

Serie numeriche: esercizi svolti

Gli esercizi contrassegnati con il simbolo * presentano un grado di difficoltà maggiore.

Esercizio 1. Dopo aver verificato la convergenza, calcolare la somma delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \quad [1]$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} \quad \left[\frac{11}{18}\right]$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad [1]$$

$$d) \sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad [-\log 2]$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \quad \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \quad [1]$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

Svolgimento

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)!} \right) = 1.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{1}{n(n+3)} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+3} = \frac{(A+B)n+3A}{n(n+3)} \implies \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$$

Ne segue che la serie data non è telescopica. Nonostante ciò è possibile calcolare la somma della serie. Si ha che la somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+3} \right). \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{11}{18}$.

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2}{n^3}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che $2n+1 = (n+1)^2 - n^2$. Quindi si ha che

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 1.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$.

d) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ è a termini negativi. Consideriamo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[-\log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right].$$

È una serie a termini positivi. Poichè $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$-\log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left[-\log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \right]$ converge. Quindi per l'algebra delle serie, la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \log \frac{n^2 - 1}{n^2} = \log \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n}{n-1}.$$

Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \log \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) = \sum_{k=2}^n \left(\log \frac{k+1}{k} - \log \frac{k}{k-1} \right) = \\ &= \log \frac{3}{2} - \log 2 + \log \frac{4}{3} - \log \frac{3}{2} + \cdots + \log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n}{n-1} = \\ &= -\log 2 + \log \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left(-\log 2 + \log \frac{n+1}{n} \right) = -\log 2.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=2}^{\infty} \log \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = -\log 2$.

e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{1}{4n^2 - 1} \sim \frac{1}{4n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n^2 - 1} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{(2A+2B)n + A-B}{4n^2 - 1} \\ &\implies \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$.

f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che la serie data è telescopica. La somma parziale n -esima della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1$.

g) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ è a termini positivi. Poichè

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Calcoliamo la somma della serie. Osserviamo che

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} = \frac{(A+B)n+2A}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right].$$

Ne segue che la serie data è telescopica. La somma parziale della serie è

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]. \end{aligned}$$

Ne segue che la somma della serie è

$$S = \lim_n S_n = \lim_n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{1}{4}.$$

Pertanto si ha $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

Esercizio 2. Determinare il carattere delle seguenti serie:

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ [diverge positivamente]
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$ [converge]
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$ [converge]
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ [diverge negativamente]
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverge positivamente]
- f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n}$ [converge]

- g) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{\sqrt{n}}$ [diverge negativamente]
- h) $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ [diverge negativamente]
- k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$ [diverge positivamente]
- i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log n^3}$ [diverge positivamente]
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(n!)}}$ [converge]
- l) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} \cos^n(n\pi)$ [indeterminata]
- m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$ [converge]
- n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{43}}{6^n}$ [converge]
- o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$ [converge]
- p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\binom{3n+2}{3n}}$ [converge]
- q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$ [diverge positivamente]
- r) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^n$ [converge]
- s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4n^3)}{n(n+1)}$ [converge assolutamente]
- t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$ [diverge positivamente]
- u) $\sum_{n=2}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$ [converge]
- v) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ [converge]

- w) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ [converge]
- x) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}}$ [diverge positivamente]
- y) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$ [diverge positivamente]
- z) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ [converge]

Svolgimento

- a) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\log(n+1) = o(n+1)$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\frac{1}{n+1} = o\left(\frac{1}{\log(n+1)}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è divergente.

- b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\log n = o(n)$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\frac{\log n}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

- c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\log n = o\left(n^{\frac{1}{3}}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

- d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(\frac{n+1}{n^2} \right)$ è a termini negativi. Infatti, $\frac{n+1}{n^2} < 1$. Quindi o converge o diverge (negativamente).

Osserviamo che

$$\lim_n \log \left(\frac{n+1}{n^2} \right) = -\infty.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data è divergente.

- e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\arctan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è divergente.

- f) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n} = \frac{4}{n(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} \sim \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

- g) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini negativi. Infatti $\log \frac{1}{\sqrt{n}} = -\log \sqrt{n}$. Quindi o converge o diverge (negativamente).

Osserviamo che

$$\lim_n \log \sqrt{n} = +\infty.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data è divergente.

- h) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ è a termini negativi. Infatti $\log \frac{1}{\sqrt{n^3}} = -\log \sqrt{n^3}$. Quindi o converge o diverge (negativamente).

Osserviamo che

$$\lim_n \log \sqrt{n^3} = +\infty.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data è divergente.

- k) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Osserviamo che

$$\forall a, b > 0, \quad a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Infatti, poichè se $N > 0$ si ha che $N = e^{\log N}$, allora se $a, b > 0$ si ha che

$$a^{\log b} = e^{\log(a^{\log b})} = e^{\log b \log a} = e^{\log(b^{\log a})} = b^{\log a}.$$

Pertanto si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log 2}}.$$

Poichè $\log 2 < 1$, ne segue che la serie data è divergente.

- i) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log n^3}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\log n = o(\sqrt{n})$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\sqrt{n} \log n^3 = 3\sqrt{n} \log n = o(n), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Quindi si ha che

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n} \log n^3}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è divergente.

