Complementi sulle serie di funzioni[1]

Fabio Nicola

[1]Questi appunti vogliono essere una integrazione del libro di testo A. Bacciotti, F. Ricci *Lezioni di Analisi Matematica 2*, seconda edizione 1991, Levrotto&Bella. Per gli studenti interessati ad approfondimenti sulle serie di Fourier si consiglia il testo E.M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis. An introduction.* Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

1.1 Funzioni analitiche

Si consideri una funzione f di classe C^∞ in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$. Si dice *serie di Taylor* centrata in $x = x_0$ della funzione f la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1.1}$$

Valgono allora le seguenti osservazioni:
1) non è detto che la serie (1.1) converga in un intorno di x_0 (cioè abbia raggio di convergenza non nullo);
2) anche se la serie converge in un intorno di x_0 potrebbe non convergere a $f(x)$.

La seconda osservazione segue facilmente considerando il classico esempio dato da $f(x) = e^{-1/x}$ per $x > 0$ e $f(x) = 0$ per $x \leq 0$. Si mostra facilmente (verificarlo[1]!) che f è di classe C^∞ e $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 0$. Quindi la serie (1.1) con $x_0 = 0$ converge, per ogni $x \in \mathbb{R}$, alla funzione identicamente nulla, e non a f.

La prima osservazione è meno immediata e si basa sul seguente risultato:

Lemma di Borel *Data una qualsiasi successione numerica a_n e $x_0 \in \mathbb{R}$, esiste una funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ con $f^{(n)}(x_0) = a_n$ per ogni $n \geq 0$.*

Allora, prendendo ad esempio $a_n = n! \cdot n^n$, la serie di Taylor (1.1) per la corrispondente funzione avrà raggio di convergenza nullo.

Queste considerazioni motivano la seguente definizione.

Definizione 1.1.1 (Funzioni analitiche). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ aperto e $f \in C^\infty(I)$. Si dice che f è analitica in $x_0 \in I$ se la sua serie di Taylor centrata in x_0 converge a $f(x)$ per ogni x in un intorno di x_0. Si dice che f è analitica in I se è analitica in ogni $x_0 \in I$.*

Ad esempio, le funzioni polinomiali sono le più semplici funzioni analitiche in $\mathbb{R}$. Più in generale potrebbe dimostrarsi che ogni serie di potenze di centro x_0 e raggio di convergenza $r > 0$ definisce una funzione analitica nell'intervallo aperto $(x_0 - r, x_0 + r)$ (quindi, non solo in x_0, come è ovvio).

Il seguente risultato fornisce una condizione sufficiente, sulla crescita delle derivate, affinché una data funzione di classe C^∞ sia sviluppabile in serie di Taylor convergente in un assegnato intervallo aperto.

Teorema 1.1.2. *Sia f una funzione di classe C^∞ nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Supponiamo che esista una costante M tale che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),\ \forall n = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Allora la serie di Taylor di f centrata in x_0 converge a $f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

[1] suggerimento: verificare, per induzione, che $f^{(n)}(x) = p_{2n}(x^{-1})e^{-1/x}$ per $x > 0$ e $f^{(n)}(x) = 0$ per $x \leq 0$, per un opportuno polinomio p_{2n} di grado $2n$.

Dimostrazione. Sia
$$P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k$$
il *polinomio* di Taylor di f centrato in x_0, di ordine n. Per la formula di Taylor con il resto di Lagrange esiste $\xi_n \in (x_0, x)$ se $x > x_0$, o $\xi_n \in (x, x_0)$ se $x < x_0$ per cui

$$|f(x) - P_{n,x_0}(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_n)||x - x_0|^{n+1} \leq \frac{(M|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (1.3)$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato la (1.2). Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M|x-x_0|)^n}{n!}$ converge, l'ultimo termine in (1.3) tende a zero per $n \to \infty$. Questo prova la convergenza di $P_{n,x_0}(x)$ a $f(x)$ e conclude la dimostrazione. $\square$

Il precedente risultato può applicarsi per provare che la funzione esponenziale e^x e le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ sono analitiche in $\mathbb{R}$.
Ad esempio, posto $f(x) = e^x$, osserviamo che $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^{x_0+\delta}$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pertanto (1.2) è verificata con $M = e^{x_0+\delta} + 1$, da cui $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x - x_0)^n$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Siccome δ è arbitrario la serie converge a e^x per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Riportiamo qui alcuni sviluppi di Taylor notevoli, con il corrispondente intervallo di validità[2]:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \ \forall x \in \mathbb{R}; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \forall x \in \mathbb{R}; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \forall x \in (-1, 1);$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ \forall x \in (-1, 1], \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ \forall x \in [-1, 1].$$

1.2 Soluzioni analitiche di equazioni differenziali

Una applicazione classica delle serie di potenze si incontra nella ricerca di soluzioni analitiche di equazioni differenziali. Illustriamo il cosiddetto metodo di *integrazione per serie* con un esempio molto semplice.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

[2] Come esercizio, si eseguano tutte le verifiche. Per la funzione $\log(1 + x)$ conviene integrare termine a termine da 0 a x lo sviluppo di $\frac{1}{1+t}$ e applicare il Teorema di Abel per recuperare pure l'estremo $x = 1$; per $\operatorname{arctg} x$ integrare da 0 a x lo sviluppo di $\frac{1}{1+t^2}$ e applicare il Teorema di Abel per ciascuno dei due estremi.

