Esercizi di Analisi Matematica 2

8 settembre 2009

Osservazioni

- Gli esercizi contrassegnati con un pallino sono dotati di figura. Le figure della terza funzione dell'esercizio 5 del foglio Ese 1/6 si chiama `VI5-3.fow` oppure `VI5-C.fow` All'interno di un esercizio le funzioni si numerano nel normale ordine di lettura.
- Questi esercizi sono stati preparati con in mente corsi dalla struttura che e' variata nel tempo. Gli esercizi che NON riguardano l'attuale programma di Analisi Matematica 2 sono i seguenti:
  - 1/D, esercizi 1-5
  - 2/D, esercizi 1-13
  - 3/D, esercizi 1-3
  - 4/D, esercizi 1-3

Questi esercizi costituiscono un utile ripasso degli argomenti studiati nei corsi di geometria.

Esercizi 1/D

1. Disegnare sul piano cartesiano i domini delle funzioni seguenti:

$$f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}}\,,\qquad f(x,y)=y^2+\log x^2\,,\qquad f(x,y)=\frac{1}{9-x^2-y^2}\,,$$
$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+y}}-\frac{1}{\sqrt{y-x}}\,,\qquad f(x,y)=\arcsin\tfrac{y-1}{x+1}\,,\qquad f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$$
$$f(x,y)=\log(x\sin y)\,,\quad f(x,y)=\log\left(1-\tfrac{x^2}{9}+\tfrac{y^2}{4}\right)\,,\quad f(x,y)=\log x+\log\cos y\,,$$
$$f(x,y)=\frac{e^{x\sin y}}{x(y-1)}\,,\qquad f(x,y)=\tfrac{e^{\sqrt{x}}}{y}\,,\qquad f(x,y)=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\log(x^2+y^2)}\,.$$

2. Per ciascuno dei domini precedenti, dire se è limitato, aperto, chiuso, connesso per archi.

3. Descrivere i domini delle seguenti funzioni di tre variabili:

   - $f(x,y,z)=\dfrac{z+1}{1-x^2-y^2}\,,$
   - $f(x,y,z)=\sqrt{x^2-y^2-z^2}\,,\quad f(x,y,z)=\log(1-x^2-y^2-z^2)\,,$

   $f(x,y,z)=\dfrac{z+x}{1-x^2-y^2}\,,$
   - $f(x,y,z)=\frac{1}{z-x^2+y^2}\,,$
   - $f(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-z^2}}\,.$

4. Calcolare le derivate parziali prime delle seguenti funzioni:

$$f(x,y)=e^{xy}(x^2-y^2)\,,\quad f(x,y)=\sin(x^2+y^2)-e^x\,,\quad f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{\log y}\,,$$
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2y^3}}{\log y}\,,\qquad f(x,y)=\tfrac{y}{\sin x}\,,\qquad f(x,y)=y^{\log x}\,.$$

5. Calcolare le derivate parziali seconde delle funzioni seguenti:

$$f(x,y)=\sin x\cdot y\quad f(x,y)=\sin(x^2+y^2)\quad f(x,y)=x^2\cdot\exp(x^2+y^2)$$
$$f(x,y)=x+x^3\cdot y\qquad f(x,y)=x^2+x^3y\qquad f(x,y)=x^2\sin y^2$$

6. Sia

   - $f(t,x)=\sin(x+t)\,.$

   Provare che tra le derivate parziali prime di $f(t,x)$ intercorre la relazione

$$f_t-f_x=0\,.$$

Disegnare il grafico delle funzioni $g(x) = \sin(x+t)$, per vari valori del parametro t, e delle funzioni $h(t) = \sin(x+t)$ per vari valori del parametro x.

7. Sia
$$f(t,x) = \sin(x-t)\,.$$
Provare che tra le derivate parziali prime di $f(t,x)$ intercorre la relazione
$$f_t + f_x = 0\,.$$
Disegnare il grafico delle funzioni $g(x) = \sin(x-t)$, per vari valori del parametro t, e delle funzioni $h(t) = \sin(x-t)$ per vari valori del parametro x.

8. Sia
$$f(t,x) = \sin(x+t) + e^{x-t}\,.$$
Provare che tra le derivate parziali seconde di $f(t,x)$ intercorre la relazione
$$f_{tt} - f_{xx} = 0\,.$$

9. Dire se, nei tre esercizi precedenti, i risultati dipendono dalla scelta fatta per le funzioni $f(x,t)$, rispettivamente $\sin(x+t)$, $\sin(x-t)$, $\sin(x+t)+e^{x-t}$.

10. Sia
$$f(x,y) = \log(x^2+y^2)\,.$$
Mostrare che tra le derivate parziali seconde della funzione $f(x,y)$ intercorre la relazione
$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \qquad (x,y) \neq (0,0)\,.$$

11. Sia
$$f(x,y) = \log[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]\,.$$
Mostrare che, per ogni scelta di (x_0,y_0), vale
$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \qquad (x,y) \neq (x_0,y_0)\,.$$

12. Mostrare che la funzione
$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) + 3\log[(x-1)^2 + (y-3)^2]$$
risolve
$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \qquad \text{per} \quad (x,y) \neq (0,0) \;\; (x,y) \neq (1,3)\,.$$

13. Sia
$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$
Mostrare che tra le derivate parziali seconde della funzione $f(x,y,z)$ intercorre la relazione
$$f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}=0 \qquad (x,y,z)\neq(0,0,0)\,.$$

14. Mostrare che la funzione
$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-x^2/4t\right)\,,$$
definita per $t>0$ ed ogni valore di x, risolve l'equazione $f_t = f_{xx}$.

15. Studiare il grafico delle funzioni
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-x^2/4t\right)$$
per vari valori di $t>0$, e delle funzioni
$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-x^2/4t\right)$$
per vari valori di x.

16. Calcolare gli integrali seguenti, per ogni valore del parametro x:
$$\int_0^y xs^2\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_0^y \sin xs\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_0^y \tan x^2 s\,\mathrm{d}s\,,$$
$$\int_0^y \mathrm{sgn}(xs)\,\mathrm{d}s\,, \quad \int_0^y \mathrm{sgn}[(x-1)s]\,\mathrm{d}s\,, \quad \int_0^y [(\mathrm{sgn}x)-1]s^2\,\mathrm{d}s\,.$$

17. Calcolare gli integrali seguenti, per ogni valore del parametro x:
$$\int_0^x e^{s/x}\,\mathrm{d}s\,, \quad \int_0^x \log(s\cdot\sin x)\,\mathrm{d}s\,, \quad \int_x^{x+1} e^{s\arctan x^2}\,\mathrm{d}s\,,$$
$$\int_0^{\mathrm{sgn}\,x} y\,\mathrm{d}y\,, \quad \int_0^{\{\mathrm{sgn}\,(x-1)+1\}} y\,\mathrm{d}y\,, \quad \int_0^{[x]} y\,\mathrm{d}y\,.$$
(nell'ultimo integrale, con la parentesi quadra si indica la *parte intera*. Ci si limiti al caso $x\geq 0$).

18. Con $f(x)$ si indica la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x < \pi \\ 2\pi + x & \text{se} \quad \pi < x < 2\pi \,. \end{cases}$$

Si calcoli

$$\int_0^{f(x)} \sin y \, \mathrm{d}y \,.$$

19. Per ciascuna delle funzioni seguenti, se possibile, esprimere nella forma $y = y(x)$ l'insieme di livello corrispondente alla generica quota z_0.

- $f(x,y) = x^2 + y^2$, • $f(x,y) = \sin xy$, $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2$.