- j) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(n!)}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $n! \geq n^2$ per ogni $n \geq 4$, si ha che per ogni $n \geq 4$

$$\frac{1}{2^{\log(n!)}} \leq \frac{1}{2^{\log(n^2)}} = \frac{1}{2^{2\log n}} = \frac{1}{4^{\log n}}.$$

Osserviamo che

$$\forall a, b > 0, \quad a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Infatti, poichè se $N > 0$ si ha che $N = e^{\log N}$, allora se $a, b > 0$ si ha che

$$a^{\log b} = e^{\log(a^{\log b})} = e^{\log b \log a} = e^{\log(b^{\log a})} = b^{\log a}.$$

Pertanto si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log 4}}.$$

Poichè $\log 4 > 1$, ne segue che questa serie converge e per il criterio del confronto la serie data è convergente.

- l) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} \cos^n(n\pi)$ è a termini di segno alterno. Infatti, essendo $\cos(n\pi) = (-1)^n$, si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{2n} \cos^n(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 9^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-9)^n.$$

Ne segue che la serie data è una serie geometrica con ragione $-9 < -1$. Quindi è indeterminata.

- m) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{(n!)^n}} = \lim_n \frac{3^n}{n!} = 0 < 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie data converge.

- n) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{43}}{6^n}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{43}}{6^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n^{43}}}{6} = \frac{1}{6} < 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie data converge.

o) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Posto

$$a_n = \frac{1}{\binom{4n}{3n}} = \frac{(3n)! n!}{(4n)!},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{[3(n+1)]! (n+1)!}{[4(n+1)]!} \cdot \frac{(4n)!}{(3n)! n!} = \frac{(3n+3)! (n+1)!}{(4n+4)!} \cdot \frac{(4n)!}{(3n)! n!} = \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)! (n+1) n!}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!} \cdot \frac{(4n)!}{(3n)! n!} = \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = \frac{27}{256} < 1.$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie data converge.

p) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\binom{3n+2}{3n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\frac{2}{\binom{3n+2}{3n}} = \frac{4(3n)!}{(3n+2)!} = \frac{4(3n)!}{(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \frac{4}{(3n+2)(3n+1)}.$$

Poichè

$$\frac{4}{(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{4}{9n^2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

q) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\sqrt[n]{\log n} \leq \log n$, si ha che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\log n}} \geq \frac{1}{\log n}$$

ed essendo (vedi Esercizio 2 a)) la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ divergente, per il criterio del confronto anche la serie data è divergente.

- r) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^n$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n+2}\right)^n} = \lim_n \frac{1}{n+2} = 0 < 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie data converge.

- s) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(4n^3)}{n(n+1)}$ è a termini di segno variabile.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(4n^3)|}{n(n+1)}.$$

Essendo $|\sin(4n^3)| \leq 1$, si ha che per ogni $n \geq 1$

$$\frac{|\sin(4n^3)|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Poichè $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$ ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il

criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Quindi per il

criterio del confronto anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(4n^3)|}{n(n+1)}$ converge. Ne segue che la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

- t) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{5^n} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n \frac{1}{5} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_n \frac{1}{5} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \frac{e^2}{5} > 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie data diverge.

- u) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} 3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{3^n \left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_n 3 \left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \lim_n 3 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \frac{3}{e^2} < 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie data converge.

v) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Osserviamo che per ogni $\alpha \geq 0$ si ha che $n^\alpha = o(\log n)^{\log n}$, per $n \rightarrow +\infty$. Infatti,

$$\lim_n \frac{n^\alpha}{(\log n)^{\log n}} = \lim_n \frac{e^{\alpha \log n}}{(\log n)^{\log n}} =$$

posto $t = \log n$,

$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha t}}{t^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^\alpha}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t \log \frac{e^\alpha}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(\alpha - \log t)} = 0.$$

Ne segue che per ogni $\alpha \geq 0$

$$\frac{1}{(\log n)^{\log n}} = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Considerando $\alpha > 1$, essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

w) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Posto $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{(n+1)}}{[2(n+1)]!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \\ &= \frac{(n+1)^n(n+1)}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$

Quindi per il criterio del rapporto la serie data converge.

x) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Osserviamo che

$$\lim_n n\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}} = +\infty.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data è divergente.

y) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Osserviamo che

$$\lim_n \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_n \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{n^n \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = \lim_n \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data è divergente.

z) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

si ha che

$$\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data è convergente.

Esercizio 3. Stabilire se convergono, convergono assolutamente o non convergono le seguenti serie:

a) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ [converge ma non assolutamente]

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^4}$ [converge assolutamente]

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$ [converge assolutamente]

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ [non converge]

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$ [converge ma non assolutamente]

- f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{1}{\sqrt{n}}$ [non converge]
- g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ [converge ma non assolutamente]
- h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)\pi}{\sqrt{n} + \log n^3}$ [converge ma non assolutamente]
- k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}$ [converge ma non assolutamente]
- i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1) - \log n}$ [non converge]
- j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ [converge ma non assolutamente]
- l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n} \cos n\pi$ [converge assolutamente]
- m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{43}}{6^n}$ [converge assolutamente]
- n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{3n+2}{3n}}$ [converge assolutamente]
- o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{(-2)^n}$ [converge assolutamente]
- p) $\sum_{n=1}^{\infty} [2 \arctan(n+1) - \pi] \cos[(n+1)\pi]$ [converge ma non assolutamente]
- q) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$ [converge ma non assolutamente]
- r) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\log n}{n+1}$ [converge ma non assolutamente]
- *s) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ [converge ma non assolutamente]
- *t) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ [converge ma non assolutamente]
- *u) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ [non converge]

$$*v) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad [\text{non converge}]$$

