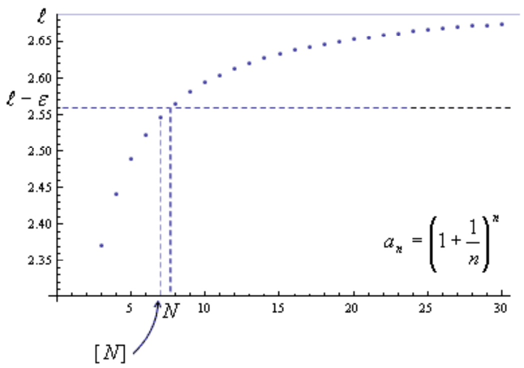
Nel definire la nozione di limite di una funzione $f(x)$ per $x \to +\infty$, si è richiesto che la funzione sia definita almeno in un intorno di $+\infty$, per poterla valutare in valori di x arbitrariamente grandi. Tuttavia, affinché ciò sia possibile, non è in effetti necessario che il dominio della funzione contenga tutto un intorno di $+\infty$, bensì basta che tale dominio sia *superiormente illimitato* (in modo che, non avendo maggioranti, conterrà valori di x arbitrariamente grandi). Questa semplice osservazione consente di definire la nozione di limite a $+\infty$ anche per funzioni qualsiasi che abbiano dominio superiormente illimitato, riformulandola in termini identici a quelli già visti:

$$(1.1) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall I(\ell),\ \exists N > 0,\ \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x > N \Rightarrow f(x) \in I(\ell).$$

(lo stesso si potrebbe ovviamente fare a $-\infty$, chiedendo l'illimitatezza inferiore del dominio).

Tale definizione estesa di limite a $+\infty$ comprende anche il caso delle successioni $(a_n)_{n\geq n_0}$, in quanto funzioni $a : \operatorname{dom} a \subset \mathbb{R} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$ con dominio $\operatorname{dom} a = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ superiormente illimitato. La definizione (1.1) diventa:

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall I(\ell),\ \exists N > 0,\ \forall n \geq n_0,\ n > N \Rightarrow a_n \in I(\ell)$$



dove

• si usa omettere il segno + davanti a $+\infty$, in quanto non ci sono valori diversi da $+\infty$ a cui ha senso far tendere n.

• ℓ può come al solito essere un numero reale (eventualmente ℓ^+ o ℓ^-, come in figura), oppure $\pm\infty$.

Poiché si richiede solo l'esistenza di *almeno un* N tale che la condizione "$\forall n \geq n_0,\ n > N \Rightarrow a_n \in I(\ell)$" sia verificata, non è restrittivo supporre che:

- $N > n_0$ (se la condizione vale con N allora vale anche con ogni $N' > N$ al posto di N),
- $N \in \mathbb{N}$ (se la condizione vale con $N \notin \mathbb{N}$ allora vale anche con $N' = [N]$ al posto di N).

Dunque la (1.2) può essere riscritta più semplicemente come

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall I(\ell),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ a_n \in I(\ell),$$

che è la formulazione di definizione di limite a cui di solito si fa riferimento per le successioni.

Vediamone in dettaglio i vari casi, usando la seguente, efficace terminologia:

> *si dice che un predicato $p(n)$ dipendente da una variabile $n \in \mathbb{N}$ vale* ***definitivamente*** *se esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $p(n)$ vale per ogni $n > N$*

(ad esempio, la proposizione $2^n > 100$ è vera definitivamente, perché equivale a $n > \log_2 100 \simeq 6.6439$ ed è quindi vera per tutti gli n maggiori di $N = [\log_2 100] = 6$). Con tale terminologia, una successione $(a_n)_{n\geq n_0}$ è:

- ***convergente*** *ad* $\ell \in \mathbb{R}$ *(* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$*) se per ogni* $\varepsilon > 0$ *risulta*
$$|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \textit{definitivamente} \qquad (\text{ossia } \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ |a_n - \ell| < \varepsilon);$$
- ***divergente*** a $+\infty$ *(* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*) se per ogni* $M > 0$ *risulta*
$$a_n > M \quad \textit{definitivamente} \qquad (\text{ossia } \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ a_n > M);$$
- ***divergente*** a $-\infty$ *(* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$*) se per ogni* $M > 0$ *risulta*
$$a_n < -M \quad \textit{definitivamente} \qquad (\text{ossia } \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N,\ a_n < -M);$$
- ***regolare*** *se è convergente o divergente;*
- ***irregolare*** *(o* **oscillante** *o* **indeterminata***) se non è regolare.*

I principi di equivalenza ed eliminazione che fanno intervenire i simboli di Landau e gli usuali teoremi sui limiti valgono anche per le successioni, con poche modifiche; si rimanda alle Sezioni 4 e 5 per un breve compendio di tali risultati.

Per il momento, osserviamo solo che, per il carattere locale del limite, *se due successioni coincidono definitivamente allora una è regolare se e solo se lo è l'altra e, in tal caso, le due successioni hanno lo stesso limite*. Di conseguenza, il *carattere* di una successione (cioè il suo essere convergente, divergente o irregolare) ed il valore del suo limite, se esiste, non cambiano alterando un numero finito dei suoi termini. Per questo motivo, l'indice iniziale n_0 non è quasi mai rilevante e si usa spesso la notazione alleggerita (a_n) in luogo di $(a_n)_{n\geq n_0}$.

2. **Successioni monotone**

Poiché una successione è una funzione a valori in $\mathbb{R}$ con dominio in $\mathbb{R}$, la ben nota definizione di monotonia si applica ovviamente anche alle successioni; ad esempio, (a_n) è monotona crescente se per ogni n, m si ha $n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$. Tuttavia, nel caso delle successioni, la monotonia può essere equivalentemente riformulata in modo più semplice, in accordo con il risultato seguente.

Proposizione 2.1. *(a_n) è monotona crescente (decrescente) se e solo se per ogni n si ha $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$.*

In altri termini, per controllare la monotonia di una successione, è sufficiente confrontarne il generico termine con il successivo.

Esempio 2.2. Si voglia verificare che $a_n = \dfrac{n!}{n+1}$, $n \geq 0$, è definitivamente strettamente crescente. La condizione $a_n < a_{n+1}$ significa

$$\frac{n!}{n+1} < \frac{(n+1)!}{n+2}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\cancel{n}!}{n+1} < \frac{(n+1)\ \cancel{n}!}{n+2}, \quad \text{cioè} \quad n+2 < (n+1)^2\,, \quad \text{cioè} \quad n^2+n > 1,$$

dove l'ultima condizione è falsa per $n = 0$, ma è vera per ogni $n \geq 1$. Dunque risulta $a_n < a_{n+1}$ definitivamente. ∎

Anche per le successioni la monotonia garantisce l'esistenza del limite ed è dunque una condizione sufficiente di regolarità. Vale infatti il seguente:

Teorema 2.3. *Se $(a_n)_{n\geq n_0}$ è monotona, allora è regolare e si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_{n\geq n_0} a_n & \text{se } a_n \text{ è crescente} \\ \inf\limits_{n\geq n_0} a_n & \text{se } a_n \text{ è decrescente} \end{cases}.$$

Osserviamo esplicitamente che, grazie al carattere locale del limite, per garantire la regolarità di $(a_n)_{n\geq n_0}$ è sufficiente che $(a_n)_{n\geq n_0}$ sia monotona definitivamente.

3. **Teorema di sostituzione**

Considerando la composizione tra una successione e una funzione qualsiasi, si ottiene il seguente teorema di sostituzione, del tutto analogo al teorema di sostituzione per funzioni di variabile reale qualsiasi.