Cerchiamo la soluzione nella forma $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, in un intorno di 0. Dovrà allora essere innanzi tutto $b_0 = x_0$. Sostituendo nell'equazione l'espressione per $x(t)$ e derivando termine a termine si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} n b_n t^{n-1} = a \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Uguagliando i coefficienti dei termini dello stesso grado si ricava $b_1 = ab_0 = ax_0$, $b_2 = ab_1/2 = a^2x_0/2$, $b_3 = ab_2/3 = a^3x_0/3!, \ldots$. Quindi, $b_n = a^n x_0/n!$, $n \geq 0$, da cui

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} t^n = x_0 e^{at},$$

come il lettore già sapeva.

Si osservi che la derivazione termine a termine è giustificata, a posteriori, all'interno dell'intervallo di convergenza (che in questo caso è tutto $\mathbb{R}$).

In generale è evidente che le eventuali soluzioni non analitiche non si potranno trovare con questo metodo.
Ad esempio, si consideri l'equazione differenziale lineare di ordine n

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \tag{1.4}$$

dove le funzioni $a_j(t)$, $j = 0, \ldots, n-1$, sono analitiche in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Allora, siccome il prodotto e la somma di funzioni analitiche sono ancora funzioni analitiche, se f non è analitica in un dato punto $t_0 \in I$, *nessuna* soluzione $x(t)$ di (1.4) sarà analitica in t_0.
Si osservi che, tuttavia, se f è di classe C^k o C^∞ in un intorno di t_0 allora tutte le soluzioni saranno di classe C^{k+n} o, rispettivamente, C^∞ in un intorno di t_0. Per vedere questo, si noti che x è per ipotesi di classe C^n, perché si possano eseguire in senso classico le operazioni di derivazione in (1.4). Allora, se ad esempio f è di classe C^1 risulta dall'equazione stessa che $x^{(n)}$ è di classe C^1 e quindi x è di classe C^{n+1}. In modo simile si ragiona in generale.
Il seguente teorema ci dice che un risultato simile, di *regolarità* delle soluzioni, vale anche nel caso analitico.

Teorema 1.2.1. (Teorema di ipoellitticità analitica) *Siano $a_j(t)$, $j = 0, \ldots, n-1$, funzioni analitiche in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Allora, se f è analitica in un dato punto $t_0 \in I$, ogni soluzione $x(t)$ di (1.4) è analitica in t_0.*

1.3 Funzioni periodiche e serie di Fourier

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ (o anche T-periodica) se $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se f ha periodo T allora anche i multipli kT, $k = 1, 2 \ldots$, sono periodi. Si dice che T è il periodo minimo se non esiste alcun periodo $T' < T$. Nel seguito ci concentreremo su funzioni periodiche di periodo 2π e rimandiamo al paragrafo 1.7 per una discussione dei cambiamenti da apportare alle formule nel caso generale.

I più importanti esempi di funzioni 2π-periodiche sono le funzioni trigonometriche $\sin x$, $\cos x$ e, più in generale, le funzioni $\cos(kx)$, $\sin(kx)$, con $k = 1, 2, \ldots$. Così le loro combinazioni lineari, ossia i *polinomi trigonometrici*

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx), \quad \alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

hanno pure periodo 2π. È chiaro che le funzioni del tipo (1.5) non esauriscono la classe di funzioni 2π-periodiche, perché quelle sono tutte analitiche mentre esistono evidentemente funzioni 2π-periodiche discontinue. Tuttavia, *in un senso che preciseremo in seguito*, ogni funzione 2π-periodica e integrabile sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ può rappresentarsi come somma di una serie del tipo

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{1.6}$$

per opportuni coefficienti a_0, a_k, b_k, detti **coefficienti di Fourier** della funzione f. Essi possono calcolarsi a partire dalla uguaglianza

$$f(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx), \tag{1.7}$$

ragionando nel modo seguente. Si moltiplicano entrambi i membri di (1.7) per $\cos(kx)$, e si integra su $[-\pi, \pi]$. Ammettendo di poter integrare termine a termine [3] e tenendo conto delle identità (verificarle!)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(kx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{se } m = k = 0, \\ \pi & \text{se } m = k \neq 0, \\ 0 & \text{se } m \neq k; \end{cases} \tag{1.8}$$

e

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(kx)\,dx = 0 \quad \forall k, m, \tag{1.9}$$

si trova

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{1.10}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \geq 1. \tag{1.11}$$

[3] questo si può fare, ad esempio, se la serie converge uniformemente su $[-\pi, \pi]$, ma anche sotto condizioni meno restrittive

Analogamente, moltiplicando la (1.7) per $\sin kx$ e integrando termine a termine, tenendo conto di (1.9) e delle identità

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(kx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = k \neq 0, \\ 0 & \text{se } m \neq k; \end{cases} \tag{1.12}$$

si ottiene

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \geq 1. \tag{1.13}$$

In generale, data una funzione f 2π-periodica e integrabile su $[-\pi, \pi]$ la serie (1.6), *con* a_0, a_k, b_k *dati dalle formule* (1.10),(1.11),(1.13), è detta **serie di Fourier di** f.

Osserviamo infine che nelle formule per i coefficienti di Fourier si potrebbe integrare su un qualsiasi altro intervallo di lunghezza 2π. Infatti per ogni funzione g 2π-periodica e integrabile su $[-\pi, \pi]$ risulta $\int_a^{a+2\pi} g(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx$. Lasciamo la verifica di questo fatto come esercizio per il lettore.