- **Dare un esempio di funzione $f(x,y)$ definita per ogni (x,y), che ammette derivata seconda $f_{xy}(0,0)$, ma priva della derivata prima $f_y(0,0)$.**

Esercizi 2/D

1. Facendo uso direttamente della definizione, calcolare le derivate secondo un generico vettore $\mathbf{v}$, delle funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ nel generico punto (x_0, y_0).

2. Calcolare la derivata direzionale delle seguenti funzioni nel punto indicato e nella direzione del generico versore $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} \text{ in } (1,1)\,, \quad f(x,y) = e^{x+1} - 1 \text{ in } (0,0)\,, \quad f(x,y) = x\log(x^2+y^2) \text{ in } (1,0)\,.$$

3. Studiare la continuità la derivabilità secondo una generica direzione delle funzioni

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{in } (0,0) \\ \frac{x^2+y^2-(x-y)}{x^2+y^2} & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{in } (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{in } (0,0) \\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2} & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y=0 \\ \frac{\sin x\cdot y}{y} & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

4. Usando direttamente la definizione, stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili nel punto indicato:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \quad (2,3)\,, \quad f(x,y) = \frac{y}{x^2+1} \quad (0,0)\,.$$

5. Calcolare il differenziale nel generico punto (x_0, y_0) del dominio, e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, delle funzioni seguenti:

$$\bullet\ f(x,y) = x^2 + y^2\,, \quad \bullet\ f(x,y) = x\sin y\,, \quad f(x,y) = \arcsin\frac{x-y}{x+y}\,,$$

$$f(x,y) = \log(x^2y - xy^2)\,, \quad f(x,y) = \frac{e^{1/x}-e^{1/y}}{x-y} \quad f(x,y) = x\cdot\arctan y\,.$$

6. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni, nel punto indicato:

$$f(x,y) = \sqrt{xy^2}e^x \quad \text{in} \quad (1,1)\,, \qquad f(x,y) = x^2e^{xy} \quad \text{in} \quad (0,1)\,,$$

$$f(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad \text{in} \quad (-2,2)\,, \quad f(x,y) = \log(x^2\cdot y^2) \quad \text{in} \quad (2,2)\,,$$

$$f(x,y) = y^{\log x} \quad \text{in} \quad (e^2,2)\,, \qquad f(x,y) = e^{(\sin x)\cdot\cos y} \quad \text{in } (0,0)\,.$$

7. A lezione sono stati introdotti solamente i polinomi di Taylor del primo e del secondo ordine. Naturalmente esistono anche i polinomi di Taylor di ordine più alto. Tenendo conto di ciò, e usando gli sviluppi noti per le funzioni di una variabile, si scrivano i polinomi di McLaurin del terzo e del quarto ordine ordine della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + e^{x^4 - y^4}\,.$$

8. Per ciascuna delle funzioni seguenti, scrivere il polinomio di McLaurin del secondo ordine. Si usino i polinomi noti per le corrispondenti funzioni di una variabile.

$$f(x,y) = \sin xy\,, \quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2)\,, \quad f(x,y) = \cos(x^2-y^2)\,,$$
$$f(x,y) = x + x^3 y\,, \qquad f(x,y) = x^2 \sin y^2\,, \qquad f(x,y) = x^2 e^{(x^2+y^2)}\,.$$

9. Il punto $(0,0)$ è punto critico per ciascuna delle funzioni seguenti. Si scrivano i polinomi di McLaurin e, se possibile, si stabilisca il carattere del punto critico $(0,0)$.

   - $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)\,,$
   - $f(x,y) = \cos\sqrt{x^2+y^2}\,,$
   - $f(x,y) = x^2 + x^3 y\,,$
   - $f(x,y) = \sin xy\,,$
   - $f(x,y) = x^2 \sin y^2\,,$
   - $f(x,y) = x^2 \cdot \exp(x^2+y^2)\,,$
   - $f(x,y) = x^2 \cdot \exp(x^2+y^2) - y^4\,.$

10. Il punto $(0,0)$ è punto critico per ciascuno delle funzioni seguenti. Se possibile, stabilirne il tipo mediante lo studio della matrice hessiana.

$$f(x,y) = x\sin y - xy + x^2 + y^2\,, \quad f(x,y) = x^2 - 3y^3 + 2\cos y\,,$$
$$f(x,y) = [(x+1)e^x]^y\,, \qquad f(x,y) = (x^2+y^2)^3\,.$$

11. Il punto $(0,0,0)$ è punto critico per ciascuno delle funzioni seguenti. Se possibile, stabilirne il tipo mediante lo studio della matrice hessiana.

$$f(x,y,z) = x^2 z^2\,, \quad f(x,y,z) = x\sin xy + z\cos z\,, \quad f(x,y,z) = \tan x^2 + z\sin(z+y^2)\,.$$

12. Calcolare il differenziale della funzione composta $f(x(u,v), y(u,v))$ nel generico punto (u_0, v_0), in ciascuno dei casi seguenti:

$$\begin{array}{rll} f(x,y) = x\log y & x = u\cdot v & y = u - v\,, \\ f(x,y) = x\log y & x = u - v & y = u\cdot v\,, \\ f(x,y) = xe^{xy} & x = u\sin v & y = u\cdot v\,, \\ f(x,y) = x\sin y & x = \cos u & y = v\sin u\,, \\ f(x,y) = ye^x & x = \log u & y = v\,. \end{array}$$

13. Sia
$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, \qquad x(t) = \cos t\,, \qquad y(t) = \sin t\,.$$
Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $g(t) = f(x(t), y(t))$ nel generico punto t_0.

14. Per ciascuna delle due equazioni seguenti, trovare una soluzione della forma $y = y(x)$:
$$\sin^2 y + 2x \sin y = 1/2\,, \quad \log(xy) + \log^2(xy) - x = 0\,.$$

15. Trovare un'equazione differenziale per $y(x)$ sapendo che $y(x)$ è una funzione derivabile, che risolve una delle equazioni seguenti:
$$\begin{array}{ccc} x^2 + y^2 = 2\,, & 2x^3 + y^2 - 2x^2 y + 1 = 0\,, & y^2 = \dfrac{x+y}{x-y}\,, \\ y \log y = x & y e^{xy} = x\,, & y^2 - 1 = 0\,. \end{array}$$

16. Calcolare un'equazione differenziale risolta da y, sapendo che $y(x)$ risolve una delle due equazioni seguenti:
$$x^2 + y = y^2 - x\,, \qquad y^2 + \frac{x}{2} = y + \frac{x^2}{4}\,.$$

17. Si sa che la funzione $z(x,y)$ risolve l'equazione $z = xz + y$. Trovare alcune equazioni differenziali che devono soddisfare le derivate parziali prime e seconde di $z(x)$.

- **Dire se esiste una funzione che in un dato punto ammette derivate direzionali in ogni direzione, tutte positive.**

Esercizi 3/D

1. Sia • $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$.

   a) Mostrare che $(0,0)$ è un punto stazionario.

   b) Studiando i segni di $f(x,y)$, mostrare che $f(x,y)$ non è né punto di massimo né punto di minimo.

   c) sia $g(t) = f(x_0t, y_0t)$ la restrizione di $f(x,y)$ ad una qualunque retta per l'origine. Mostrare che $t = 0$ è punto di minimo per $g(t)$.

2. Calcolare il gradiente delle funzioni seguenti:

$$f(x,y) = \sin[x \cdot (y-1)]\,, \qquad f(x,y) = y \cdot e^x \qquad f(x,y) = \log x^y\,,$$
$$f(x,y,z) = x \cdot y \cdot z\,, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \cdot x_4\,, \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4) = e^{x_1+x_2+x_3+x_4}\,.$$

3. Si considerino le curve seguenti:

$$\bullet \begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3\,, \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} x(t) &= \sinh t \\ y(t) &= \cosh t\,, \end{cases} \quad \bullet \begin{cases} x(t) &= e^t \\ y(t) &= e^{-t}\,. \end{cases}$$

   Per ciascuna di tali curve, calcolare i vettori velocità $\mathbf{V}(t)$.