Teorema 3.1. (di sostituzione). *Sia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$ (finito o infinito) e sia f una qualsiasi funzione definita almeno in un intorno bucato di c (anche solo unilaterale se $c = x_0^{\pm}$). Supponiamo inoltre che:*

i) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *esista (finito o infinito)*

ii) *f sia continua in c (anche solo da un lato se $c = x_0^{\pm}$) oppure si abbia $a_n \neq c$ definitivamente.*

Allora il limite della successione $f(a_n)$ esiste e risulta

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to c} f(x)\,.$$

Tra gli utilizzi del teorema precendente, segnaliamo le due seguenti, importanti conseguenze.

3.1. **Criterio di non esistenza del limite.** Il teorema di sostituzione fornisce una condizione necessaria per l'esistenza del limite $\lim_{x\to c} f(x)$, in quanto implica in particolare che:

se $\lim_{x\to c} f(x)$ *esiste (finito o infinito), allora deve essere* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{x\to c} f(x)$ *per ogni successione* (a_n) *tale che* $a_n \to c$ *con* $a_n \neq c$ *definitivamente.*

Se ne deduce allora immediatamente il seguente:

Corollario 3.2. (sulla non esistenza del limite). *Se esistono due successioni* (a_n) *e* (b_n) *che tendono entrambe a c restando definitivamente* $\neq c$ *e tali che* $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$*, allora* $\lim_{x\to c} f(x)$ *non esiste.*

3.2. **Calcolo di limiti.** Il teorema di sostituzione ha ricadute utili nel calcolo di limiti di successioni, in quanto mostra che, se una successione (a_n) è definita tramite un'espressione $a_n = a(n)$ che può essere valutata in tutti gli x di un intorno di $+\infty$, allora il calcolo del limite di a_n può essere ricondotto al calcolo del limite di $a(x)$ per $x \to +\infty$. Infatti, applicando il teorema di sostituzione alla successione $c_n = n$ ed alla funzione $f(x) = a(x)$, si ottiene il seguente:

Corollario 3.3. *Se* $\lim_{x\to+\infty} a(x)$ *esiste (finito o infinito), allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} a(x). \tag{3.1}$$

Esempio 3.4. Per ogni $n \geq 3$ sia $a_n = \frac{2n^2+n-3}{3n^2-12}$, dove $a(x) = \frac{2x^2+x-3}{3x^2-12}$ ha senso anche per tutti gli x in un intorno di $+\infty$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-3}{3x^2-12} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{3n^2-12} = \frac{2}{3}.$$

∎

Esempio 3.5. Per ogni $n \geq 1$ sia $a_n = \sqrt[n]{n}$, cioè $a_n = n^{1/n}$. Siccome $a(x) = x^{1/x}$ ha senso anche per tutti gli x in un intorno di $+\infty$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

∎

Un vantaggio di questo approccio sta ad esempio nel fatto che per il calcolo del limite di una funzione di variabile reale qualsiasi si hanno a disposizione risultati che non valgono nel caso delle successioni, come ad esempio la regola di de L'Hopital (già implicitamente usata nell'Esempio 3.5, per stabilire che $\log x/x \to 0$ per $x \to +\infty$). Si faccia però estrema attenzione al fatto che, nel corollario precedente, la (3.1) sussiste in generale *solo se* $\lim_{x\to+\infty} a(x)$ *esiste* (finito o infinito). Infatti

se $\lim_{x\to+\infty} a(x)$ *non esiste, il limite* $\lim_{n\to\infty} a(n)$ *può esistere o no.*

Ad esempio, il limite $\lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$ non esiste, ma si ha $\sin(\pi n) = 0$ per ogni n e quindi $\lim_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$.

Un altro inconveniente del corollario precedente sta nel fatto che una successione può essere definita tramite operazioni sulla variabile naturale n che non hanno senso su una variabile reale qualsiasi x. In tali situazioni, occorre utilizzare direttamente i teoremi sui limiti (v. Sezione 4) o i principi di equivalenza ed eliminazione che fanno intervenire i simboli di Landau (v. Sezione 5).