Svolgimento

a) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1)}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$. Per l'Esercizio 2 a) questa serie diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{1}{\log(n+1)}$, si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{\log(n+1)} = 0;$$

2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti,

$$\log(n+1) < \log(n+2) \implies b_{n+1} = \frac{1}{\log(n+2)} < \frac{1}{\log(n+1)} = b_n.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^4}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^4}$. Per l'Esercizio 2 b) questa serie converge. Quindi la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$. Per l'Esercizio 2 c) questa serie converge. Quindi la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$. Per l'Esercizio 2 d) questa serie diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che

$$\lim_n (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right) \not\exists.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data non converge.

- e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$. Per l'Esercizio 2 e) questa serie diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}$, si ha che:

- 1) $\lim_n b_n = \lim_n \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- 2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \implies b_{n+1} = \arctan \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

- f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log \frac{1}{\sqrt{n}}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\log \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{\sqrt{n}}$. Per l'Esercizio 2 g) questa serie diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che

$$\lim_n (-1)^n \log \frac{1}{\sqrt{n}} \not\exists.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che la serie data non converge.

- g) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$. È una serie a termini positivi. Poiché

$$\frac{n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{n+1}{n^2+1}$, si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \frac{n+1}{n^2+1} = 0;$$

2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione f associata alla successione (b_n) , $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ ristretta all'intervallo $[1, +\infty)$, si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

Poichè per ogni $x \in [1, +\infty)$ si ha $f'(x) < 0$, allora f è decrescente su $[1, +\infty)$.

Ne segue che la successione (b_n) è decrescente.

Quindi per il criterio di Leibiniz la serie data converge.

h) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1)\pi}{\sqrt{n} + \log n^3}$ è a termini di segno alterno. Infatti, essendo $\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n} + \log n^3}$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^3}$. È una serie a termini positivi. Poichè $\log n^3 = o(\sqrt{n})$ per $n \rightarrow +\infty$, si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \log n^3} = \frac{1}{\sqrt{n} + o(\sqrt{n})} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^3}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \log n^3} = \frac{1}{\sqrt{n+3} \log n}$, si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n} + 3 \log n} = 0;$$

2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, $\sqrt{n} + 3 \log n < \sqrt{n+1} + 3 \log(n+1)$ implica

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + 3 \log(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{n} + 3 \log n} = b_n.$$

Quindi per il criterio di Leibiniz la serie data converge.

k) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(2n+1)^2}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2}$. È una serie a termini positivi. Poichè

$$\frac{n}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{n}{(2n+1)^2}$, si ha che:

- 1) $\lim_n b_n = \lim_n \frac{n}{(2n+1)^2} = 0$;
- 2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione f associata alla successione (b_n) , $f(x) = \frac{x}{(2x+1)^2}$ ristretta all'intervallo $[1, +\infty)$, si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{1-2x}{(2x+1)^3}.$$

Poichè per ogni $x \in [1, +\infty)$ si ha $f'(x) < 0$, allora f è decrescente su $[1, +\infty)$.

Ne segue che la successione (b_n) è decrescente.

Quindi per il criterio di Leibiniz la serie data converge.

- i) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n+1) - \log n}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1) - \log n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log \frac{n+1}{n}}$. Osserviamo che

$$\lim_n \frac{1}{\log \frac{n+1}{n}} = +\infty.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che questa serie diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Per quanto appena osservato, anche la serie di partenza non verifica la condizione necessaria per la convergenza della serie. Infatti,

$$\lim_n (-1)^n \frac{1}{\log \frac{n+1}{n}} \not\exists.$$

Ne segue che la serie data non converge.

- j) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$. È una serie a termini positivi. Poichè $\tan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \tan \frac{1}{n}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \tan \frac{1}{n}$, si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \tan \frac{1}{n} = 0;$$

2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, essendo $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \geq 1$, si ha che

$$n < n + 1 \implies \tan \frac{1}{n+1} < \tan \frac{1}{n}.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

l) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n} \cos n\pi$ è a termini di segno alterno. Infatti, essendo $\cos n\pi = (-1)^n$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$. Per l'Esercizio 2 m) questa serie converge. Quindi la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

m) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{43}}{6^n}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{43}}{6^n}$. Per l'Esercizio 2 n) questa serie converge. Quindi la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

n) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{3n+2}{3n}}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n+2}{3n}}$. Per l'Esercizio 2 p) questa serie converge. Quindi la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

o) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{(-2)^n}$ è a termini di segno alterno. Infatti, si può scrivere come $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{23}}{2^n}$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{2^n}$.