   Operare il cambiamento di parametro $t = \sinh \rho\tau$ con ρ parametro positivo. Calcolare i vettori velocità $\tilde{\mathbf{V}}(\tau)$, nella nuova parametrizzazione. Se esistono, identificare valori di ρ per cui $\tilde{\mathbf{V}}(0) = \mathbf{V}(t(0))$ (si noti che $t(0) = 0$).

4. Calcolare le linee di forza dei campi vettoriali seguenti

$$\bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \bullet \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}, \quad \bullet \begin{bmatrix} 1/x \\ 1/y \end{bmatrix}.$$

5. Si sa che $y(x)$ verifica una delle equazioni seguenti:

$$-\sin y + 2x - \log(x+1) = 0\,, \quad xe^y + 2(x-1)y = 0\,, \quad x \sin y + \log(1+y) + e^{xy} = 0\,.$$

   In ciascuno dei tre casi, si calcolino $y(0)$ ed $y'(0)$. Si specifichi in particolare se $y(0)$ è univocamente determinato.

6. Per ciascuna delle funzioni seguenti, identificare i punti nell'intorno dei quali può applicarsi il teorema della funzione implicita.

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1\,, \quad \bullet \quad f(x,y) = x^2 + xy\,, \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}\,,$$
$$\bullet \quad f(x,y) = (y-x-1)^2\,, \qquad f(x,y) = e^{x^2-y^2}\,, \qquad f(x,y) = \cos^2(xy) + \sin^2(xy)\,.$$

7. Identificare i punti nell'intorno dei quali può applicarsi il teorema della funzione implicita, per ciascuna delle funzioni seguenti:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ x^2+y^2-1/4\,, \end{bmatrix} \quad f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ e^{xyz}\,, \end{bmatrix} \quad f(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x^2-y^2+z} \\ x+y-z \end{bmatrix}.$$

8. Per ogni valore del parametro reale $\rho \neq 0$, studiare la possibilità di applicare il teorema della funzione implicita alla funzione seguente, da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$:

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2-1 \\ (x^2/\rho^2)+\rho^2 y^2+4z^2-1 \end{bmatrix}$$

9. Scrivere l'equazione parametrica della superficie luogo delle rette che congiungono i punti $(-1,t,0)$ e $(1,0,t)$, $t \in \mathbf{R}$. Esplicitare quindi l'equazione rispetto a x, rispetto ad y e quindi rispetto a z.

10. Si ruoti intorno all'asse z ciascuna delle seguenti curve del piano (x,z).

$$\bullet\ z = e^{-x^2}\,, \quad \bullet \begin{cases} x = t^2 - t \\ z = \cos \pi t\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2+\cos t \\ z = 2+\sin t\,. \end{cases}$$

Scrivere l'equazione della superficie ottenuta e la corrispondente matrice jacobiana.

11. Calcolare la lunghezza degli archi seguenti:

$$\bullet \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1-\cos t\,, \end{cases} t \in [0,\theta_0]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t\,, \end{cases} t \in [0,\theta_0]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = t\cos\log t \\ y = t\sin\log t\,, \end{cases} t \in [1,4]\,,$$

$$\bullet \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t\,, \end{cases} t \in [0,2\pi]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = t\sin t + \cos t\,, \end{cases} t \in [-\pi,\pi]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t\,, \end{cases} t \in [0,1]\,,$$

$$\bullet \begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2\,, \end{cases} t \in [0,1]\,, \quad \bullet\ y = \log(1-x^2) \quad -\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{1}{2}\,, \quad \bullet\ y = x^{3/2} \quad 0 \le x \le 1/4\,.$$

12. Studiare la regolarità dei seguenti archi di curva. Con ρ e θ si indicano le coordinate polari, ma la regolarità va studiata in coordinate cartesiane.

$$\bullet \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} t \in [-1,1]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \pi - t \end{cases} t \in [-1,1]\,, \quad \bullet \begin{cases} x = \log(t-1) \\ y = t - t^2 \end{cases} t \in [2,3]\,,$$

$$\bullet\ \rho = \theta^2 \quad \theta \in [0,3/2] \quad \bullet \begin{cases} \rho = t \\ \theta = t \\ z = t \end{cases} t \in [0,2\pi]\,, \quad \bullet \begin{cases} \rho = \theta^2 \\ z = \sin^2\theta \end{cases} \theta \in [-2\pi,2\pi]\,.$$

13. Calcolare la curvatura delle curve seguenti:

$$\begin{cases} x = t\cos\log t \\ y = t\sin\log t\,, \end{cases} \quad t \in [1,4]\,, \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t\,, \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]\,.$$

14. Si calcoli la distanza della retta $3x + 2y + 4 = 0$ dall'origine. Si calcoli la distanza prima sostituendo $y = \frac{-1}{2}[3x+4]$ nella funzione $x^2 + y^2$ e quindi usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

15. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si calcolino i punti estremali delle funzioni $g(x,y)$ sul vincolo $F(x,y) = 0$. I dati sono, rispettivamente,

- $g(x,y) = e^{x^2+y^2}$ $\quad F(x,y) = xy - 1\,,$
- $g(x,y) = x^2 - xy + y^2$ $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 4\,,$
- $g(x,y) = x - y^2$ $\quad F(x,y) = x^2 + y^2 - 9\,,$
- $g(x,y) = xe^y$ $\quad F(x,y) = e^y + x^2 - 3\,.$

16. Sia γ la curva

$$\gamma \quad x^4 + y^4 + 3xy = 2\,.$$

Trovare il raggio del più grande cerchio (di centro $(0,0)$) racchiuso da γ e quello del più piccolo cerchio (centrato in $(0,0)$) che la contiene.

17. Trovare gli estremi di

$$f(x,y) = x^4 + (y-1)^2$$

in

$$E = \Big\{(x,y) \mid \ 0 \le y \le 4 - x^2\Big\}\ .$$

18. Si verifichi che l'insieme di livello

$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x+1) = -1$$

è, in un intorno di $(0,-1)$, grafico di una funzione che ha punto di minimo in $x = 0$.

19. Si consideri la funzione

- $f(x,y) = \min\Big\{9 - (x^2+y^2), -3 + \sqrt{x^2+y^2}\Big\}$

e l'insieme di livello $f(x,y) = 0$. Si consideri l'insieme di livello in un intorno del suo punto $P(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

(a) dire se il teorema della funzione implicita può applicarsi;

(b) mostrare che l'insieme di livello è grafico di una funzione regolare e scrivere l'equazione della tangente al grafico di questa funzione nel punto P;

(c) Disegnare il grafico della funzione.

20. Dire in quali punti l'equazione $3x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ definisce implicitamente una funzione $z = z(x, y)$.

