DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA XV CICLO

Università degli Studi di Torino

Positive Dependence Notions and Applications

Patrizia Semeraro

Dipartimento di Matematica, Università di Torino

via Carlo Alberto, 10

10123 Torino, Italy

semeraro@dm.unito.it

RELATORE:

Prof. Franco Pellerey

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino

corso Duca degli Abruzzi 24,

10129 Torino, Italy

pellerey@calvino.polito.it

February 5, 2004

Summary (Italian)

L'argomento principale di questa tesi di dottorato é lo studio di nozioni di dipendenza positiva per vettori aleatori. Negli ultimi anni i concetti di dipendenza hanno assunto un ruolo sempre più rilevante nella ricerca in probabilità e statistica per il loro crescente utilizzo in diversi settori applicativi come la matematica attuariale, l'economia, la teoria delle code e l'affidabilità. Quando si ha a che fare con variabili aleatorie non normali, i ben noti coefficienti di correlazione basati sulla linearità non sono necessariamente gli strumenti più idonei per descrivere la struttura di dipendenza che lega due o più variabili aleatorie. Per questi motivi sono nati nuovi utili concetti di dipendenza introdotti in letteratura dai fondamentali lavori di Kimeldorf e Sampson [36] e [37] e dal libro di Joe [31]. Questi concetti si possono suddividere in due classi: gli ordinamenti di dipendenza e le proprietà di dipendenza. La loro utilità risiede nel fatto che permettono di descrivere la struttura di dipendenza di distribuzioni multivarite (proprietà) e di confrontare il grado di dipendenza tra due differenti distribuzioni multivariate (ordinamenti). Inizialmente questi concetti sono stati introdotti nell'insieme delle distribuzioni bivariate, ma dato il loro crescente interesse ed utilizzo è nata l'esigenza di generalizzarli nell'insieme delle distribuzioni multivariate. Nella tesi dimostriamo dei risultati originali riguardanti questi concetti e ne descriviamo diverse applicazioni.

Il primo capitolo è quasi interamente dedicato ad introdurre l'argomento e pertanto contiene definizioni e risultati noti in letteratura al fine di fornire gli strumenti necessari per comprendere le dimostrazioni originali. Nell'ultimo paragrafo si trova un piccolo contributo originale. Il primo argomento che trattiamo sono gli ordinamenti stocastici, che in questo contesto sono un utile strumento nelle dimostrazioni. Gli ordinamenti stocastici sono relazioni di ordine parziale $\leq_*$ (i.e. riflessive simmetriche e transitive) definite sulla classe delle funzioni di distribuzione

n-dimensionali, $n \geq 1$.
Nel secondo paragrafo rivolgiamo la nostra attenzione alle nozioni di dipendenza positiva e agli ordinamenti di dipendenza positiva nel caso di distribuzioni bidimensionali, per fornire un quadro completo dell'argomento prima di passare alla generalizzazione in dimensione n, con $n > 2$. Gli ordinamenti di dipendenza sono relazioni di ordine parziale definiti sulla classe $\mathbb{F}_2$ delle funzioni di distribuzione bivariate (cioè il cui dominio è contenuto in $\mathbb{R}^2$). Essi nascono dall'esigenza di confrontare la struttura di dipendenza esistente tra le marginali di due diverse distribuzioni bidimensionali. Esiste una definizione generale che fornisce le proprietà che un ordinamento deve soddisfare per poter essere considerato un ordinamento di dipendenza. Ciò che principalmente li caratterizza e li distingue dagli ordinamenti stocastici è che gli ordinamenti di dipendenza sono definiti per confrontare distribuzioni con le stesse marginali, cioè affinché $\leq_*$ sia un ordinamento di dipendenza $F(x,y) \leq_* G(x,y)$ deve implicare $\lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to\infty} G(x,y)$ e $\lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} G(x,y)$.
Le nozioni di dipendenza sono sottoclassi della classe $\mathbb{F}_2$, i cui elementi sono caratterizzati in base alla loro struttura di dipendenza. Poiché la maggior parte dei risultati contenuti nel Capitolo 1 sono già noti in letteratura, ne omettiamo le dimostrazioni, indicando i riferimenti in cui possono essere trovate. L'unico contributo originale è nell'ultimo paragrafo, in cui introduciamo uno strumento molto utile nello studio delle dipendenze: le copule. Una copula bidimensionale è una funzione $C : S_1 \times S_2 \to [0,1]$, dove S_1 e S_2 sono sottoinsiemi di $[0,1]$ che contengono i valori 0 e 1, che verifica determinate proprietà. I risultati che presentiamo formalizzano la relazione che intercorre tra copule e dipendenze.