È una serie a termini positivi. Si ha che

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{23}}{2^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n^{23}}}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Quindi per il criterio della radice la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{23}}{2^n}$ converge. Ne segue che la serie data converge assolutamente e di conseguenza converge.

p) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} [2 \arctan(n+1) - \pi] \cos[(n+1)\pi]$ è a termini di segno alterno. Infatti, essendo $\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1}$, la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [2 \arctan(n+1) - \pi] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\pi - 2 \arctan(n+1)].$$

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$\sum_{n=1}^{\infty} [\pi - 2 \arctan(n+1)]$. Si ha che

$$\arctan(n+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n+1}.$$

Poichè $\arctan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, ne segue che

$$\pi - 2 \arctan(n+1) = 2 \arctan \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{2}{n+1}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [\pi - 2 \arctan(n+1)]$ è divergente. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \pi - 2 \arctan(n+1) = 2 \arctan \frac{1}{n+1}$, si ha che:

- 1) $\lim_n b_n = \lim_n 2 \arctan \frac{1}{n+1} = 0$;
- 2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti,

$$n < n+1 \implies b_{n+1} = 2 \arctan \frac{1}{n+2} < 2 \arctan \frac{1}{n+1} = b_n.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

q) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$ è a termini di segno alterno. Infatti,

$$\sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n+1}\right) = \cos(n\pi) \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = (-1)^n \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

Quindi la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{n+1}$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n+1}$. È una serie a termini positivi. Poiché $\sin x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$\sin \frac{\pi}{n+1} = \frac{\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{\pi}{n+1}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n+1}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n+1}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$, si ha che:

- 1) $\lim_n b_n = \lim_n \sin \frac{\pi}{n+1} = 0$;
- 2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, essendo $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ per ogni $n \geq 1$, si ha che

$$n < n+1 \implies \sin \frac{\pi}{n+2} < \sin \frac{\pi}{n+1}.$$

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge.

r) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \frac{\log n}{n+1}$ è a termini di segno alterno. Infatti, essendo $\cos(n\pi) = (-1)^n$, la serie è $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n+1}$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$. È una serie a termini positivi. Poiché

$$\frac{1}{n+1} = o\left(\frac{\log n}{n+1}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n+1}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{\log n}{n+1}$, si ha che:

- 1) $\lim_n b_n = \lim_n \frac{\log n}{n+1} = 0$;

2) la successione (b_n) è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione f associata alla successione (b_n) , $f(x) = \frac{\log x}{x+1}$ ristretta all'intervallo $[1, +\infty)$, si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{x} - \log x}{(x+1)^2}.$$

Poichè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} - \log x \right) = -\infty,$$

esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \geq N$ si ha $f'(x) < 0$. Quindi f è decrescente su $[N, +\infty)$. Ne segue che la successione (b_n) è decrescente per ogni $n \geq N$.

Quindi per il criterio di Leibiniz la serie data converge.

*s) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + (-1)^n}. \text{ Si ha che}$$

$$\frac{1}{n + (-1)^n} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + (-1)^n}$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Posto $b_n = \frac{1}{n + (-1)^n}$, si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{n + (-1)^n} = 0;$$

2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1 + (-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n + (-1)^{2n}} = b_{2n}.$$

Quindi non si può applicare il criterio di Leibiniz. Per stabilire se la serie data converge, osserviamo che

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} &= (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^n} = (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^n} \frac{n - (-1)^n}{n - (-1)^n} = \\ &= (-1)^n \frac{n - (-1)^n}{n^2 - 1} = (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} - \frac{1}{n^2 - 1}. \end{aligned}$$

Allora la serie data diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \left((-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} - \frac{1}{n^2 - 1} \right).$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ è convergente. Infatti, è una serie a termini di segno alterno che non converge assolutamente, essendo $\frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$, ma converge per il criterio di Leibniz, essendo $\frac{n}{n^2-1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$ e la successione $a_n = \frac{n}{n^2-1}$ decrescente (si osservi che la funzione associata $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ha derivata $f'(x) = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} < 0$ su $[2, +\infty)$). Inoltre la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ è convergente, essendo $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$. Poichè il termine generale della serie data è differenza del termine generale di due serie convergenti, per l'algebra delle serie ne segue che la serie data converge e possiamo scrivere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}.$$

*t) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right). \text{ Si ha che}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right)$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergono entrambe. Quindi per l'algebra delle serie, anche la serie data converge.

Osservazione

a) In questo caso non si può applicare il criterio di Leibniz. Infatti, posto

$$b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ si ha che:}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = 0;$$

2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n} = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n)^2} = \frac{2n+1}{(2n)^2},$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{2n}{(2n+1)^2},$$

$$b_{2n+2} = \frac{2n+3}{(2n+2)^2}.$$

Ne segue che $b_{2n+1} < b_{2n}$ ma $b_{2n+2} > b_{2n+1}$.

b) Abbiamo osservato che $b_n \sim \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Di conseguenza si ha che $(-1)^n b_n \sim \frac{(-1)^n}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. È errato dire che poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente, allora per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ è convergente. Infatti, il criterio del confronto asintotico si applica solo alle serie a termini positivi.

*u) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, cioè la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right). \text{ Si ha che}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente, per il criterio del confronto asintotico anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ diverge. Quindi la serie data non converge assolutamente.

Studiamo ora la convergenza. Osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Quindi per l'algebra delle serie, la serie data diverge.

Osservazione

a) In questo caso non si può applicare il criterio di Leibiniz. Infatti, posto

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}, \text{ si ha che:}$$

$$1) \lim_n b_n = \lim_n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = 0;$$

2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{2n} = \frac{\sqrt{2n} + 1}{2n},$$

$$b_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1} - 1}{2n+1},$$

$$b_{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+2} + 1}{2n+2}.$$

Ne segue che $b_{2n+1} < b_{2n}$ ma $b_{2n+2} > b_{2n+1}$.

b) Abbiamo osservato che $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \rightarrow +\infty$. Di conseguenza si ha che

$(-1)^n b_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ per $n \rightarrow +\infty$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mentre la

serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ non converge. Ciò è in accordo col fatto che il criterio del confronto asintotico si applica solo alle serie a termini positivi.