1. Scrivere cosa significa che *una funzione è definita in modo implicito.*

2. Scrivere cosa significa che *una curva è regolare.*

3. Mostrare, mediante opportuni contresempi, che l'affermazione seguente *è falsa:*

- **La proprietà di regolarità si conserva per cambiamento di parametro.**

Esercizi 4/D

1. Calcolare la divergenza e rotore dei campi vettoriali seguenti:

$$\bullet\ x^2\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j}\,, \quad \bullet\ x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}\,, \quad \bullet\ x \cdot y\,\mathbf{i} + \frac{x}{y}\,\mathbf{j}\,,$$

$$\bullet\ x\sqrt{1-y}\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}\,, \quad \bullet\ y\sqrt{z}\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{k}\,, \quad \bullet\ 2xy\,\mathbf{i} + (x^2+2y)\,\mathbf{j}\,.$$

2. Calcolare la matrice jacobiana delle trasformazioni seguenti:

$$\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + x\cdot y\,\mathbf{j} + (x^2-y^2)\,\mathbf{k}\,, \qquad \mathbf{F}(x,y,z) = x\cdot z\,\mathbf{i} + x\cdot y\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{F}(x,y) = e^x\,\mathbf{i} + e^y\,\mathbf{j}\,, \quad \mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x)\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + \sin y\,\mathbf{k}\,.$$

3. Usare la regola di derivazione della funzione composta per calcolare la matrice jacobiana di $F(G(u,v))$ nei casi seguenti:

$$F(x,y) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^3 \end{bmatrix}\,, \quad G(u,v) = \begin{bmatrix} \sin u \\ \cos v \end{bmatrix}\,;$$

$$F(x,y,z) = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ x\cdot y\cdot z \end{bmatrix}\,, \quad G(u,v) = \begin{bmatrix} u-v \\ u+v \\ u^2 \end{bmatrix}\,.$$

4. Si disegni il dominio D e quindi si calcolino gli integrali multipli seguenti:

$$\int_D x\cdot y\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid\ 0\le x\le 2\,,\ 0\le y\le 2x-x^2\}\,;$$

$$\int_D \frac{x}{1+y}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid\ 0\le x\le 1/2\,,\ x^2\le y\le x\}\,;$$

$$\bullet\ \int_D x\cos y\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid\ -1\le x\le 1\,,\ 0\le y\le 1-x^2\}\,;$$

5. Si calcolino gli integrali multipli seguenti

   (a) $\int_D xy\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, ove D è il semicerchio di centro $(1,0)$, raggio 1 ed $y>0$;

   (b) $\int_D x\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è il semicerchio di centro $(0,0)$, raggio 1 ed $x>0$;

   (c) $\int_D \exp y^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$;

   (d) $\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è il trapezio di vertici $(1,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, $(3,3)$;

   (e) $\int_D x^2\cdot(1+x^2y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2 (ci si limiti a ridurre l'integrale doppio ad un integrale semplice. Più avanti vedremo un modo più efficiente per calcolare quest'integrale);

(f) $\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$, ove D è il cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

(g) $\int_D xy(y+z)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove D è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$;

(h) $\int_D x^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove D è la sfera unitaria di centro $(0,0,0)$.

(i) Si calcoli $\int_D xyz^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ con $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid 0\le x\le 1\,,\ -x\le z\le x\,,\ x+z\le y\le 4\}$;

(j) $\int_D xyz\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ con $D=\{(x,y,z) \mid z^2\le x^2+y^2\,,\ \ z\ge x^2+y^2\}$.

6. Passando a coordinate polari o sferiche, si calcolino gli integrali multipli seguenti:

(a) $\int_D x^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 2;

(b) $\int_D \sqrt{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è la corona circolare di centro $(0,0)$ e raggi 1 e 3;

(c) $\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è il settore di cerchio di centro $(0,0)$, raggio 1 e contenuto nel primo quadrante;

(d) $\int_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ ove D è il cerchio individuato da $x^2+y^2=2x$;

(e) $\int_D (x-y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2<4\,,\ y\ge 0\}$;

(f) $\int_D x^2\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove D è la sfera unitaria di centro $(0,0,0)$.

7. Si calcoli $\int_D x^2y\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ con $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+z^2\le 1\,,\ 0\le y\le 1\}$;

8. Sugli integrali iterati:

(a) Scrivere l'integrale iterato seguente come integrale doppio e scambiare l'ordine di integrazione:

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\,.$$

(b) Passando a coordinate polari, si calcolino i seguenti integrali iterati:

i. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$;

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left[\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$.

9. Calcolare i volumi delle figure seguenti:

(a) • paraboloide $x^2+y^2\le z\le 1$;

(b) • delimitata dai due paraboloidi $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - x^2 - y^2$;

(c) • ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con a, b, c parametri non nulli;

(d) • iperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $-1 \leq z \leq 1$;

(e) • il solido delimitato dalle superfici $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$, $0 \leq x \leq 4$;

(f) • il solito intersezione dei cilindri di equazione $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+z^2 = 1$;

(g) • il solido ottenuto ruotando intorno all'asse z l'insieme

$$A = \left\{(x, y, z) \mid \ x = 0\,,\ 0 < z < \sin y^2\,,\ 0 < y < \sqrt{\pi}\right\}\ ;$$

10. Si calcolino i centri di massa delle figure seguenti (supposte omogenee):

(a) una piastra piana delimitata da $y^2 = x$, $x - y = 0$, $x \geq 0$;

(b) una piastra piana delimitata da $y = x^2$, $x + y = 2$;

(c) una semisfera.

11. calcolare il centro di massa del disco $x^2 + y^2 \leq 4x$ la cui densità in ogni punto è uguale alla distanza del punto dall'origine.

12. Per il calcolo degli integrali seguenti, si usino i cambiamenti di coordinate indicati:

(a) $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, per il calcolo dell'integrale $\int_D \sqrt{4 - (x/a)^2 - (y/b)^2}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, essendo D l'ellisse $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$

(b) $x = 2\rho\cos\theta$, $y = 4\rho\sin\theta$, per il calcolo dell'integrale $\int_D xy\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, essendo D l'ellisse $(x/2)^2 + (y/4)^2 \leq 1$

(c) $u = x+y$, $v = y/x$ per l'integrale $\int_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ (1/a) \leq x + y \leq a\,,\ (1/b) \leq (y/x) \leq b\}$, con a e b parametri positivi.

13. Si calcolino gli integrali seguenti:

(a) $\int_D \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ ove

$$D = \{(x, y, z) \mid \ x^2 + y^2 + z^2 - z \leq 0\,,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x/3\}\,;$$

(b) $\int_D \frac{1}{4-z}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$,

$$D = \{(x, y, z) \mid \ 9z \leq 1 + y^2 + 9x^2\,,\ 0 \leq z \leq \sqrt{9 - (y^2 + 9x^2)}\}\,;$$

(c) • $\int_D x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, ove D è l'insieme $\{(x,y,z) \mid \ 2x \le x^2+y^2+z^2 \le 1\}$;

(d) $\int_D \cosh(2y-x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ ove D è l'insieme $\{(x,y) \mid \ |2y-x| \le 2\,, \ |2y+x| \le 2\}$;

(e) $\int_D |x| y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ ove D è l'insieme $\{(x,y) \mid \ x+y \ge 0\,, \ x^2+y^2 \le 1\}$;

(f) $\int_D f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ ove

$$f(x,y) = \min\left\{\sqrt{x^2+y^2}, 1\right\}\,, \qquad D = \{(x,y) \mid \ x \ge 0\,, \ y \ge 0\,, \ x^2+y^2 \le 2\}\,.$$

14. Scambiare l'ordine di integrazione negli integrali seguenti

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x,y) \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \quad \int_0^1 \left[\int_{-x}^{e^x} f(x,y) \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x \quad \int_0^1 \left[\int_{e^{-x}}^{1/x} f(x,y) \, \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

15. Calcolare gli integrali seguenti

$$\int_D |x-1| y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ y \ge 0\,, \ \sqrt{2y-y^2} \le x \le 2-y\right\}\,,$$

$$\int_D |y-x| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ -1 \le x \le 1\,, \quad x^2 \le y \le 1\right\}\,,$$

$$\int_D |xy| \sin x^2 \cos y^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \le y \le \sqrt{\frac{\pi}{2} - x}\,, \ 0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}\,.$$

1. **Passando a coordinate polari, calcolare**

$$I_r = \int_D e^{-x^2-y^2} \, \mathbf{d}x \, \mathbf{d}y\,, \qquad D = \{(x,y) \mid \ x^2+y^2 < r^2\}\,;$$

2. **Calcolare** $I = \lim_{r\to+\infty} I_r$**.**

3. **Notare che** $e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$ **ed usare i risultati precedenti per mostrare che** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, \mathbf{d}x = \sqrt{\pi}/2$ **(questo integrale, noto come *integrale di Laplace,* è importantissimo per molte applicazioni, per esempio a problemi di probabilità).**

1. **Mostrare che** $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = 0$**,** $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\phi) = 0$ **rispettivamente per ogni campo vettoriale** F **e per ogni campo scalare** ϕ**.**

Esercizi 5/D

1. Calcolare i momenti di inerzia dei corpi seguenti, supposti omogenei, con densità 1. L'asse di rotazione (rispetto a cui i momenti di inerzia vanno calcolati) è ortogonale al piano della figura e passa per il punto P indicato.