1.4 Interpretazione geometrica di una serie di Fourier

In questo paragrafo intendiamo presentare una interpretazione geometrica piuttosto illuminante dello sviluppo in serie di Fourier. La motivazione è ben illustrata da questo passo di Maurice Fréchet (1906):

"Un gran numero di elementi che intervengono in matematica sono completamente determinati da una serie infinita di numeri reali o complessi: ad esempio, una serie di Taylor è determinata dalla successione dei suoi coefficienti [...]. Si possono così considerare i numeri della successione che determina ciascuno degli elementi come le coordinate di questo elemento visto come punto di uno spazio (E_ω) avente dimensione numerabile. Ci sono molti vantaggi a lavorare così. Prima di tutto, il vantaggio che appare sempre quando si usa il linguaggio geometrico, che favorisce l'intuizione a causa delle analogie a cui esso dà luogo."

Iniziamo quindi con un po' di terminologia.

Sia E uno spazio vettoriale reale.

Diciamo che una applicazione $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ è un **prodotto scalare semidefinito** se è

- **bilineare**:

$$(\alpha x + \beta y|z) = \alpha(x|z) + \beta(y|z) \quad \forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$(z|\alpha x + \beta y) = \alpha(z|x) + \beta(z|y) \quad \forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

- **simmetrica**: $(x|y) = (y|x)$, $\forall x, y \in E$.
- **semidefinita positiva**: $(x|x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

Diciamo che l'applicazione $(\cdot, \cdot)$ è un **prodotto scalare** se, in aggiunta, è

- **definita positiva**: $(\cdot|\cdot)$ è semidefinita positiva e inoltre $(x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

A partire da un prodotto scalare semidefinito $(\cdot|\cdot)$, si definisce una nuova funzione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$,

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}, \ \ x \in E.$$

Questa funzione è una **seminorma** su E, ossia soddisfa le seguenti tre proprietà[4]:

- $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in E$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall x \in E, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in E$ (**disuguaglianza triangolare**).

Se $(\cdot|\cdot)$ è *definito* positivo (quindi un prodotto scalare) allora vale anche

- $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$.

In questo caso si dice che $\|\cdot\|$ è una **norma** su E.

Esempio. Sia $E = \mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in E$. Allora l'applicazione definita da $(x|y) = x_1 y_1$ è un prodotto scalare semidefinito (ma *non* definito se $n > 1$). La seminorma associata è $\|x\| = |x_1|$. Invece l'usuale prodotto scalare $(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ è un prodotto scalare nel senso specificato sopra, e la *norma* associata è quella euclidea, $\|x\| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$.

Fissiamo quindi un prodotto scalare semidefinito $(\cdot|\cdot)$ su E, e sia $\|\cdot\|$ la seminorma associata.

Imitando la terminologia usuale in $\mathbb{R}^n$ diciamo che due vettori $x, y \in E$ sono **ortogonali** (rispetto a $(\cdot|\cdot)$), e scriviamo $x \perp y$, se $(x|y) = 0$ (si noti che un vettore potrebbe essere ortogonale a se stesso, ma questo non sarà un problema per i nostri scopi). Inoltre una famiglia di vettori $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, definisce un sistema di vettori **ortonormali** se gli e_k sono a due a due ortogonali e ciascuno ha seminorma uno, vale a dire $(e_j|e_k) = \delta_{jk}$ (per definizione, $\delta_{jk} = 1$ se $j = k$, $\delta_{jk} = 0$ se $j \neq k$).

Il seguente risultato è alla base della interpretazione a cui si accennava all'inizio.

Teorema 1.4.1. *Sia E uno spazio vettoriale reale con un prodotto scalare semidefinito $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ e sia $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, un sistema di vettori ortonormali. Sia $E_n = \operatorname{span}\{e_0, \dots, e_n\} \subset E$. Allora per ogni $n \geq 0$ e ogni $f \in E$* esiste *un* unico *vettore $x \in E_n$ tale che*

$$\|f - x\| = \min_{z \in E_n} \|f - z\|.$$

Precisamente,

$$x = \sum_{k=0}^{n} c_k e_k, \quad \text{con } c_k = (f|e_k), \tag{1.14}$$

e valgono le seguenti formule:

$$\|f - x\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k^2; \tag{1.15}$$

[4]le prime due sono di verifica immediata, la terza è conseguenza della *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*: $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$, $\forall x, y \in E$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 \quad (\textbf{\textit{disuguaglianza di Bessel}}). \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Cerchiamo gli $x \in E_n$ che realizzano il minimo per il funzionale $\Phi(z) = \|f - z\|$, $z \in E_n$. Siccome $x \in E$, sarà $x = \sum_{k=0}^n c_k e_k$ per qualche $c_k \in \mathbb{R}$. Ora,

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k e_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n c_k e_k \middle| f - \sum_{k=0}^n c_k e_k \right) \\
&= \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^n c_k (f|e_k) \\
&= \sum_{k=0}^n (c_k - (f|e_k))^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n (f|e_k)^2.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Pertanto la funzione a primo membro di (1.17) ha un unico punto di minimo, che si ottiene quando $c_k = (f|e_k)$, $\forall k = 0, 1, \ldots, n$.
Infine, sostituendo in (1.17) $c_k = (f|e_k)$ si deduce subito (1.15), la quale a sua volta implica

$$\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \|f\|^2, \quad \forall n \geq 0.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ in questa disuguaglianza si ottiene (1.16). □

Osservazione 1.4.2. La restrizione di $\| \cdot \|$ a E_n definisce una norma, cioè $y \in E_n$ e $\|y\| = 0$ implica $y = 0$. Per verificare questo fatto basta esprimere y come combinazione lineare di e_k e calcolare $\|y\|^2$ come nella dimostrazione del Teorema 1.4.1.