*v) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, dove $b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo la convergenza. Per stabilire se la serie data converge, consideriamo la somma parziale n -esima della serie

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k b_k.$$

Studiamo la convergenza della successione (S_n) . Osserviamo che

$$\begin{aligned} S_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k b_k = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{16} + \cdots - \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{(2m)^2} = \\ &= - \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m-1} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{(2m)^2} \right) = \\ &= - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^2}. \end{aligned}$$

Poichè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ diverge, allora la successione

$$S'_{2m} = - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1}$$

diverge a $-\infty$; poichè la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ converge, allora la successione

$$S''_{2m} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)^2}$$

converge. Ne segue che la successione $S_{2m} = S'_{2m} + S''_{2m}$ diverge a $-\infty$. Inoltre, si ha che

$$S_{2m+1} = S_{2m} - \frac{1}{2m+1}.$$

Quindi anche

$$\lim_m S_{2m+1} = -\infty.$$

Poichè la successione (S_n) è

$$S_n = \begin{cases} S_{2m} & \text{se } n = 2m, \\ S_{2m+1} & \text{se } n = 2m + 1, \end{cases}$$

si ha che

$$\lim_n S_n = -\infty.$$

Quindi la serie data diverge.

Osservazione

a) In questo caso non si può applicare il criterio di Leibiniz. Infatti, si ha che:

1) $\lim_n b_n = 0$;

2) la successione (b_n) non è decrescente. Infatti,

$$b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{(2n)^2} = b_{2n}.$$

b) Anche se

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

è errato dire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \implies \text{converge,} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \implies \text{diverge} \end{cases}$$

e concludere di conseguenza che la serie diverge.

c) Si osserva che $b_n \not\sim \frac{1}{n}$ e $b_n \not\sim \frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono o convergono assolutamente le seguenti serie:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n(n+1)}$ [converge assolutamente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$]
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^\alpha}$ [converge, anche assolutamente, se $\alpha > 1$]
- c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ [converge, anche assolutamente, se $\alpha > 1$]
- d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{(n+1)^\alpha}$ [converge, anche assolutamente, se $\alpha > 0$]
- e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \alpha^n$ [converge, anche assolutamente, se $|\alpha| < 1$]
- *f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)$ [converge assolutamente se $\alpha < 0$,
converge ma non assolutamente se $0 \leq \alpha < 1$]
- g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\tan \alpha)^{2n}$ [converge, anche assolutamente, se
 $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$]
- h) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \sqrt[n]{n^5}$ [converge assolutamente se $\alpha < -1$,
converge ma non assolutamente se $-1 \leq \alpha < 0$]
- k) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4 + \alpha n}$ [converge assolutamente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$]

Svolgimento

- a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n(n+1)}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\cos^2(n\alpha) \leq 1$ per ogni n e per ogni α , si ha che

$$\frac{\cos^2(n\alpha)}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico anche

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Per il criterio del confronto la serie data converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

- b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{n^\alpha}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ per ogni n , si ha che

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2 + \sin n}{n^\alpha} \leq \frac{3}{n^\alpha}.$$

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$, per il criterio del confronto la serie data converge se $\alpha > 1$.

- c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\log n = o(n^\beta)$ per $n \rightarrow +\infty$ per ogni $\beta > 0$, si ha che

$$\frac{\log n}{n^\alpha} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha-\beta}}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\beta}}$ convergente se e solo se $\alpha - \beta > 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge se $\alpha > 1 + \beta$, per ogni $\beta > 0$. Quindi per ogni $\alpha > \inf\{1 + \beta : \beta > 0\} = 1$ la serie data converge.

Consideriamo ora $0 < \alpha \leq 1$. Poichè

$$\frac{1}{n^\alpha} = o\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \leq 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie data diverge.

Infine se $\alpha \leq 0$ non è verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie e di conseguenza la serie data diverge. Quindi la serie data converge se $\alpha > 1$.

- d) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{(n+1)^\alpha}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Si ha che

$$\arctan n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n}.$$

Poichè $\arctan x = x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, ne segue che

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{(n+1)^\alpha} = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \sim \frac{1}{n^{\alpha+1}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ convergente se e solo se $\alpha > 0$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge se $\alpha > 0$.

- e) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \alpha^n$ è a termini positivi se $\alpha > 0$, è nulla se $\alpha = 0$ ed è a termini di segno alterno se $\alpha < 0$. Consideriamo quindi $\alpha \neq 0$.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, ossia la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} |\alpha|^n.$$

Poichè

$$\frac{n}{n+1} |\alpha|^n \sim |\alpha|^n, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^n$ convergente se e solo se $|\alpha| < 1$, per il

criterio del confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} |\alpha|^n$ converge se e solo se $|\alpha| < 1$.

Quindi la serie data converge assolutamente se e solo se $|\alpha| < 1$.

Consideriamo ora $|\alpha| \geq 1$ e studiamo la convergenza. Osserviamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \alpha^n = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1, \\ \cancel{\exists} & \text{se } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, ne segue che per $|\alpha| \geq 1$ la serie data non converge. Quindi la serie data converge se $|\alpha| < 1$.