   (a) di un disco (P giace sulla circonferenza);

   (b) di un'ellisse (P è il centro);

   (c) di un quadrato di lato l (P è un vertice);

   (d) di un rettangolo (P è il punto di intersezione delle diagonali);

   (e) di un triangolo isoscelle (P è il vertice opposto alla base).

2. Calcolare i momenti di inerzia (rispetto all'asse di rotazione) dei corpi seguenti, supposti omogenei, con densità 1 e ruotanti rispetto alla retta indicata.

   (a) di un disco, ruotante intorno ad una sua tangente;

   (b) di una sfera, ruotante intorno ad una retta ad essa tangente;

   (c) dell'ellissoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ruotante intorno all'asse delle ascisse.

   (d) di un guscio sferico, di raggi interno r ed esterno R, ruotante intorno ad un diametro.

3. Usare il teorema di Guldino per calcolare i volumi dei solidi di rivoluzione seguenti:

   (a) una sfera;

   (b) • il solido ottenuto ruotando una circonferenza intorno ad una sua tangente;

   (c) • il solido ottenuto ruotando la curva $y = 1/x$, $x_0 < x < x_1$, intorno all'asse delle ordinate;

   (d) • il volume di un toro (ottenuto facendo ruotare un disco del piano x, y intorno all'asse y. Il disco non interseca l'asse y).

4. Se $f(x)$, $x \in [a, b]$, è una funzione continua, il volume del solido ottenuto ruotandone il grafico intorno all'asse delle ascisse è dato da

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (1)$$

   Usare questa formula per calcolare i volumi seguenti:

(a) • il solido ottenuto ruotando la curva $y = 1/x$, $x_0 < x < x_1$, intorno all'asse delle ascisse.

(b) • il solido ottenuto ruotando l'*asteroide* $y = (1-x^{2/3})^{3/2}$, $-1 \leq x \leq 1$, intorno all'asse delle ascisse;

(c) il solido ottenuto ruotando la curva $y = x^3$, $0 < x < a$, intorno all'asse delle ascisse;

(d) il solido ottenuto ruotando la curva $y = e^x$, $0 < x < a$, intorno all'asse delle ascisse;

(e) il solido ottenuto ruotando la curva $y = \cosh x$, $0 < x < a$, intorno all'asse delle ascisse;

5. Usando sia la formula nota per il volume della piramide sia il calcolo mediante un integrale triplo, calcolare il volume della piramide delimitata dai piani coordinati e dal piano $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$, controllando che i risultati coincidano.

6. Calcolare i volumi dei solidi delimitati come segue

   (a) • dal cilindro $z = y^2/2$, dai piani $x = 0$ e $z = 0$ e dal piano $2x + 3y - 12 = 0$;

   (b) • dal piano $z = 0$ e dai cilindri $z = 4 - y^2$ e $y = x^2/2$;

   (c) • dal cono $z^2 = xy$, dai piani coordinati e dal cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$;

   (d) • dalla superficie $z = (\cos x)(\cos y)$, dai piani coordinati e dal piano $x + y = \pi/2$;

   (e) dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, dal piano $x = 0$ e dal piano $x - y = 0$;

   (f) dal cono $4y^2 = x(2 - z)$, dal piano $z = 0$ e dal piano $x + z = 2$;

   (g) dal paraboloide $z = x^2 + y^2$ e dai piani $z = 0$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ e $y = 6 - x$.

7. Usare il teorema di Guldino per calcolare l'area delle seguenti superfici di rivoluzione:

   (a) la superficie di una sfera;

   (b) la superficie del toro.

8. Esprimere in forma parametrica le superfici seguenti, calcolare la normale alla superficie e scrivere l'integrale che dà l'area della superficie stessa. Il calcolo esplicito dell'integrale non è richiesto.

(a) la superficie del paraboloide ottenuto ruotando $z = ax^2$, $0 \le x \le 1$ intorno all'asse z;

(b) superficie ottenuta ruotando $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$, intorno all'asse x;

(c) la superficie ottenuta ruotando la curva $y = x^3$, $0 \le x \le 1$, rispettivamente intorno all'asse delle ascisse oppure a quello delle ordinate.

9. Calcolare l'area delle calotte seguenti:

(a) • la calotta in $z \ge 0$ ottenuta tagliando la sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ col cilindro $x^2 + y^2 - rx = 0$;

(b) • calotta del paraboloide a sella $z = 2 + xy$ che si proietta ortogonalmente nel disco $x^2 + y^2 \le 1$ del piano $z = 0$;

(c) • la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ delimitata dalle condizioni $0 \le z \le 9 + xy$;

(d) la calotta del paraboloide $z = x^2 + y^2$ che si proietta ortogonalmente nella corona circolare $1 \le x^2 + y^2 \le 4$ del piano (x, y).

10. Calcolare gli integrali di superficie seguenti:

(a) $\int_\Sigma x \, d\Sigma$, Σ essendo la calotta dell sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nel primo ottante;

(b) $\int_\Sigma \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, d\Sigma$, Σ essendo la parte del cilindro $x^2+y^2 = R^2$ delimitata da $z = 0$ e $z = 2$;

(c) $\int_\Sigma \frac{1}{x^2} \, d\Sigma$, Σ essendo la calotta del paraboloide $z = xy$ delimitata dai cilindri $r^2 \le x^2 + y^2 \le R^2$ e dai piani $y = \pm x$, con $x \ge 0$;

(d) $\int_\Sigma |x| \, d\Sigma$, essendo Σ identificata dalle condizioni $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \ge 1$, $x^2 + z^2 \ge 1$ (ci si limiti a scrivere l'integrale e a passare in coordinate polari);

(e) $\int_\Sigma z(y - 2x) \, d\Sigma$, Σ essendo la calotta della sfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ che si proietta ortogonalmente sulla superficie $x^2 + 4y^2 \le 4$, $x \ge 0$ ed $y \ge 0$, $z = 0$.

(f) $\int_\Sigma \frac{x^2+y^2}{(1+e^{2z})^{1/2}} \, d\Sigma$, Σ essendo la porzione della superficie di equazione

$$z = -\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

giacente tra i cilindri $x^2 + y^2 = e^{-2}$ e $x^2 + y^2 = 1$.

11. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma x\, ds$, dove γ è l' arco di curva $y = x^2$ con $0 \le x \le a$.

12. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt{1-y^2}\, ds,$$

dove γ è l' arco di curva

$$\begin{cases} x &= \sin t \\ \\ y &= \cos t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]\,.$$

13. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{x}{1+y^2}\, ds,$$

dove γ è l' arco di curva

$$\begin{cases} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, \pi/2]\,.$$

14. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma y^2\, ds$, dove γ è l' arco di curva $y = e^x$ con $0 \le x \le \log 2$.