E' importante osservare che il vettore $x = \sum_{k=0}^n (f|e_k) e_k$ in (1.14) è l'unico vettore di E_n per cui $(f - x) \perp E_n$ (ossia $(f - x) \perp z$, $\forall z \in E_n$)[5]. Questo fatto si esprime dicendo che x è **la proiezione ortogonale di f su E_n**.

Vediamo ora come le precedenti considerazioni possano applicarsi al caso specifico delle serie di Fourier (di funzioni, diciamo, 2π-periodiche).

Si prende come E lo spazio delle funzioni a valori reali integrabili secondo Riemann su $[-\pi, \pi]$ e si definisce [6]

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx, \quad f, g \in E. \tag{1.18}$$

[5] Verifica: basta mostrare che $f - x$ è ortogonale a tutti gli e_j con $0 \leq j \leq n$. Ma $(f - x|e_j) = (f|e_j) - (x|e_j) = (f|e_j) - \sum_{k=0}^n (f|e_k)(e_k|e_j) = (f|e_j) - \sum_{k=0}^n (f|e_k) \delta_{kj} = 0$.
Per quanto riguarda l'unicità, se esistessero due vettori $x_1, x_2 \in E_n$ con quella proprietà allora sarebbe $((f - x_1) - (f - x_2)) \perp z$ $\forall z \in E_n$, e prendendo $z = x_2 - x_1$ otterremmo $\|x_2 - x_1\|^2 = 0$, da cui $x_2 = x_1$ per l'Osservazione 1.4.2.

[6] Si ricordi che il prodotto di due funzioni integrabili (secondo Riemann) è ancora integrabile.

La seminorma associata è indicata con $\|\cdot\|_2$, ossia

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx, \quad f \in E.$$

Si osservi che la funzione f può essere non identicamente nulla pur essendo $\|f\|_2 = 0$ (prendere, ad esempio, una funzione nulla ovunque tranne in un numero finito di punti)[7]. Per questo motivo abbiamo dovuto considerare prodotti scalari che non sono necessariamente *definiti* positivi.

Le formule (1.8),(1.9) e (1.12) mostrano che le seguenti funzioni costituiscono un sistema di vettori ortonormali rispetto a questo prodotto scalare semidefinito:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx), \quad k \geq 1. \tag{1.19}$$

Gli elementi del sottospazio vettoriale generato da $1/\sqrt{2\pi}$, $\cos(kx)/\sqrt{\pi}$, $\sin(kx)/\sqrt{\pi}$, con $k \leq n$ sono i **polinomi trigonometrici di grado** n. Ciascuno di essi è della forma

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx), \quad \alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}.$$

Ora, data una funzione f periodica di periodo 2π e integrabile secondo Riemann in $[-\pi, \pi]$, la sua restrizione a $[-\pi, \pi]$ definisce un elemento di E, e si vede subito che i prodotti scalari di f con le funzioni in (1.19) sono dati da

$$\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \sqrt{2\pi}a_0 \tag{1.20}$$

$$\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)\right) = \sqrt{\pi}a_k, \quad k \geq 1 \tag{1.21}$$

$$\left(f \middle| \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)\right) = \sqrt{\pi}b_k, \quad k \geq 1, \tag{1.22}$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{1.23}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \geq 1, \tag{1.24}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \geq 1, \tag{1.25}$$

sono, per definizione, i coefficienti di Fourier di f.

Pertanto riconosciamo nella ridotta n-esima

$$S_n(f)(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{1.26}$$

[7] Si può vedere che $\|f\|_2 = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0$ per ogni x in cui f è continua.

della serie di Fourier di f esattamente la proiezione ortogonale[8] di f sul sottospazio dei polinomi trigonometrici di grado n. Possiamo dunque applicare il Teorema 1.4.1 e deduciamo il seguente fatto fondamentale:

Fra tutti i polinomi trigonometrici di grado n, la ridotta n-esima $S_n(f)$ della serie di Fourier di f è quello che meglio approssima la funzione f rispetto alla seminorma $\|\cdot\|_2$ (ossia $\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - Q\|_2$ per ogni polinomio trigonometrico Q di grado n).

Deduciamo anche subito il seguente risultato

Proposizione 1.4.3. *Risulta*

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2). \tag{1.27}$$

Dimostrazione. E' sufficiente applicare (1.15). □

Teorema 1.4.4 (Lemma di Riemann-Lebesgue). *Siano a_k, b_k i coefficienti di Fourier di una funzione 2π-periodica e Riemann integrabile su $[-\pi, \pi]$. Risulta*

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = 0.$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza di Bessel (1.16) (o da (1.27)) si vede che la serie (a termini non negativi) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ converge, per cui il termine k-esimo deve tendere a zero. □

1.5 Convergenza delle serie di Fourier

Ad ogni funzione f 2π-periodica e integrabile secondo Riemann in $[-\pi, \pi]$ è associata la propria serie di Fourier

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \tag{1.28}$$

dove i coefficienti a_k, b_k sono dati in termini di f dalle formule (1.23),(1.24),(1.25). Quello che ci chiediamo ora è se la serie (1.28) è convergente in qualche senso e se converge a f. Ci sono almeno tre tipi di convergenza che si presentano del tutto naturali, e sono la **convergenza puntuale**, la **convergenza uniforme** e la **convergenza in L^2** (o, come si dice talvolta, in *media quadratica* o ancora in *norma quadratica*), in accordo con la seguente definizione.