4. Teoremi sulle successioni

In maniera del tutto analoga al caso delle funzioni di variabile reale qualsiasi, si dimostrano i seguenti risultati.

Teorema (unicità del limite). $\lim_{n\to\infty} a_n$*, se esiste, è unico.*

Teorema (carattere locale del limite). *Se* $a_n = b_n$ *definitivamente, allora* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *esiste se e solo se* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *esiste e, in tal caso,* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Teorema (di limitatezza locale). *Supponiamo* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$*. Allora* a_n *è limitata se* $\ell \in \mathbb{R}$*, inferiormente limitata se* $\ell = +\infty$*, superiormente limitata se* $\ell = -\infty$*.*

Teorema (della permanenza del segno). *Supponiamo che esista* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ *(finito o infinito).*

1) *Se* $\ell > 0$, *allora risulta* $a_n > 0$ *definitivamente. Analogamente se* $\ell < 0$.
2) *Se* $a_n \geq 0$ *definitivamente, allora risulta* $\ell \geq 0$. *Analogamente se* $a_n \leq 0$.

Teorema (algebra dei limiti). *Supponiamo* $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1$ *e* $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell_2$ *(finiti o infiniti). Allora*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = \ell_1 \ell_2, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

dove per l'ultimo limite si richiede che sia $b_n \neq 0$ *definitivamente e dove, se non definite in* $\mathbb{R}$, *le operazioni* $\ell_1 + \ell_2$, $\ell_1 \ell_2$ *ed* ℓ_1/ℓ_2 *sono da interpretarsi secondo le usuali convenzioni dell'algebra dei limiti.*

Primo teorema del confronto. *Supponiamo* $a_n \leq b_n$ *definitivamente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell_1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} b_n = \ell_2 \text{ finiti } \Rightarrow \ \ell_1 \leq \ell_2.$$

Secondo teorema del confronto (caso finito). *Supponiamo* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *definitivamente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} c_n = \ell.$$

Secondo teorema del confronto (caso infinito). *Supponiamo* $a_n \leq b_n$ *definitivamente. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Proposizione (sul limite nullo). (a_n) *è infinitesima se e solo se* $(|a_n|)$ *è infinitesima.*

Proposizione. *Se* (a_n) *è limitata e* (b_n) *è infinitesima, allora* $(a_n b_n)$ *è infinitesima.*

Esempio 4.1. Calcolare $\lim_{n\to\infty} n!$, $\lim_{n\to\infty} \log(n!)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n!)}$ e $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(-1)^n}{\log(n!)}}$.

- Poiché $n! = n\,(n-1)\cdots 2 \cdot 1$ per ogni $n \geq 1$ e ciascuno dei fattori da $n-1$ fino ad 1 è ≥ 1, risulta $n! \geq n \cdot 1 \cdots 1 = n \to +\infty$ e quindi $\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$ per confronto.
- Poiché il logaritmo è crescente, $n! \geq n$ implica $\log(n!) \geq \log n \to +\infty$ e quindi $\lim_{n\to\infty} \log(n!) = +\infty$, di nuovo per confronto.
- Infine risulta $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n!)} = 0$, in quanto
$$\frac{(-1)^n}{\log(n!)} = (-1)^n \frac{1}{\log(n!)}$$
è il prodotto di una successione limitata ($|(-1)^n| = |-1|^n = 1$ per ogni n) per una infinitesima ($\frac{1}{\log(n!)} \to \frac{1}{+\infty} = 0$ per il teorema sull'algebra dei limiti).
- Siccome $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n!)} = 0$ e l'esponenziale è continua in 0, risulta $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{(-1)^n}{\log(n!)}} = \lim_{x\to 0} e^x = 1$ per il teorema di sostituzione.