15. Determinare il centro di massa di un asta rettilinea di lunghezza l e non omogenea di densità $\rho(x) = e^x$.

16. Sia D il semidisco $\{(x, y) \mid x^2+y^2 < R^2\,,\ y > 0\}$. Supponiamo che la densità sia $\rho(r, \theta) = |\sin\theta|$. Calcolarne il centro di massa.

17. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ lungo la frontiera del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ percorsa in senso antiorario.

18. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$

    (a) lungo l'arco di circonferenza $x^2+y^2 = 1$ contenuto nel primo quadrante con primo estremo $(1, 0)$ e con secondo estremo $(0, 1)$.

    (b) lungo il segmento che va da $(1, 0)$ a $(0, 1)$.

19. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (1 - xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ lungo la curva γ

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \qquad t \in [0, 1] \\ z = t^3 \end{cases}$$

20. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y, z) = e^z\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + e^y\mathbf{k}$ lungo la curva γ

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \qquad t \in [0, 1] \\ z = e^t \end{cases}$$

21. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = \sin x\mathbf{i} + \cos y\mathbf{j}$ lungo la frontiera del triangolo di vertici $(0, 0)$,$(1, 0)$ e $(0, 1)$ percorsa in senso antiorario.

22. Calcolare il lavoro del campo $F(x, y) = (2e^y - ye^x)\mathbf{i} + (2xe^y - e^x)\mathbf{j}$ lungo la curva γ

$$\begin{cases} x = t(2 - t^2) \\ y = \sin(2\pi t) \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

1. Usando la definizione generale di volume, provare la validità della formula (1) dell'es. 4.

2. Provare che se una superficie è data in forma cartesiana, $z = f(x, y)$**, allora**

$$|N(x, y)| = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\,.$$

Esercizi 6/D

1. Ricondurre il calcolo delle aree delle superfici seguenti al calcolo della circuitazione di un campo vettoriale:

   (a) • area dell'ellisse;

   (b) • parte di piano delimitata dal segmento $0 \leq \rho \leq 2\pi$, $\theta = 0$ e dalla spira $\rho = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$;

   (c) • l'area individuata da una spira della spirale logaritmica $\rho = \log \theta$.

   (d) • regione interna alla curva semplice e chiusa parametrizzata da $x = \cos^2 \theta$, $y = \theta \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$;

2. Usando il Teorema di Stokes, si calcolino:

   (a) l'integrale
   $$\int_{\partial\Omega} (y - \sin x)\, \mathrm{d}x + \cos x\, \mathrm{d}y$$
   ove Ω è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, 1)$;

   (b) • la circuitazione del campo vettoriale
   $$-\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$$
   lungo una qualsiasi curva chiusa non passante per l'origine;

   (c) • l'integrale della forma differenziale
   $$(3x + 4y)\, \mathrm{d}x + (2x - 3y)\, \mathrm{d}y$$
   sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2;

   (d) • la circuitazione del campo vettoriale
   $$(x^2 + y^2)\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j}$$
   sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 2;

   (e) • l'integrale della forma differenziale
   $$(x^2 - 2xy)\, \mathrm{d}x + (x^2 y + 3)\, \mathrm{d}y$$
   lungo la curva semplice e chiusa il cui sostegno è costituito dal segmento della parabola $y^2 = 8x$, $0 \leq x \leq 2$, e dal segmento della retta $x = 2$ che ne congiunge gli estremi;

(f) le circuitazioni dei campi vettoriali

$$\mathbf{V}_1(x,y,z) = (x+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}\,,$$
$$\bullet\ V_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + (x+y+z)\mathbf{k}$$

lungo il bordo della superficie

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}\,, \qquad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \qquad -1 \le x \le 1\,.$$

Specificare l'orientazione scelta per il bordo della superficie e per la normale alla superficie.

3. Si usi la formula di Green per calcolare le aree delle regioni seguenti:

   (a) • compresa tra l'asse delle ascisse e l'arco di cicloide, $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$;

   (b) • regione delimitata da $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$, $0 \le \theta \le \pi/4$ e dall'asse delle ascisse.

4. Calcolare i flussi seguenti:

   (a) • flusso del campo vettoriale

   $$4xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}\,.$$

   uscente dalla superficie del cubo di centro l'origine e lati paralleli agli assi e di lunghezza 2;

   (b) • flusso del campo vettoriale

   $$4x\mathbf{i} - 2y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$$

   uscente dalla superficie della regione delimitata dal cilindro $x^2+y^2 = 4$ e dai piani $z = 0$ e $z = 3$.

5. Sia Σ una superficie regolare, frontiera di un aperto Ω. Sia V il volume di Ω e sia $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Provare che valgono le uguaglianze seguenti:

$$\int_\Sigma \mathbf{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = 3V\,;$$
$$\int_\Sigma (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = (a+b+c)V\,;$$
$$\int_\Sigma \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{se l'origine è } \textit{esterna} \text{ ad } \Omega \\ 4\pi & \text{se l'origine è } \textit{interna} \text{ ad } \Omega. \end{cases}$$

6. Negli esercizi seguenti, la normale alla superficie è orientata verso l'alto. Se la superficie si ottiene come giustapposizione di superfici regolari, è orientata verso l'alto la normale ad almeno una di esse. Calcolare:

   (a) • il flusso del rotore di
   $$(2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$$
   attraverso l'emisfero superiore della sfera $x^2+y^2+z^2=1$;

   (b) • il flusso del rotore di
   $$(y-z+2)\mathbf{i} + (yz+4)\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$$
   attraverso la parte della superficie del cubo seguente, che sta sopra al piano (x,y). Il cubo è delimitato dai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=2$, $z=2$;

   (c) • il flusso del rotore di
   $$xz\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$
   attraverso la superficie della regione delimitata dai piani $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$, e che non appartiene al piano $y=0$;

   (d) • il flusso del rotore di
   $$(x^2+y-4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz+z^2)\mathbf{k}$$
   attraverso l'emisfero inferiore della sfera $x^2+y^2+z^2=16$;

   (e) • il flusso del rotore di
   $$(x^2+y-4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz+z^2)\mathbf{k}$$
   attraverso la parte del paraboloide $z=(x^2+y^2)-4$ che sta sotto al piano $z=0$;

   (f) • il flusso del rotore di
   $$2yz\mathbf{i} - (x+3y-2)\mathbf{j} + (x^2+z)\mathbf{k}$$
   attraverso la superficie dell'intersezione dei due cilindri $x^2+y^2=1$ e $x^2+z^2=1$ che è contenuta nel primo ottante.

7. Sia Σ una superficie regolare chiusa e sia $\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A}$. Supponiamo che H sia regolare nella regione delimitata da Σ e su Σ stessa. Provare che il flusso attraverso Σ è nullo.

8. Sia Σ una superficie regolare, frontiera di un aperto Ω. Sia $\mathbf{n}$ un campo vettoriale regolare su $\Omega \cup \Sigma$ che in ogni punto di Σ coincide col versore normale. Sia S l'area di Σ. Provare che

$$\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{n}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = S\,.$$

9. *Si ricordi che un campo vettoriale si dice conservativo quando ammette un potenziale; e il campo è conservativo se e solo se la corrispondente* 1*–forma differenziale è esatta. In tal caso, le primitive della forma differenziale sono niente altro che i potenziali del campo vettoriale. Con questo in mente si risolvano gli esercizi seguenti:*

   (a) • Dire se la forma differenziale

   $$\frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}\,\mathrm{d}y$$

   è esatta;

   (b) • Individuare in quali regioni sono esatte le seguenti forme differenziali e calcolarne le primitive:

   $$\left(2xy - \frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y\,,$$
   $$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x + \left\{2y + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right\}\,\mathrm{d}y\,;$$

   (c) • Individuare le regioni in cui la forma differenziale seguente è chiusa;

   $$\frac{2x+y}{1+x^2+xy}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{1+x^2+xy}\,\mathrm{d}y\,;$$

   (d) • dire per quali valori dei parametri a e b è conservativo il campo vettoriale

   $$ay^2\,\mathbf{i} + bxy\,\mathbf{j}$$

   e calcolarne i potenziali;

   (e) • provare che il campo vettoriale

   $$-\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

   non ammette potenziale su $\mathbf{R}^2$. Individuare regioni in cui i potenziali esistono e calcolarli.