Si dice che una successione di funzioni f_k integrabili su $[-\pi, \pi]$ converge in L^2 a una funzione integrabile f se

$$\lim_{k\to+\infty} \|f_k - f\|_2 = 0. \tag{1.29}$$

[8] definita subito dopo l'Osservazione 1.4.2

In generale la convergenza uniforme implica *sia* quella puntuale, *sia* quella in L^2. Quest'ultimo fatto è chiaro, poiché

$$\|f_k - f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f_k(x) - f(x)\|_\infty,$$

dove si pone

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |g(x)|. \tag{1.30}$$

Per quanto riguarda la convergenza in L^2, vale il seguente risultato fondamantale.

Teorema 1.5.1 (Teorema sulla convergenza in L^2 delle serie di Fourier). *Sia f una funzione 2π-periodica e integrabile secondo Riemann in $[-\pi,\pi]$. La sua serie di Fourier converge a f in L^2, ossia*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0.$$

La dimostrazione è basata sui seguenti risultati di approssimazione.

Lemma 1.5.2. *Sia f una funzione integrabile secondo Riemann in $[-\pi,\pi]$. Per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione continua g su $[-\pi,\pi]$, soddisfacente $g(-\pi) = g(\pi)$, tale che*

$$\|f - g\|_2 < \epsilon.$$

Lemma 1.5.3. *Sia g una funzione continua su $[-\pi,\pi]$, con $g(-\pi) = g(\pi)$. Sia poi P_n, $n \geq 0$, una* **identità approssimata** 2π**-periodica**, *ossia una successione di funzioni 2π-periodiche e integrabili su $[-\pi,\pi]$ tali che*
(i) $P_n(x) \geq 0\ \forall n \geq 0$;
(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,dx = 1\ \forall n \geq 0$;
(iii) per ogni $\nu \in (0,\pi]$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{-\pi}^{-\nu} P_n(x)\,dx + \int_{\nu}^{\pi} P_n(x)\,dx\right) = 0$.
Posto

$$Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)P_n(x-t)\,dt,$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \|Q_n - g\|_\infty = 0.$$

Lemma 1.5.4. *La successione di polinomi trigonometrici*

$$P_n(x) = \lambda_n \left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n, \quad \lambda_n = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n dt\right)^{-1},$$

è una identità approssimata 2π-periodica.

Presentiamo ora la dimostrazione del Teorema 1.5.1 e poi quella del Lemma 1.5.3, che è un risultato importante di per sé. Rinviamo all'Appendice il lettore interessato alla dimostrazione dei Lemmi 1.5.2 e 1.5.4. Osserviamo soltanto che P_n nel Lemma 1.5.4 è un polinomio trigonometrico di grado n per via delle formule che legano le potenze di $\cos t$, $\sin t$ e $\cos(kt)$, $\sin(kt)$.

Dimostrazione del Teorema 1.5.1. Comunque scelto $\epsilon > 0$, per il Lemma 1.5.2 esiste una funzione continua g su $[-\pi, \pi]$, con $g(-\pi) = g(\pi)$ tale che $\|f - g\|_2 < \epsilon$. Scegliamo allora P_n come nel Lemma 1.5.4 e conseguentemente Q_n come nel Lemma 1.5.3. Siccome P_n è un polinomio trigonometrico di grado n, risulta che anche Q_n è un polinomio trigonometrico di grado n, come si vede applicando le formule di addizione per le funzioni seno e coseno. Dal Lemma 1.5.3 segue quindi che per N abbastanza grande $\|Q_N - g\|_2 < \epsilon$. Osserviamo ora che

$$\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - Q_N\|_2, \quad \forall n \geq N. \tag{1.31}$$

Infatti, per $n = N$ questo è chiaro da quanto detto sulla ridotta $S_N(f)$ come punto di minimo per il funzionale $Q \longmapsto \|f - Q\|_2$, con Q polinomio trigonometrico di grado N, mentre per $n > N$ basta osservare che la successione *numerica* $\|f - S_n(f)\|_2$ è non crescente per via di (1.27). D'altra parte, per la disuguaglianza triangolare

$$\|f-Q_N\|_2 \leq \|f-g\|_2+\|g-Q_N\|_2 \leq \|f-g\|_2+\sqrt{2\pi}\|g-Q_N\|_\infty < (1+\sqrt{2\pi})\epsilon. \tag{1.32}$$

Da (1.31) e (1.32) segue (1.29). □

Dimostrazione del Lemma 1.5.3. Prima di tutto estendiamo g come funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ (questo si può fare perché $g(-\pi) = g(\pi)$). La funzione g così estesa sarà quindi *uniformemente continua su* $\mathbb{R}$. Ora, usiamo il fatto che P_n e g sono funzioni periodiche di periodo 2π per riscrivere Q_n come

$$Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_n(t) g(x - t)\, dt.$$

Osserviamo quindi che, per il punto (i) nel Lemma 1.5.3,

$$Q_n(x) - g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} P_n(t)(g(x - t) - g(x))\, dt.$$

Siccome g è uniformemente continua su $\mathbb{R}$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\nu > 0$ tale che

$$|g(x - t) - g(x)| \leq \epsilon/2 \quad \text{se } x \in \mathbb{R},\ |t| \leq \nu. \tag{1.33}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}|Q_n(x) - g(x)| \leq \int_{-\pi}^{-\nu} P_n(t)|g(x - t) - g(x)|\, dt + \int_{-\nu}^{\nu} P_n(t)|g(x - t) - g(x)|\, dt \\ + \int_{\nu}^{\pi} P_n(t)|g(x - t) - g(x)|\, dt.\end{aligned}$$

La somma del primo e ultimo integrale si maggiora con

$$2\|g\|_\infty \left(\int_{-\pi}^{\nu} P_n(t)\, dt + \int_{\nu}^{\pi} P_n(t)\, dt \right),$$

che tende a zero per $n \to +\infty$ per il punto (*iii*) nel Lemma 1.5.3. Usando (1.33) e i punti (*i*) e (*ii*) nel Lemma 1.5.3 il secondo integrale si maggiora con $\frac{\epsilon}{2}\int_{-\nu}^{\nu} P_n(t)\,dt \le \frac{\epsilon}{2}$. Questo mostra che, per n abbastanza grande,

$$|Q_n(x) - g(x)| \le \epsilon \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

il che conclude la dimostrazione del Lemma 1.5.3. $\square$

Una importante conseguenza del Teorema 1.5.1 è la seguente identità.