- *f) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, ossia la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

Poichè $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, si ha che

$$n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n^\alpha \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^{1-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right) \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Essendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ convergente se e solo se $\alpha < 0$, per il criterio del confronto

asintotico la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ converge se e solo se $\alpha < 0$. Quindi la serie data converge assolutamente se e solo se $\alpha < 0$.

Consideriamo ora $\alpha \geq 0$ e studiamo la convergenza. Poniamo $b_n = n^\alpha (e^{\frac{1}{n}} - 1)$. Per quanto osservato in precedenza, si ha che $b_n \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < 1, \\ 1 & \text{se } \alpha = 1, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \geq 1$ non è verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie e di conseguenza la serie data non converge.

Limitiamoci ora a considerare il caso $0 \leq \alpha < 1$.

2) Per $0 \leq \alpha < 1$ la successione (b_n) è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione f associata alla successione (b_n) , $f(x) = x^\alpha (e^{\frac{1}{x}} - 1)$ ristretta all'intervallo $[1, +\infty)$, si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = x^{\alpha-2} [e^{\frac{1}{x}}(\alpha x - 1) - \alpha x].$$

Poichè $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si osserva che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\frac{1}{x}}(\alpha x - 1) - \alpha x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) (\alpha x - 1) - \alpha x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\alpha x - 1 + \alpha - \frac{1}{x} + o(1) - \alpha x \right] = \alpha - 1 < 0. \end{aligned}$$

Ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \geq N$ si ha $e^{\frac{1}{x}}(\alpha x - 1) - \alpha x < 0$.

Di conseguenza per ogni $x \geq N$ si ha $f'(x) < 0$ e quindi f è decrescente su $[N, +\infty)$. Ne segue che la successione (b_n) è decrescente per ogni $n \geq N$.

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge, non assolutamente, se $0 \leq \alpha < 1$. In definitiva converge se $\alpha < 1$.

g) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\tan \alpha)^{2n}$ è a termini di segno alterno.

Osserviamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\tan \alpha)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\tan^2 \alpha)^n.$$

Quindi è una serie geometrica con ragione $-\tan^2 \alpha$. Pertanto converge, anche assolutamente, se e solo se $\tan^2 \alpha < 1$, cioè per $-\frac{\pi}{4} + k\pi < \alpha < \frac{\pi}{4} + k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

h) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^\alpha \sqrt[n]{n^5}$ è a termini di segno alterno.

Studiamo inizialmente la convergenza assoluta, ossia la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^\alpha \sqrt[n]{n^5} = \sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha + \frac{5}{n}}.$$

Poichè

$$n^{\alpha + \frac{5}{n}} \sim n^\alpha, \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n^\alpha$ convergente se e solo se $\alpha < -1$, per il criterio del

confronto asintotico la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha + \frac{5}{n}}$ converge se e solo se $\alpha < -1$ e di conseguenza la serie data converge assolutamente se e solo se $\alpha < -1$.

Consideriamo ora $\alpha \geq -1$ e studiamo la convergenza. Poniamo $b_n = n^\alpha \sqrt[n]{n^5} = n^{\alpha + \frac{5}{n}}$. Per quanto osservato in precedenza, si ha che $b_n \sim n^\alpha$ per $n \rightarrow +\infty$. Allora si ha che:

$$1) \lim_n b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \leq \alpha < 0, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0. \end{cases}$$

Quindi se $\alpha \geq 0$ non è verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie e di conseguenza la serie data non converge.

Limitiamoci ora a considerare il caso $-1 \leq \alpha < 0$.

2) Per $-1 \leq \alpha < 0$ la successione (b_n) è decrescente. Infatti, se consideriamo la funzione f associata alla successione (b_n) , $f(x) = x^{\alpha + \frac{5}{x}}$ ristretta all'intervallo $[2, +\infty)$, si ha che f è derivabile con

$$f'(x) = x^{\alpha + \frac{5}{x}} \left[\frac{5}{x^2} (1 - \log x) + \frac{\alpha}{x} \right].$$

Essendo $\alpha < 0$ si ha che si ha $f'(x) < 0$ per $x \geq 3$. Quindi f è decrescente su $[3, +\infty)$. Ne segue che la successione (b_n) è decrescente per ogni $n \geq 3$.

Quindi per il criterio di Leibniz la serie data converge, non assolutamente, se $-1 \leq \alpha < 0$. In definitiva converge se $\alpha < 0$.

k) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^4 + \alpha n}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha che

$$e^{-n^4 + \alpha n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty$$

ed essendo convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie e per tali valori calcolarne la somma:

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{x^n(x-6)^n} \quad \left[\begin{array}{l} \text{converge se } x < 3 - 2\sqrt{3}, \\ 3 - \sqrt{6} < x < 3 + \sqrt{6}, x > 3 + 2\sqrt{3}; \\ \text{somma: } \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x - 3} \end{array} \right] \\
 \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n} \quad \left[\begin{array}{l} \text{converge se } x < \frac{1}{2}; \\ \text{somma: } \frac{x}{1-2x} \end{array} \right] \\
 \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \log|x|} \right)^n \quad \left[\begin{array}{l} \text{converge se } x < -e^2, \\ -1 < x < 0, 0 < x < 1, x > e^2; \\ \text{somma: } \frac{1 - 2 \log|x|}{\log|x|} \end{array} \right] \\
 \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{nx} \quad \left[\begin{array}{l} \text{converge se } 0 < x < \frac{1}{3}; \\ \text{somma: } \frac{(3x)^x}{1 - (3x)^x} \end{array} \right] \\
 \text{e) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{2^n(x-1)^{2n}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{converge se } x < -1, x > 2, \\ \text{somma: } \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 2} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Svolgimento

a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{x^n(x-6)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{x(x-6)} \right]^n$ è una serie di potenze con ragione $\frac{3}{x(x-6)}$. Quindi converge quando $\left| \frac{3}{x(x-6)} \right| < 1$, cioè se

$$x < 3 - 2\sqrt{3}, \quad 3 - \sqrt{6} < x < 3 + \sqrt{6}, \quad x > 3 + 2\sqrt{3}.$$