10. Individuare funzioni $\phi(x,y)$ in modo tale che le forma differenziali siano esatte su $\mathbf{R}$:

$$x^2y\,\mathrm{d}x+\phi(x,y)\,\mathrm{d}y\,,\quad xy^2\,\mathrm{d}x+y\phi(x,y)\,\mathrm{d}y\,,\quad (\sin x+\sin y)\,\mathrm{d}x+(\cos y)\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\,.$$

11. Calcolare le primitive delle forme differenziali seguenti:

$$\begin{aligned}
&yz\,\mathrm{d}x+xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z\,,\\
&\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y+\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z\,,\\
&\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Esercizi 7/D

1. Provare che non convergono le serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5^n \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}\,.$$

2. Si sa che

$$n! \asymp \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}\,.$$

   Si usi questa formula per provare che non converge la serie seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n!} (4n)^n\,.$$

3. Usando il criterio del confronto, si provi la convergenza delle serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}\,, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n-1)}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\log n}{1+n^2}\,, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \log n}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \sin n}{n!}\,.$$

4. Si studi la convergenza delle serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{1/n} - 1\right)^n \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1/n}}{(n+1/n)^n}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n^2} \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^2} \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\log n)\right]\,.$$

5. Per ogni valore del parametro reale α (non zero) si studi la convergenza delle serie seguenti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\alpha^n}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{5^n}\,, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2^n-1)\alpha^n}\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n \alpha^n\,.$$

6. Usando il criterio del rapporto o quello della radice, individuare valori del parametro reale x per i quali convergono le serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{3^{n-2}}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n!) x^n\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n!}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\pi}{n+1} x^n\,, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3n-1}\frac{1}{4^n} x^{2n}\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{2n}\,,$$

7. Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x|^{nx}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^x}\,, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\log x} x}\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 5^n \sin(3^n x)\,,$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-n} \sin(3^n x)\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{n^2+1}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 4^{n^2} x^{2n}$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\sqrt{n}}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^x x^n\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{1+x^{2n}}$$

8. Si svolgano i tre esercizi seguenti:

   - Mostrare che la serie
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}\,, \qquad x > 0$$
   converge per ogni $\alpha > 0$ e converge uniformemente per $\alpha > 1/2$.
   - Studiare la convergenza delle successioni di funzioni $(f_n)(x))$ con $f_n(x)$ definita, rispettivamente, da:
   $$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\,, \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \le 0 \\ n^2(x-1/n)^2 & \text{se} \quad 0 < x < 2/n \\ 1 & \text{se} \quad x \ge 2/n\,. \end{cases}$$

- Si studi la convergenza delle serie di funzioni $(f_n(x))$ seguenti, e delle serie numeriche (a_n), con

$$a_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Le serie di funzioni sono:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ n & \text{se} \quad (1/n) \le x \le 2/n \\ 0 & \text{se} \quad (2/n) \le x \le 1\,, \end{cases} \qquad f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{se} \quad 0 \le x \le 1/n \\ 1/\sqrt{x} & \text{se} \quad (1/n) \le x \le 1\,. \end{cases}$$

9. Calcolare i raggi di convergenza delle serie di potenze seguenti

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n \frac{(x-3)^n}{n4^n} \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n}(x-1)^{3n}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n!)x^{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{n^n}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n x^n}{2^n}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^{2n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \log\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) x^n\,, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right) x^n\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^n x^n\,,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{(-1)^n n} x^n\,, \quad \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n[2 + (-3)^n]x^n\,, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \{2^n + (-1)^n 3^n\}\, x^n\,,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^{2n}\,, \qquad \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n!}\,, \qquad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^{3n}\,.$$

10. Studiare la convergenza uniforme delle serie seguenti, sugli intervalli indicati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^3} \qquad x \in [-1, 1]\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \cos(nx) \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{-n} \qquad \begin{cases} x \in (0, 1) \\ x \in [1/2, 2/3] \\ x \in (1, 2) \\ x \in [4, 5] \\ x \in [2, +\infty)\,. \end{cases}$$

11. Calcolare la derivata e l'integrale termine a termine delle serie seguenti e individuare le relazioni con la serie geometrica oppure la serie esponenziale:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\,, \quad \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}\,.$$

12. Scrivere il prodotto alla Cauchy delle serie seguenti:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n & \text{e} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n \\
\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} & \text{e} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (5x)^n & \text{e} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n\,, \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n & \text{e} & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-n} x^n \\
\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n & \text{con} & \text{se stessa.}
\end{array}$$

13. Scrivere in termini di funzioni elementari e calcolare la somma della serie che si ottiene calcolando il prodotto alla Cauchy delle due serie seguenti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n\,.$$

14. Scrivere gli sviluppi di Taylor di centro $x_0 = 0$ delle funzioni seguenti, specificando il raggio di convergenza:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\frac{1}{1-x}\,, & \tfrac{1}{1-x^2}\,, & \displaystyle\frac{1}{1+x^2}\,, \\
\displaystyle\frac{1}{(x-1)(2-x)}\,, & \tfrac{1}{(x-1)(1-2x)}\,, & \displaystyle\frac{1}{(x^2-3x+2)}\,, \\
(1-x)e^{-x}\,, & e^{-x^2}\log(1+x)\,, & \displaystyle\frac{\log(1+x)}{(1+x)}\,, \\
e^x \cdot \sqrt{1-x^2}\,, & (x-2)^2+(x+3)^3\,, & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(s-1)(2-s)}\,\mathrm{d}s\,, \\
\displaystyle\int_0^x s^2 e^{-s}\,\mathrm{d}s\,, & \textstyle\int_0^{2x} s^3 \sin s\,\mathrm{d}s\,, & \displaystyle\int_0^x s(1-s)^{-1}\,\mathrm{d}s\,.
\end{array}$$

Gli integrali non vanno preventivamente calcolati.

15. Scrivere in termini di seni e coseni i polinomi trigonometrici seguenti:

$$-e^{-ix} + 2 - e^{ix}\,, \qquad (1+2i)e^{-2ix} - e^{-ix} + 2 - e^{ix} + (1-2i)e^{+2ix}\,,$$

16. Scrivere i polinomi trigonometrici seguenti mediante l'esponenziale complessa:

$$\sin 2x + 5\cos 3x\,, \quad -\sin 3x + 5 + \cos 4x\,, \quad \sin 2x + \cos x + \sin 4x\,.$$

17. Disegnare i grafici delle estensioni per periodicità delle funzioni seguenti. Il periodo è 2π.

$$f(x) = |\tan x|\,,\ -\pi \le x \le \pi\,, \qquad f(x) = x^2\,,\ 0 \le x \le 2\pi\,,$$
$$f(x) = |x-1|\,,\ -\pi \le x \le \pi\,, \quad \begin{cases} \sin x & \text{per} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{per} \quad -\pi \le x \le 0\,. \end{cases}$$

18. Si verifichi che lo sviluppo in serie di Fourier di soli seni della funzione, definita per $x \in [0,\pi]$, $f(x) = \pi$ è

$$4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,.$$

Si usi il risultato trovato per mostrare che

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\cdots$$

19. La serie di Fourier della funzione $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, è

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)\,.$$

Usare quest'espressione e la formula di Parseval per provare che

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

20. Sia

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n^2+8)} \cos nx\,.$$

Usare la formula di Parseval per rappresentare in forma di serie numerica il numero

$$\int_0^\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

21. Sapendo che

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4+n} \sin nx$$

si rappresenti

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

in forma di serie numerica.