∎

5. Simboli di Landau

Richiamiamo brevemente le definizioni dei simboli di Landau e la loro applicazione al calcolo dei limiti, nel caso delle successioni.

Definizione 5.1. (di equigrandezza). *Diciamo che* (a_n) *e* (b_n) *sono* ***equigrandi*** *(*$a_n \asymp b_n$*) se il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \underline{\text{esiste}}\ \underline{\text{finito}} \text{ e } \underline{\text{non nullo}}.$$

La nozione di equigrandezza esprime sostanzialmente il fatto che a_n e b_n *si comportano nello stesso modo al limite*: due successioni equigrandi, infatti, hanno lo stesso carattere e ciascuna è infinita o infinitesima se e solo se lo è l'altra; in tal caso, inoltre, hanno lo stesso ordine di infinito o infinitesimo.

L'Esempio 3.4 mostra che le successioni $\big(2n^2 + n - 3\big)$ e $\big(3n^2 - 12\big)$ sono equigrandi.

Definizione 5.2. (di equivalenza). *Diciamo che* (a_n) *e* (b_n) *sono* ***equivalenti*** $(a_n \sim b_n)$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

L'equivalenza è ovviamente un caso particolare di equigrandezza e stabilisce, in più, che se a_n e b_n sono regolari allora tendono allo stesso limite. Le due nozioni di equivalenza ed equigrandezza sono legate dalla relazione

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \text{ finito non nullo} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\ell b_n} = 1.$$

Chiaramente *ogni successione convergente ad un limite finito non nullo è equivalente al proprio limite* (che può essere visto come successione costante) e l'Esempio 3.5 stabilisce che la successione $(\sqrt[n]{n})$ è equivalente alla costante 1.

Altri esempi di equivalenza possono ottenersi facendo riferimento ad equivalenze note per funzioni di variabile reale qualsiasi: *ogni combinazione lineare di potenze di* n *è equivalente al proprio addendo di esponente massimo* (brevemente $a_1 n^{r_1} + a_2 n^{r_2} + ... + a_k n^{r_k} \sim a_k n^{r_k}$ se $a_k \neq 0$ ed $r_k = \max\{r_1, ..., r_k\}$) e

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \qquad e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}, \qquad \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \qquad .... \tag{5.1}$$

Può essere utile tenere presente che la relazione di equivalenza (come anche quella di equigrandezza) è *simmetrica* (se $a_n \sim b_n$ allora $b_n \sim a_n$) e *transitiva*: se $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$ allora $a_n \sim c_n$. Ad esempio, le (5.1) stabiliscono la seguente catena di equivalenze:

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} \sim e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà, di cui riportiamo anche le semplici verifiche.

Proposizione 5.3. (i) *Se* $a_n \sim a'_n$ *e* $b_n \sim b'_n$ *allora* $a_n b_n \sim a'_n b'_n$ *e* $\dfrac{a_n}{b_n} \sim \dfrac{a'_n}{b'_n}$.

(ii) *Se* $a_n \sim b_n$, *allora* $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui le potenze* a_n^α, b_n^α *hanno senso definitivamente.*

(iii) *Se* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *e* $a_n \sim b_n$, *allora* $\sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$.

Dimostrazione (i) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{b'_n} = 1$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n b_n}{a'_n b'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n}\frac{b_n}{b'_n} = 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n/b_n}{a'_n/b'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a'_n}\frac{b'_n}{b_n} = 1 \cdot 1 = 1.$$

(ii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^\alpha = 1^\alpha = 1$.