Nel secondo capitolo introduciamo gli ordinamenti di dipendenza positiva multivariati. Essi sono una generalizzazione degli ordinamenti descritti nel Capitolo 1. Gli ordinamenti di dipendenza positiva multivariata sono relazioni di ordine parziale definite nell'insieme delle funzioni di distribuzione n-dimensionali in modo tale che se due distribuzioni risultano confrontabili hanno le stesse marginali univariate, i.e. appartengono alla stessa classe di Fréchet $\boldsymbol{F} = F(F_1, ..., F_n)$. In particolare concentraremo la nostra attenzione su due ordinamenti, chiamati ordinamento "positive quadrant dependent" ($\leq_{\mathrm{PQD}}$) ed ordinamento "supermodular" ($\leq_{\mathrm{SMD}}$).

Dopo aver introdotto gli ordinamenti rivolgiamo la nostra attenzione alle nozioni di dipendenza positiva multivariata. I risultati enunciati e provati da questo punto in avanti sono originali. Analogamente al caso di distribuzioni bidimensionali, le nozioni di dipendenza positiva n-dimensionali vengono definite come sottoinsiemi $\boldsymbol{Mp}$ della classe $\mathbb{F}$ di tutte le distribuzioni multivariate. In particolare noi introduciamo una nuova proprietà di dipendenza basata sull'ordinamento SMD, definita dall'insieme $\boldsymbol{Mp}_{\text{SMD}} = \{F \in \mathbb{F}/F \geq_{\text{SMD}} F_I\}$ (dove F_I è la distribuzione con marginali indipendenti nella stessa classe di Fréchet di F). Nell'ultima parte del capitolo dimostriamo teoremi di chiusura rispetto alla proprietà di mistura per i principali ordinamenti e per le principali nozioni che abbiamo introdotto. Ci siamo interessati a questo tipo di operazione perchè essa è di grande utilità in molte applicazioni, di cui mostreremo diversi esempi nei Capitoli 3 e 4.

Nel Capitolo 3 applichiamo a differenti modelli i risultati ottenuti nel capitolo precedente. Il modello che studiamo più in dettaglio è il così detto modello di shock multivariato, che viene utilizzato in diverse aree della probabilità applicata, come in ambito attuariale o in affidabilità. Consideriamo m processi di conteggio $\Gamma_i = \{\Gamma_i(t), t \geq 0\}$, $i = 1, \ldots, m$, e due vettori aleatori di interi positivi $\boldsymbol{M} = (M_1, \ldots, M_m)$ ed $\boldsymbol{M'} = (M'_1, \ldots, M'_m)$. Sia X_{ij} il j-esimo interarrivo nel processo Γ_i, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots$, definiamo $Z_i = \sum_{j=1}^{M_i} X_{ij}$ e $Z'_i = \sum_{j=1}^{M'_i} X_{ij}$ per $i = 1, 2, \ldots, m$. Applicando i risultati del Capitolo 2 a questo modello otteniamo condizioni sufficienti per confrontare $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_m)$ e $\boldsymbol{Z'} = (Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_m)$ secondo ordinamenti di dipendenza. Generalizziamo il modello precedente considerando il caso in cui la distribuzione del processo di conteggio dipenda da condizioni ambientali aleatorie sottostanti modellizzate da un vettore aleatorio $\boldsymbol{\Theta}$. Una parte del capitolo è dedicata alla descrizione di altri due modelli, che sono costruiti come misture di variabili aleatorie (così possiamo studiarne le proprietà di dipendenza partendo dalle distribuzioni misturanti).