Teorema 1.5.5. *Sia f una funzione 2π-periodica, integrabile secondo Riemann su $[-\pi, \pi]$, e siano a_k, b_k, i suoi coefficienti di Fourier. Risulta*

$$\|f\|_2^2 = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \quad (\textbf{\textit{identità di Parseval}}). \tag{1.34}$$

Dimostrazione. E' una immediata conseguenza del Teorema 1.5.1 e di (1.27). $\square$

I precedenti risultati ammettono la seguente interpretazione fisica. Se f rappresenta un segnale 2π-periodico, l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$ esprime la sua energia. Allora, il Teorema 1.5.1 dice innanzi tutto che f si può ricostruire per sovrapposizione dei segnali "elementari" $a_k \cos(kx)$ e $b_k \sin(kx)$. Inoltre l'identità di Parseval (1.34) afferma che l'energia di f è data dalla somma delle energie di questi segnali (infatti, $\int_{-\pi}^{\pi}(b_k \sin(kx))^2\,dx = \pi b_k^2$, etc.).

Vogliamo ora presentare una conseguenza quasi immediata dei Lemmi 1.5.3 e 1.5.4, che afferma che le funzioni continue su intervalli limitati e chiusi si approssimano *uniformemente* con polinomi[9].

Teorema 1.5.6 (Teorema di Approssimazione di Weierstrass). *Sia f una funzione* continua *su $[-\pi, \pi]$. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio w tale che*

$$\|f - w\|_\infty < \epsilon. \tag{1.35}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi))x$. Siccome g è continua su $[-\pi, \pi]$ e $g(-\pi) = g(\pi) = (f(\pi) + f(-\pi))/2$, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.5.1, segue dai Lemmi 1.5.3 e 1.5.4 che esiste un polinomio *trigonometrico* Q tale che $\|g - Q\|_\infty < \epsilon/2$. D'altra parte, i polinomi trigonometrici ammettono uno sviluppo in serie di Taylor convergente in tutto $\mathbb{R}$ (quindi uniformemente convergente su ogni intervallo limitato), per cui esiste un polinomio r tale che $\|Q - r\|_\infty < \epsilon/2$. Allora risulta $\|f - r\|_\infty < \epsilon$ e il polinomio $w(x) = r(x) + \frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi))x$ soddisfa (1.35). $\square$

[9]Enunciamo il teorema per l'intervallo $[-\pi, \pi]$, ma è evidente che è sempre possibile ridursi a questo caso mediante una composizione con una funzione affine $T(x) = ax + b$, visto che $w \circ T$ e $T \circ w$ sono polinomi quando w è un polinomio.

Intendiamo ora considerare il problema della convergenza puntuale delle serie di Fourier. Osserviamo prima di tutto che esistono funzioni continue (periodiche) la cui serie di Fourier non converge in un punto (il primo controesempio è stato dato da Paul du Bois Reymond, 1873)[10]. D'altra parte si dimostra che se f è derivabile in x_0, allora la serie di Fourier di f converge in x_0 a $f(x_0)$. Si osservi che questo fatto è piuttosto inaspettato perché i coefficienti di Fourier, definiti come integrali, "non vedono" i valori puntuali di f. In ogni caso il problema della convergenza puntuale è alquanto sottile.

Premettiamo ora qualche definizione a un teorema di convergenza puntuale molto utile nelle applicazioni.

Si dice che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è *regolare a tratti in* $[a, b]$ se esiste un numero finito di punti x_i, $i = 0, 1, \dots, N$, con $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$, tali che f è derivabile con derivata continua in ogni intervallo (x_{i-1}, x_i) e la restrizione di f' a (x_{i-1}, x_i) è prolungabile per continuità all'intervallo chiuso $[x_{i-1}, x_i]$. Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è regolare a tratti su $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti su ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ di $\mathbb{R}$.

Ad esempio, la funzione 2π-periodica definita nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ come $f(x) = 1$ se $-\pi \leq x \leq 0$ e $f(x) = 1$ per $0 < x < \pi$ è regolare a tratti su $\mathbb{R}$, mentre la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$ non è regolare a tratti su $\mathbb{R}$.

Riportiamo quindi, senza dimostrazione, il seguente risultato.

Teorema 1.5.7 (Teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier). *Sia f una funzione 2π-periodica, regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie di Fourier di f converge a*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)],$$

cioè alla media tra il limite destro e limite sinistro di f in x.
In particolare la serie converge a $f(x)$ nei punti in cui f è continua.

Infine vogliamo considerare il problema della convergenza uniforme. Siccome il limite uniforme di funzioni continue è continuo, è chiaro che una condizione *necessaria* per la convergenza a f della sua serie di Fourier è che f sia continua. Come abbiamo già osservato, la continuità di f non garantisce però neppure la convergenza puntuale, in generale. Proveremo invece ora che la continuità di f e le ipotesi del teorema di convergenza puntuale 1.5.7 (f regolare a tratti) assicurano insieme la convergenza uniforme a f della sua serie di Fourier.