Per tali x si ha che la somma è

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3}{x(x-6)} \right]^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{x(x-6)}} = \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 6x - 3}.$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$ è una serie di potenze con ragione $\frac{x}{1-x}$.

Quindi converge quando $\left|\frac{x}{1-x}\right| < 1$, cioè se $x < \frac{1}{2}$. Per tali x si ha che la somma è

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n - 1 = \frac{1}{1 - \frac{x}{1-x}} - 1 = \frac{x}{1-2x}.$$

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|}\right)^n$ è una serie di potenze con ragione $\frac{1}{1-\log|x|}$. Quindi

converge quando $\left|\frac{1}{1-\log|x|}\right| < 1$, cioè se

$$x < -e^2, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 1, \quad x > e^2.$$

Per tali x si ha che la somma è

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\log|x|}\right)^n - 1 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1-\log|x|}} - 1 = \frac{1-2\log|x|}{\log|x|}. \end{aligned}$$

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{nx} = \sum_{n=1}^{\infty} [(3x)^x]^n$ è una serie di potenze con ragione $(3x)^x$. Quindi converge quando $(3x)^x < 1$, cioè se $0 < x < \frac{1}{3}$. Per tali x si ha che la somma è

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{nx} = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^{nx} - 1 = \frac{1}{1 - (3x)^x} - 1 = \frac{(3x)^x}{1 - (3x)^x}.$$

e) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{2^n(x-1)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3-x}{(x-1)^2}\right]^n$ è una serie di potenze con ragione $\frac{3-x}{(x-1)^2}$. Quindi converge quando $\left|\frac{3-x}{(x-1)^2}\right| < 1$, cioè se $x < -1$, $x > 2$. Per tali x si ha che la somma è

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{3-x}{(x-1)^2}\right]^n = \frac{1}{1 - \frac{3-x}{(x-1)^2}} = \frac{(x-1)^2}{x^2 - x - 2}.$$

Esercizio 6. Sia (a_n) una successione positiva e crescente. Stabilire se convergono o non convergono le seguenti serie:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad [\text{diverge}]$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad [\text{non converge}]$$

Svolgimento

a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè (a_n) è crescente, per le proprietà delle successioni monotone si ha che $\lim_n a_n = l > 0$. Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, si ha che la serie data diverge.

b) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ è a termini di segno alterno. Poichè (a_n) è crescente, per le proprietà delle successioni monotone si ha che $\lim_n a_n = l > 0$. Ne segue che

$$\lim_n (-1)^n a_n \neq 0.$$

Quindi non essendo verificata la condizione necessaria per la convergenza della serie, si ha che la serie data non converge.

Osservazione

Essendo una serie a termini di segno alterno, una condizione sufficiente per la convergenza è il criterio di Leibniz, in base al quale se $\lim_n a_n = 0$ e la successione (a_n) è decrescente, allora la serie data converge.

Poichè questo criterio costituisce una condizione sufficiente, è errato dire che la serie data non converge perchè la successione (a_n) non è decrescente. Inoltre, negli Esercizi 3 s) e t) le serie convergono anche se (a_n) non è decrescente.

* **Esercizio 7.** Sia (a_n) una successione positiva tale che

$$\lim_n \frac{a_n}{n} = \alpha \in]0, +\infty[.$$

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{a_n}}$. [converge]

Svolgimento

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{a_n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Poichè $\lim_n \frac{a_n}{n} = \alpha \in]0, +\infty]$, allora si ha che $\lim_n a_n = +\infty$. Quindi $a_n^p = o(e^{a_n})$ per $n \rightarrow +\infty$ per ogni $p > 0$. Distinguiamo due casi:

1) se $\alpha \neq +\infty$, allora $a_n \sim \alpha n$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\alpha^2 n^2 \sim a_n^2 = o(e^{a_n}) \implies \frac{1}{e^{a_n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data converge.

2) se $\alpha = +\infty$, allora $n = o(a_n)$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi

$$n^2 = o(a_n^2) = o(e^{a_n}) \implies \frac{1}{e^{a_n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data converge.

Osservazione

Nel caso in cui $\alpha = 0$ non si può concludere nulla, come mostra l'Esercizio 8.

* **Esercizio 8.** Sia (a_n) una successione positiva tale che

$$\lim_n \frac{a_n}{\log n} = \alpha \in [0, +\infty].$$

Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{a_n}}$ diverge se $\alpha < 1$, converge se $\alpha > 1$, mentre per $\alpha = 1$ non si può concludere nulla.

Svolgimento

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{a_n}}$ è a termini positivi. Quindi o converge o diverge (positivamente).