(iii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log\frac{a_n}{b_n}} = e^0 = 1$. ∎

Esempio 5.4. $\dfrac{\sin(1/n)}{3 + n - 2n^2} \sim -\dfrac{1}{2n^3}$ per la proprietà (i), in quanto $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ e $3 + n - 2n^2 \sim -2n^2$. ∎

Definizione 5.5. (di trascurabilità). *Diciamo che* (a_n) *è* ***trascurabile*** *rispetto a* (b_n) $(a_n = o(b_n))$ *se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \qquad \left(\textit{o equivalentemente } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty\right).$$

La nozione di trascurabilità di una successione rispetto ad un'altra implica ovviamente che le due successioni non sono equigrandi e che quindi si comportano in modo diverso al limite. In particolare, se sono entrambe infinite o infinitesime allora $a_n = o(b_n)$ significa sostanzialmente che una delle due tende al proprio limite *più in fretta* dell'altra:

- se sono entrambe infinitesime, allora $a_n = o(b_n)$ significa che a_n tende a 0 più in fretta di b_n (il numeratore prevale nel rapporto);
- se sono entrambe infinite, allora $a_n = o(b_n)$ significa che b_n tende all'infinito più in fretta di a_n (il denominatore prevale nel rapporto).

Equivalenza e trascurabilità sono collegate dalla seguente, importante relazione:

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n + o(b_n)$$

(quindi, ad esempio, $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ significa $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, ossia $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$).

È facile verificare che *ogni successione limitata è trascurabile rispetto ad ogni successione infinita* (infatti, se a_n è limitata e b_n è infinita, allora $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \to 0$). Valgono inoltre le seguenti proprietà, di cui omettiamo le (semplici) verifiche, per brevità.

Proposizione 5.6. (i) $o(a_n) \pm o(a_n) = o(a_n)$ *(cioè la somma algebrica di due $o(a_n)$ è ancora un $o(a_n)$).*
(ii) $\forall \lambda \neq 0$ *si ha:* $o(\lambda a_n) = o(a_n)$ *e viceversa,* $\lambda \cdot o(a_n) = o(a_n)$ *e viceversa.*
(iii) *Se* $a_n \neq 0$ *definitivamente, allora* $a_n \cdot o(b_n) = o(a_n b_n)$.
(iv) $o(a_n) \cdot o(b_n) = o(a_n b_n)$.
(v) $[o(a_n)]^\alpha = o(a_n^\alpha)$ *per ogni* $\alpha \in \mathbb{R}$ *per cui le potenze hanno senso definitivamente.*

Le nozioni di equivalenza e trascurabilità sono utili nel calcolo dei limiti grazie ai seguenti risultati (di facile verifica).

Principio di sostituzione con termini equivalenti. *Se* $a_n \sim a'_n$ *e* $b_n \sim b'_n$ *allora*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a'_n b'_n \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a'_n}{b'_n}}$$

(anche nel caso di non esistenza dei limiti).

Principio di eliminazione dei termini trascurabili. *Per qualsiasi* (a_n) *e* (b_n) *risulta*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (a_n + o(a_n))(b_n + o(b_n)) = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + o(a_n)}{b_n + o(b_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}}$$

(anche nel caso di non esistenza dei limiti).

Esempio 5.7. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{1/n} - 1\right)\left(2n + \log(n^3) - \cos(n!)\right)$.
Per $n \to \infty$, si ha $1/n \to 0$ e quindi $e^{1/n} - 1 \sim 1/n$. D'altra parte, risulta $\log(n^3) = 3\log n = o(n)$ e $\cos(n!) = o(n)$ (perché n è infinita e $\cos(n!)$ è limitata), per cui $2n + \log(n^3) - \cos(n!) = 2n + o(n)$. Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{1/n} - 1\right)\left(2n + \log(n^3) - \cos(n!)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(2n + o(n)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} 2n = 2.$$

∎

Concludiamo riportando due risultati che si possono rivelare utili nell'applicazione dei due principi precendenti.