---

[10] Per i più curiosi diciamo anche che

1) se f è continua in un punto x_0 e *se la serie converge in* x_0, allora in x_0 converge necessariamente a $f(x_0)$;

2) (Lennart Carleson, 1966) se f è integrabile secondo Riemann su $[-\pi, \pi]$, l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ dei punti in cui la serie *non* converge a f ha *misura nulla*, ossia per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia numerabile di intervalli aperti $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $A \subset \cup_{k=1}^{\infty} I_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \epsilon$ ($|I_k|$ denota la lunghezza di I_k). Quindi A si ricopre con una successione di intervalli di misura complessiva arbitrariamente piccola (ad esempio, l'insieme dei numeri razionali ha misura nulla);

3) (Jean-Pierre Kahane, Yitzhak Katznelson, 1966) per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ di misura nulla, esiste una funzione 2π-periodica e continua la cui serie di Fourier non converge in alcun punto di A.

Teorema 1.5.8 (Teorema sulla convergenza uniforme delle serie di Fourier). *Sia f una funzione 2π-periodica, continua e regolare a tratti. Allora la serie di Fourier di f converge a f uniformemente, ossia,*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_\infty = 0.$$

Dimostrazione. Per il Teorema di convergenza puntuale 1.5.7, $S_n(f) \longrightarrow f$ puntualmente per $n \to +\infty$. La convergenza uniforme seguirà dal criterio di Weierstrass. Precisamente, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$ otteniamo

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}.$$

Pertanto basta verificare che la serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ converge. Trattandosi di una serie a termini non negativi, è sufficiente mostrare che la successione delle ridotte è limitata. Stimiamo quindi la ridotta n-esima mediante la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2(a_k^2 + b_k^2)}\sqrt{\frac{1}{k^2}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2)}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}.$$

Infine usiamo le maggiorazioni $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ e

$$\sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) = \|f'\|_2^2/\pi.$$

Quest'ultimo fatto è esattamente l'identità di Parseval (1.34) applicata a f' (che è continua a tratti e quindi integrabile su $[-\pi, \pi]$)[11]. Infatti, detti $\tilde{a}_k$, $\tilde{b}_k$ i coefficienti di Fourier della funzione f', integrando par parti[12] si deduce

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = 0, \\
\tilde{a}_k =& \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx)\, dx = \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = kb_k, \quad k \geq 1,
\end{aligned}$$

e in modo simile si trova $\tilde{b}_k = -ka_k$, $k \geq 1$. □

In realtà vale il seguente risultato più generale, che ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 1.5.9 (Principio di localizzazione). *Nelle ipotesi del Teorema 1.5.7, la serie di Fourier di f converge a f uniformemente su ogni intervallo chiuso $[a, b]$ su cui f è continua.*

---

[11] Si noti, en passant, che dalla convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)$ si deduce la seguente versione forte del Lemma di Riemann-Lebesgue per funzioni dotate di derivata continua a tratti:

Nelle ipotesi del Teorema 1.5.8, risulta $a_k = o(1/k)$ e $b_k = o(1/k)$ per $k \to +\infty$.

[12] si vede facilmente che è lecito, visto che f' è continua a tratti

Infine osserviamo che talvolta si è interessati a sviluppare su $[-\pi,\pi]$, in serie di funzioni trigonometriche, una funzione f che non è necessariamente periodica. Per questo si considera la restrizione di f a $[-\pi,\pi]$ e si calcolano come al solito i suoi coefficienti di Fourier. Nelle ipotesi di convergenza, la corrispondente serie di Fourier definisce allora una estensione 2π-periodica della restrizione di f a $(-\pi,\pi)$.

1.6 Serie di Fourier in forma complessa

E' spesso utile lavorare con l'espressione della serie di Fourier scritta in forma complessa, che è anche più semplice. Precisamente, dalla **formula di Eulero**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

si deduce subito

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Sostituendo queste formule per le funzioni seno e coseno nell'espressione (1.26) della ridotta n-esima della serie di Fourier di f si ottiene[13]

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{1.36}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.37}$$

Pertanto la serie di Fourier di f potrà riscriversi come

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}. \tag{1.38}$$

E' importante chiarire che, *per definizione*, la ridotta n-esima della serie (1.38) è quella data in (1.36). Si noti in particolare la simmetria $k \to -k$ (pure, $c_{-k} = \overline{c_k}$). Osserviamo esplicitamente che se invece si considerassero le serie $\sum_{k\geq 0} c_k e^{ikx}$ e $\sum_{k<0} c_k e^{ikx}$ separatamente, potrebbero verificarsi fenomeni del tutto nuovi. Ad esempio, può accadere che una di queste due serie non sia neppure una serie di Fourier di una funzione Riemann integrabile. E' proprio questo meccanismo di "rottura di simmetria" che è alla base della costruzione di funzioni continue la cui serie di Fourier diverge in un punto.

Fino ad ora abbiamo considerato serie di Fourier di funzioni a valori reali. Osserviamo tuttavia che i coefficienti c_k in (1.37) saranno in generale complessi anche se f prende, appunto, valori reali. Questo mostra che è del tutto naturale estendere

[13] Una funzione $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, $g(x) = u(x) + iv(x)$, con $u(x), v(x)$ reali, si dice integrabile su $[a,b]$ quando lo sono entrambe u e v e si pone $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx$.

la definizione di serie Fourier alle funzioni f *a valori complessi*, 2π-periodiche e integrabili secondo Riemann in $[-\pi, \pi]$ esattamente mediante la stessa formula (1.38), con i coefficienti c_k dati in (1.37). E' possibile anche recuperare l'interpretazione della ridotta $S_n(f)$ come la proiezione ortogonale di f sul sottospazio dei polinomi trigonometrici di grado n (ora a valori complessi[14]). A questo scopo si sostituisce il prodotto scalare semidefinito (1.18) con il **prodotto Hermitiano** semidefinito

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

e la seminorma associata

$$\|f\|_2^2 = (f|f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Si procede allora esattamente come sopra, osservando che le funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

costituiscono un sistema ortonormale (verificarlo!).