Nel Capitolo 4 affrontiamo lo studio di due processi di interesse applicativo. Il primo modello è un processo di rischio discreto $\boldsymbol{S}$ con "claims" correlati, di cui non si conoscono le distribuzioni marginali in forma chiusa. Utilizzando opportuni ordinamenti stocastici (ordinamento convesso e ordinamento di Laplace) si possono confrontare le distribuzioni marginali di $\boldsymbol{S}$ con le marginali di altri due processi $\hat{\boldsymbol{S}}$ e $\tilde{\boldsymbol{S}}$ che hanno rispettivamente "claims" indipendenti ($\hat{\boldsymbol{S}}$) e fortemente correlati

($\tilde{\boldsymbol{S}}$). I processi $\hat{\boldsymbol{S}}$ e $\tilde{\boldsymbol{S}}$ risultano quindi minoranti e/o maggioranti (marginalmente) di $\boldsymbol{S}$, in base all'ordinamento che stiamo considerando. L'importanza dei confronti ottenuti risiede nel fatto che i processi $\tilde{\boldsymbol{S}}$ e $\hat{\boldsymbol{S}}$ hanno una struttura molto semplice (sono rispettivamente un "mixed random walk" ed un "simple random walk"). La maggior parte delle dimostrazioni sfrutta la struttura di dipendenza che ipotizziamo per i "claims".
Il secondo modello è stato proposto da Ebrahimi [20] per descrivere l'affidabilità di un sistema in termini di distribuzione del tempo di vita aleatorio del sistema stesso. Il nostro contributo consiste nel dimostrare proprietà di affidabilità relative a questo modello, facendo ipotesi sulla struttura di dipendenza delle sue componenti. Per completezza riportiamo dei risultati aggiuntivi che abbiamo dimostrato relativamente al modello, anche se sfruttano ordinamenti di tipo stocastico e non di dipendenza.

In Appendice A richiamiamo i risultati e le definizioni già esistenti in letteratura che sono stati utili strumenti per lo sviluppo del nostro lavoro. Nella maggior parte dei casi non forniamo le dimostrazioni dei risultati enunciati, ma ci limitiamo a segnalare opportuni riferimenti.

References

[1] Bacelli, F., Makowski (1989). Multidimensional Stochastic Ordering and Associated Random Variables, *Operations Research*, **3**, 478-487.

[2] Balu, M.N. and Sabnis, S.V. (1997). Preservation of certain dependent structures under bivariate homogeneous Poisson shock models, *Statistics and Probability Letters*, **35**, 91–100.

[3] Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. to Begin With, Silver Spring, MD.

[4] Bäuerle, N. (1997a), Inequalities for stochastic models via supermodular orderings, *Communications in Statistics—Stochastic Models* **13**, 181–201.

[5] Bäuerle, N. (1997b), Monotonicity results for MR/GI/1 queues, *Journal of Applied Probability* **34**, 514–524.

[6] Bäuerle (2002). Risk Management on Credit Risk Portfolios with Correlated Assets. *Insurance: Mathematics and Economics*, **30**, 187-198.

[7] Bäuerle, N. and Müller, A. (1998), Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios, *ASTIN Bulletin* **28**, 59–76.

[8] Bäuerle, N. and Rieder, U. (1997), Comparison results for Markov-modulated recursive models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **11**, 203–217.

[9] Belzunce, F., Lillo, R., Pellerey, F. and Shaked, M. (2002). Preservation of Association in Multivariate Shock and Claim Models, *Operations Research Letters* **30**, 223-230.

[10] Bergmann, R. (1991). Stochastic Orders and their Applications to a Unified Approach to Various Concepts of Dependence and Association. *Stochastic Orders and Decision under Risk* (Eds K. Mosler and M. Scarsini), IMS Lecture Notes - Monograph Series **19**, 48-73.

[11] Block, H. W., Sampson, A. (1988). Conditionally Ordered Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **27**, 91-104.

[12] Block, H. W., Savits, T. H., Shaked, M. (1982). Some Concepts of Negative Dependence. *The Annals of Probability*, **10**, 765-772.

[13] Brown, M. and Proschan, F. (1983). Imperfect repair, *Journal of Applied Probability* **20**, 851–859.

[14] Brown, M. and Shanthikumar (1998). Comparing the Variability of Random Variables and Point Processes, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **12**, 425-444.