Distinguiamo due casi:

1) se $\alpha = +\infty$, allora per la definizione di limite, esiste $N > 1$ tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{a_n}{\log n} > 2$. Quindi $a_n > \log n^2$ per $n \geq N$ e di conseguenza

$$\frac{1}{e^{a_n}} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \geq N.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio del confronto anche la serie data converge.

- 2) se $\alpha \neq +\infty$, allora per la definizione di limite, preso $\varepsilon > 0$ esiste $N_\varepsilon > 1$ tale che per ogni $n \geq N_\varepsilon$ si ha $\alpha - \varepsilon < \frac{a_n}{\log n} < \alpha + \varepsilon$. Quindi $(\alpha - \varepsilon) \log n < a_n < (\alpha + \varepsilon) \log n$ per $n \geq N_\varepsilon$ e di conseguenza

$$\frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}} < \frac{1}{e^{a_n}} < \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Consideriamo separatamente i casi $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ e $\alpha = 1$.

- a) Se $\alpha < 1$, allora per $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ si ha che $\alpha + \varepsilon < 1$. Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+\varepsilon}}$ diverge, per il criterio del confronto anche la serie data diverge.
- b) Se $\alpha > 1$, allora per $0 < \varepsilon < \alpha - 1$ si ha che $\alpha - \varepsilon > 1$. Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ converge, per il criterio del confronto anche la serie data converge.
- c) Se $\alpha = 1$, allora per $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{e^{a_n}} < \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}$ diverge mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ converge, ma non è possibile applicare il criterio del confronto.

In questo caso si ha che $a_n \sim \log n$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi $a_n = \log n + o(\log n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e di conseguenza

$$e^{a_n} = e^{\log n + o(\log n)} = n e^{o(\log n)} = n e^{\log n o(1)} = n n^{o(1)} = n^{1+o(1)}, \quad n \rightarrow +\infty$$

da cui

$$\frac{1}{e^{a_n}} = \frac{1}{n^{1+o(1)}}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Tutto ciò non consente di concludere nulla sull'ordine di infinitesimo di $\frac{1}{e^{a_n}}$ per $n \rightarrow +\infty$ e quindi non è sufficiente per stabilire né che la serie converge né che la serie diverge.

Se per esempio si considera $a_n = \log n - (\log n)^{1/2}$, allora $a_n = \log n + o(\log n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e

$$e^{a_n} = e^{\log n - (\log n)^{1/2}} = n e^{-(\log n)^{1/2}} = o(n), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Quindi

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{e^{a_n}}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Poichè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il criterio del confronto asintotico anche la serie data diverge.

Se invece si considera $a_n = \log n + (\log n)^{1/2}$, allora $a_n = \log n + o(\log n)$ per $n \rightarrow +\infty$ e

$$e^{a_n} = e^{\log n + (\log n)^{1/2}} = n e^{(\log n)^{1/2}}.$$

Essendo $x^p = o(e^x)$ per $x \rightarrow +\infty$ per ogni $p > 0$, si ha anche che

$$\log^p n = o\left(e^{(\log n)^{1/2}}\right), \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall p > 0.$$

Quindi per ogni $p > 0$ si ha

$$\frac{1}{e^{a_n}} = \frac{1}{n e^{(\log n)^{1/2}}} = o\left(\frac{1}{n \log^p n}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ converge se e solo se $p > 1$. Infatti, posto $b_n = \frac{1}{n \log^p n}$ consideriamo la funzione $f(x) = \frac{1}{x \log^p x}$ associata a b_n , cioè tale che $f(n) = b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Si ha che f è positiva e decrescente su $[2, +\infty)$. Quindi per il criterio di McLaurin la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ converge. Si ha che

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log^p x} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_2^c \frac{1}{x \log^p x} dx =$$

posto $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x} dx$, si ottiene

$$= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{\log 2}^{\log c} \frac{1}{t^p} dt = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt : \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } p \leq 1, \\ \text{converge} & \text{se } p > 1. \end{cases}$$

Quindi se si considera $p > 1$, essendo

$$\frac{1}{e^{a_n}} = o\left(\frac{1}{n \log^p n}\right), \quad n \rightarrow +\infty,$$

e la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^p n}$ convergente, per il criterio del confronto asintotico la serie data converge.

Questi due esempi mostrano che se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\log n} = 1$ non possiamo concludere nulla.

Osservazione

Non è vero che

$$a_n \sim b_n, \quad n \rightarrow +\infty \implies e^{a_n} \sim e^{b_n}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Infatti, nei due esempi visti precedentemente si ha

$$\log n - (\log n)^{1/2} \sim \log n + (\log n)^{1/2}, \quad n \rightarrow +\infty$$

e

$$e^{\log n - (\log n)^{1/2}} = o\left(e^{\log n + (\log n)^{1/2}}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Quindi se $0 < \alpha < +\infty$ non è vero che

$$a_n \sim \alpha \log n, \quad n \rightarrow +\infty \implies e^{a_n} \sim e^{\alpha \log n} = n^\alpha, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Pertanto è errato dire che se $0 < \alpha < +\infty$, allora

$$a_n \sim \alpha \log n, \quad n \rightarrow +\infty \implies e^{a_n} \sim e^{\alpha \log n} = n^\alpha, \quad n \rightarrow +\infty$$

e di conseguenza concludere che

$$\frac{1}{e^{a_n}} \sim \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \rightarrow +\infty.$$