Infine osserviamo che l'identità di Parseval potrà scriversi come

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

1.7 Funzioni periodiche di periodo $2T$

Finora abbiamo considerato, per semplicità di notazioni, funzioni periodiche di periodo 2π. Quanto è stato detto può tuttavia ripetersi, più in generale, per funzioni periodiche di periodo $2T$ (le formule sono più semplici se si indica il periodo con $2T$ invece di T; il numero $T > 0$ è detto allora semiperiodo). La serie di Fourier di una funzione f siffatta, integrabile su $[-T, T]$, avrà la forma

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right),$$

con i coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, dx, \\ a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{T}x\right)\, dx, \quad k \geq 1, \\ b_k &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{T}x\right)\, dx, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

[14] Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ del tipo $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)$, con $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}$ o, equivalentemente, del tipo $\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}$, con $\gamma_k \in \mathbb{C}$.

Se f assume valori reali si pone $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-T}^{T} f(x)^2\,dx}$, e l'indentità di Parseval prende la forma
$$\|f\|_2^2 = 2Ta_0^2 + T\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$
La serie di Fourier in forma complessa si scrive
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{T}x},$$
con
$$c_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{i\frac{k\pi}{T}x}\,dx, \quad k\in\mathbb{Z}.$$
Infine se f prende valori complessi si definisce $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-T}^{T}|f(x)|^2\,dx}$. Inoltre risulta
$$\|f\|_2^2 = 2T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2.$$

1.8 Appendice

Dimostrazione del Lemma 1.5.2. Ragioneremo in due passi. E' chiaro infatti che basta dimostrare che le funzioni integrabili su $[-\pi,\pi]$ sono approssimabili in L^2 con funzioni a scalino e poi che le funzioni a scalino sono approssimabili con funzioni continue che assumono gli stessi valori agli estremi. Proviamo quindi i seguenti fatti.

(a) Per ogni f integrabile su $[-\pi,\pi]$ e ogni $\epsilon>0$ esiste una funzione a scalino h tale che $\|f-h\|_2<\epsilon$.

(b) Per ogni h a scalino e ogni $\epsilon>0$ esiste una funzione g continua su $[-\pi,\pi]$ tale che $g(-\pi)=g(\pi)$ e $\|h-g\|_2<\epsilon$.

Dimostrazione di (a). Sia $|f(x)|\le M$, $\forall x\in[-\pi,\pi]$. Segue dalla definizione di integrabilità secondo Riemann che esiste una funzione a scalino h tale che $|h(x)|\le M$ $\forall x\in[-\pi,\pi]$ e $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h(x)|\,dx<\epsilon$. Allora
$$\|f-h\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-h(x))^2\,dx \le 2M\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-h(x)|\,dx < 2M\epsilon.$$

Dimostrazione di (b). Dati $-\pi=x_0<x_1<\ldots<x_n=\pi$ e h costante su ciascun intervallo aperto (x_j,x_{j+1}), $j=0,\ldots,n-1$, si considera la funzione g, continua su $[-\pi,\pi]$, con $g(-\pi)=g(\pi)$, che coincide con h su $[-\pi,\pi]\setminus\Big(\cup_{j=1}^{n-1}(x_j-\epsilon,x_j+\epsilon)\cup(\pi-\epsilon,\pi]\Big)$, e il cui grafico coincide con segmenti di retta su ciascun intervallo $[x_j-\epsilon,x_j+\epsilon]$

e $[\pi-\epsilon,\pi]$, $j=1,\dots,n-1$, dove $\epsilon < \min_{j\in\{0,\dots,n-1\}}(x_{j+1}-x_j)/2$. Allora, se $|h(x)|\le M\ \forall x\in[-\pi,\pi]$ risulta

$$\|h-g\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\int_{x_j-\epsilon}^{x_j+\epsilon}(h(x)-g(x))^2\,dx + \int_{\pi-\epsilon}^{\pi}(h(x)-g(x))^2\,dx \le 4M^2(2\epsilon(n-1)+\epsilon).$$

Questo conclude la dimostrazione del Lemma 1.5.2. □

Dimostrazione del Lemma 1.5.4. Osserviamo che P_n è una funzione non negativa che soddisfa il punto (2) in Lemma 1.5.3 per costruzione. Inoltre P_n è una funzione pari ed è decrescente su $[0,\pi]$, per cui $\int_{-\pi}^{-\nu}P_n(x)\,dx = \int_{\nu}^{\pi}P_n(x)\,dx$ e

$$\int_{\nu}^{\pi}P_n(x)\,dx \le (\pi-\nu)\lambda_n\left(\frac{1+\cos\nu}{2}\right)^n \longrightarrow 0 \quad \text{per } n\to+\infty, \tag{1.39}$$

dato che, come mostriamo ora, $\lambda_n \le \frac{2n+1}{2\pi}$. Infatti risulta

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^n dx =& 2\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2n} dx = 4\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{2n}\,dt\\ \ge& 4\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)^{2n} dt = 2\pi\int_0^1 y^{2n}dy = \frac{2\pi}{2n+1}.\end{aligned}$$

Il Lemma 1.5.4 è quindi dimostrato. □