[15] Christofides, T. C. and Vaggelatou, E. (2002). A Connetion between Supermodular Ordering and Positive/Negative Assocition. *Tecnical Report*, Department of Mathematics and Statistics, University of Cyprus.

[16] Dembo, A. and Zeitouni, O. (1983). *Large Deviatons Techniques and Applications*. Jones and Bartlett, Boston.

[17] Denuit, M. (2001). Laplace Transform Ordering of Actuarial Quantities. *Insurance: Mathematics and Economics*, **29**, 83-102.

[18] Denuit, M., Dhaene, Ribas, C. (2001). Does Positive Dependence between Individual Risks Increase Stop-loss premiums? *Insurance: Mathematics and Economics*, **3**, 305-308.

[19] Denuit, M., Genest, C., Marceau, E. (2002). Criteria for the Stochastic Ordering of Random Sums, with Actuarial Applications *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 3-16.

[20] Ebrahimi, N. (2001). A Stochastic Covariate Failure Model for Assessing System Reliability. *Journal of Applied Probability*, **38**, 761-767.

[21] Esary, J.D., Proschan, F and Walkup, D.W. (1967). Association of Random Variables with Applications. *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 433-441.

[22] Fagiuoli, E., Pellerey, F., Shaked, M. (1999). A Characterization of the Dilatation Order and Its Applications. *Statist. Papers*, **40**, 393-406.

[23] Grandell, J. (1990). *Aspects of Risk Theory*. Springer, Berlin.

[24] Hu, T. and Pan, X. (1999), Preservation of multivariate dependence under multivariate claim models, *Insurance: Mathematics and Economics* **25**, 171–179.

[25] Hu, T. and Pan, X. (2000). Comparisons of Dependence for Stationary Markov Processes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **14**, 299-315.

[26] Hu, T., Wu, Z.(1999). On Dependence of Risks and Stop-loss premius. *Insurance: Mathematics and Economics* **24**, 323-332.

[27] Hu, T. (2000). Negatively Superadditive Dependence of Random Variables with Applications. *China Journal of Applied Probability and statistics* **16**, 133-144.

[28] Jasiulewicz, H. (2001). Probability of ruin with variable premium rate in a Markovian environment., *Insurance: Mathematics and Economics* **29**, 291-296.

[29] Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983). Negative association of random variables, with applications, *Annals of Statistics* **11**, 286–295.

[30] Joe, H. (1990). Multivariate Concordance. *Journal of Multivariate Analysis*, **35**, 12-30.

[31] Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman and Hall, London.

[32] Jogdeo, K. (1978). On a probability bound of Marshall and Olkin, *The Annals of Statistics*, **6**, 232–234.

[33] Karlin,S. and Rinott, Y. (1980). Classes of Orderings of Measures and Related Correlation Inequalities. I. Multivariate Totally Positive Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, **10**, 467-498.

[34] Khaledhi, B.-E. and Kochar, S.C. (2001). Dependence properties of multivariate mixture distributions and their applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **53**, 620–630.

[35] Kijima, M., Ohnishi, M.(1999). Stochastic Orders and their Applications in Financial Ottimization *Mathematical Methods of Operation Research*, **50**, 351-372.

[36] Kimeldorf, G. and Sampson, A. R. (1987). Positive Dependence Orderings, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **39**, 113–128

[37] Kimeldorf, G. and Sampson, A. R. (1989). A Framework for Positive Dependence, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **41**, 31–45.

[38] Kuber, M., Dharmadhikari, A. (1996). Association in time of a finite semi-Markov process. *Statistics and Probability Letters*, **26**, 125-133.

[39] Lehtonen, T. and Nyrhinen, H. (1992). On Asymptotically Efficent Simulation of Ruin Probabilities in a Markovian Environment. *Scandinavian Actuarial Journal*, 60–75.

[40] Li, H. (2000) Stochastic Models for Dependent Life Lenghts induced by Common Pure Jump Shock Enviroments. *Journal of Applied Probability*, **37**, 453-469.

[41] Lim, J.-H., Lu, K.-L., and Park D.-H. (1998). Bayesian imperfect repair model, *Communications in Statistics—Theory and Methods* **27**, 965–984.