5.1. **Graduatoria di infiniti notevoli.** Le successioni

$$(\log n), \quad (n^\gamma), \quad (a^n), \quad (n!), \quad (n^n) \qquad \text{con } \gamma > 0 \text{ e } a > 1 \text{ fissati}$$

divergono tutte positivamente e sono elencate in ordine crescente di velocità di divergenza. In altri termini, ciascuna è trascurabile rispetto alla successiva:

$$\log n = o(n^\gamma), \quad n^\gamma = o(a^n), \quad a^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

Esempio 5.8. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n - n^3}{(-1)^n n^3 - n!}$.
Poiché

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n n^3}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{o(n!)}{n!} = 0,$$

risulta $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^3}{n!} = 0$ e quindi $(-1)^n n^3 = o(n!)$. Allora si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - n^3}{(-1)^n n^3 - n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n + o(e^n)}{o(n!) - n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{-n!} = -\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0.$$

∎

5.2. **Formule di Stirling.** Valgono le seguenti equivalenze:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad \text{e} \qquad \log(n!) \sim n \log n.$$

Di conseguenza, risulta anche $n^n e^{-n} = o(n!)$ (perché $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$).

6. Sottosuccessioni

Sia $n_0 < n_1 < n_2 < ...$ una successione strettamente crescente *a valori in* $\mathbb{N}$. Data una successione qualsiasi $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ ...$, possiamo considerarne solo i termini di indici $n_0, n_1, n_2, ...$:

$$a_{n_0},\ a_{n_1},\ a_{n_2},\ ...$$

La successione così ottenuta è detta **sottosuccessione estratta da** (a_n). In sostanza, si tratta della successione (a_{n_k}) ottenuta dalla composizione $k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$ delle successioni (n_k) ed (a_n).

Esempio 6.1.

- Se $n_k = k^2$ e $a_n = ne^{-n}$, allora la sottosuccessione (a_{n_k}) è data da $a_{n_k} = a_{k^2} = k^2 e^{-k^2}$.
- Data una successione $(a_n)_{n\geq 0}$ qualsiasi, le sottosuccessioni $(a_{2k})_{k\geq 0}$ e $(a_{2k+1})_{k\geq 0}$ sono le successioni costituite rispettivamente dai termini di indice pari e da quelli di indice dispari di (a_n), cioè $a_0, a_2, a_4, ...$ e $a_1, a_3, a_5, ...$ Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora per ogni k risulta $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ e $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1$.

∎

Il teorema seguente afferma che tutte le sottosuccessioni di una *successione regolare sono esse stesse regolari ed hanno lo stesso limite (finito o infinito) della successione da cui sono estratte.*

Teorema 6.2. (sul limite di sottosuccessioni). *Se (a_n) è regolare, ogni sua sottosuccessione (a_{n_k}) è ancora regolare e risulta*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Fornendo una condizione necessaria di esistenza del limite per una successione, il teorema precedente consente anche di individuare successioni irregolari: *se una successione ammette due sottosuccessioni che tendono a limiti diversi tra loro (finiti o infiniti), allora essa è irregolare.* Più precisamente, vale il seguente:

Corollario 6.3. (criterio di irregolarità di sottosuccessioni). *Siano (a_{n_k}) e $\left(a_{n'_k}\right)$ due sottosuccessioni regolari di una successione (a_n). Allora*

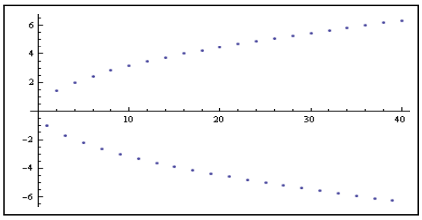
$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{k\to\infty} a_{n'_k} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \text{ non esiste.}$$

Esempio 6.4.

- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ non esiste, perché $\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} = 1$ e $\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} = -1$.
- $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ non esiste, perché

  $\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k} \sqrt{2k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{2k} = +\infty$ e

  $\lim_{k\to\infty} (-1)^{2k+1} \sqrt{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(-\sqrt{2k+1}\right) = -\infty$.



∎