[42] Lindquist, B. H. (1988). Association of Probability Measures on Partially Ordered Spaces. *Journal of Multivariate Analisys* **26**, 111–132.

[43] Ma, C. (1999). Uniform stochastic ordering on a system of components with dependent lifetimes induced by a common environment, *Sankhyā, Ser. A* **61**, 218–228.

[44] Macci, C. (2001). Continuos Time Markov Additive Processes: Composition of Large Deviation Principles and Comparison Between Exponential Rates of Convergence, *Journal of Applied Probability*, **38**, 917-931.

[45] Marshall, A. W., Shaked, M. (1982). Positive dependence properties of conditionally independent random lifetimes, *The Annals of Probability* **1**, 259-264.

[46] Meester, L.E. and Shanthikumar, J.G. (1993). Regularity of Stochastic Processes; a Theory Based on Directional Convexity. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **7**, 343-360.

[47] Müller, A. (1997), Stop-loss order for portfolios of dependent risks, *Insurance: Mathematics and Economics* **21**, 219–223.

[48] Müller, A., Pflug, G. (2001). Asymptotic ruin Probabilities for Risk Processes with Dependent Increments. *Insurance: Mathematics and Economics*, **28**, 381-392.

[49] Müller, A. and Scarsini, M. (2000), Some remarks on the supermodular order, *Journal of Multivariate Analysis* **73**, 107–119.

[50] Müller, A. and Stoyan,(2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, Wiley series in probability and statistics.

[51] Nelsen, R.B.(1999),*An Introduction to Copulas*, Lecture Notes in Statistics, 139. Springer.

[52] Oakes, D. (1989). Bivariate survival models induced by frailties, *Journal of the American Statistical Association* **84**, 487–493.

[53] Pellerey, F. (1999), Stochastic comparisons for multivariate shock models, *Journal of Multivariate Analysis* **71**, 42–55.

[54] Rényi, A. (1959), On measures of Dependence, *Acta Mathematica* X/3-4 441-451.

[55] Rúschendorf, L. (1981), Characterization of Dependence Concepts in Normal Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **33**, Part A, 347-359.

[56] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester.

[57] Ross, S. M. (1996). *Stochastic Processes*. Wiley, New York.

[58] Scarsini, M. and Shaked, M. (1990). Some Conditions for Stochastic Equality. *Naval Research Logistics* **37**, 617-625.

[59] Scarsini, M. and Shaked, M. (1996). Positive Dependence Orders: A Survey. *Athens Conference on Applied Probability and Time Series I: Applied Probability* (Eds C.C. Heyde, Y.V. Prohorov, R. Pyke, and S.T. Rachev) Springer–Verlag, NY, 70-91.

[60] Scarsini, M. and Spizzichino, F. (1999). Simpson-type paradoxes, dependence and ageing, *Journal of Applied Probability* **36**, 119–131.

[61] Schriever, B. F. (1987), An ordering for positive dependence, *Annals of Statistics* **15**, 1208-1214.

[62] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1994). *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press, San Diego.

[63] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1997), Supermodular stochastic orders and positive dependence of random vectors, *Journal of Multivariate Analysis* **61**, 86–101.

[64] Shaked, M. and Spizzichino, F. (1998). Positive dependence properties of conditionally independent random lifetimes, *Mathematics of Operations Research* **23**, 944–959.

[65] Sklar, A. (1959). Fonnctions de repártition á n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, 229-231.

[66] Szekli, R. (1995). *Stochastic Ordering and Dependence in Applied Probability*, Lecture Notes in Statistics, 97. Springer.

[67] Szekli, R., Disney, R. L. and Hur, S. (1994), MR/GI/1 queues with positively correlated arrival stream, *Journal of Applied Probability* **31**, 497–514.

[68] Tchen, A.H. (1980). Inequalities for Distributions with given Marginals. *Annals of Probability*, **8**, 814-827.

[69] Wang, S and Dhaene, J. (1998). Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, **22**, 235-242.

[70] Wong, T. (1997). Preservation of multivariate stochastic orders under multivariate Poisson shock models, *Journal of Applied Probability* **34**, 1009–1020.