Esercizi 8/D

Come al solito, il segno $\bullet$ indica che l'esercizio è accompagnato da figure. Il segno ($\star$) indica gli esercizi più complessi.

1. Scrivere in forma di sistema le equazioni seguenti:

$$x^{(3)} + x'x^2 + \sin x'' = \cos t$$
$$x^{(4)} + x' - 3x'' = e^t$$
$$x^{(3)} + xx'' = 0\,.$$

2. Si sa che $x(t)$ ed $y(t)$ risolvono i problemi di Cauchy seguenti, con istante iniziale t_0, e che $v(t) = H(x(t), y(t))$ (la funzione $H(x, y)$ è specificata sotto). Calcolare $v'(t_0)$.

$$\begin{cases} x' &= 3x \\ y' &= -x^2 \end{cases} \qquad x(t_0) = 2\,,\ y(t_0) = 0\,, \quad H(x, y) = e^{xy}$$
$$\begin{cases} x' &= 3x - y^2 \\ y' &= -x^2 \end{cases} \qquad x(t_0) = 0\,,\ y(t_0) = 1\,, \quad H(x, y) = x^2 - y^2$$
$$\begin{cases} x' &= x - xy \\ y' &= y \end{cases} \qquad x(t_0) = 0\,,\ y(t_0) = 1\,, \quad H(x, y) = y \sin(x - y)$$

3. Sia

$$x'' + 2tx' + 3x = 0$$

e sia

$$y(t) = x(t - 1)\,.$$

Trovare l'equazione differenziale risolta da $y(t)$. Si ripeta quest'esercizio nei casi seguenti:

$$\begin{aligned} x'' &= 3t^2 x + \sqrt{1 + x^2} & y(t) &= x(t - 1) \\ x'' &= -3e^{-t} x + \sqrt{1 + e^x} & y(t) &= x(t + 3) \\ x'' &= -3x + \sqrt{1 + e^x} & y(t) &= x(t - 3) \\ x'' &= x + \sqrt{1 + x^2} & y(t) &= x(t + 4)\,. \end{aligned}$$

4. Sia

$$x' = 3x - y \qquad y' = x + y$$

e sia

$$\xi(t) = x(2t)\,, \qquad \eta(t) = y(t)\,.$$

Trovare le equazioni differenziali risolte da ξ ed η.

Si ripeta nei seguenti casi

$$
\begin{array}{cccc}
x' = 3xy & y' = -x & \xi(t) = x(3t) & \eta(t) = y(2t) \\
x' = 3x - y & y' = x^2 & \xi(t) = x(3t) & \eta(t) = y(3t) \\
x' = 3y - x & t' = tx^2 & \xi(t) = x(3t) & \eta(t) = y(3t)\,.
\end{array}
$$

5. Sia $x(t) = r(t)\cos(\theta(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\theta(t))$. Si sa che $x(t)$ ed $y(t)$ risolvono i sistemi seguenti. Trovare i sistemi risolti da $r(t)$ e $\theta(t)$:

$$
\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2y \\ y' & = & x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2y(x^2+y^2) \\ y' & = & -x(x^2+y^2)\,. \end{array}\right.
$$

6. Sia y soluzione di
$$t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0$$
e sia
$$\eta(t) = y(e^t)\,.$$
Trovare l'equazione differenziale risolta da $\eta(t)$ e quindi trovare tutte le soluzioni $y(t)$, $t > 0$.

7. Sia $y(t)$ soluzione di
$$y' = y + ty^2\,, \qquad y(0) = 2\,.$$
Trovare l'equazione differenziale risolta da
$$\eta(t) = 1/y(t)$$
e quindi determinare la funzione $y(t)$.

8. Trovare le soluzioni in forma $y = y(x)$ dei sistemi seguenti, individuando gli insiemi del piano (x, y) ove la procedure è lecita.

$$
\left\{\begin{array}{l} x' = y \\ y' = x \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = x \\ y' = x + y \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = xy \\ y' = x/y\,. \end{array}\right.
$$

9. Risolvere il problema
$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}\,, \qquad \mathbf{x}(1) = \mathbf{x}_0$$

nei casi seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

10. Dire in quali punti non può applicarsi il teorema di Cauchy per l'esistenza e unicità di soluzione, per le seguenti equazioni scalari del primo ordine:

$$\begin{array}{rl} y' = \sqrt{|t|} & y' = \sqrt{|y|} \\ y' = t|t| & y' = y|y| \\ (\star) \qquad y' = [\operatorname{sgn} x]\left[e^{y\sqrt{x}} - 1\right] & (\star) \qquad y' = [\operatorname{sgn} y]\left[e^{yx} - 1\right] . \end{array}$$

11. Dire in quali punti non può applicarsi il teorema di Cauchy per l'esistenza e unicità di soluzione, per i seguenti sistemi del primo ordine:

$$\begin{cases} x' = x|x| \\ y' = |y|y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = y|x| \\ y' = |y|x \end{cases} \quad \begin{cases} x' = |x|^2 \\ y' = |y| . \end{cases}$$

12. • Disegnare i campi vettoriali delle equazioni differenziali seguenti e dedurne il comportamento qualitativo di alcune orbite:

$$\begin{array}{rl} x' = 1 & y' = 2y + 1 - 4e^{x/5} \\ x' = 1 & y' = 2y + 1 - 4e^{x^2/10} \\ x' = \frac{1}{10}x(2-y) & y' = \dfrac{1}{10}y(x-3) \end{array}$$

13. • Disegnare campo il vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = f(x, y)\mathbf{i} + g(x, y)\mathbf{j}$ e le isocline quando il sistema di equazioni differenziali è

$$x' = f(x, y) \qquad y' = g(x, y)$$

con

$f(x,y)$	$-y$	yx	$3xy$
$g(x,y)$	$2x$	y	$2xy$

14. • Disegnare campo il vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\mathbf{i} + g(x,y)\mathbf{j}$ e le isocline quando il sistema di equazioni differenziali è quello ottenuto, introducendo $y = x'$, dalle equazioni del second'ordine seguenti:
$$x'' = -x', \quad x'' = \sin x, \quad x'' = \sin x - x'.$$

15. Nei casi dei due esercizi precedenti, scrivere il campo vettoriale ortogonale ad $\mathbf{F}(x,y)$ e le equazioni differenziali delle orbite di tale campo.

16. • Verificare che esistono e calcolare gli integrali primi dei sistemi seguenti
$$\begin{array}{cc} x' = y/5 & y' = x/5 \\ x' = y/5 & y' = 4x \\ x' = x & y' = -y \\ x' = -y\cos\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) & y' = x\cos\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right) \end{array}$$

17. Individuare tra i seguenti i sistemi che sono hamiltoniani e per essi calcolare un integrale primo.
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x/y^2 \\ y' & = & -1/y\,, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x \\ y' & = & -x\,, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x' = -xe^{-y} \\ y' = -e^{-y}\,, \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \sin y \\ y' & = & -\cos x\,, \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \cos x \\ y' & = & y\sin x\,, \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x' & = & y\cos y \\ y' & = & x\{y\sin y - \cos y\}\,. \end{array}\right.$$

18. Calcolare potenziale ed energia totale dei sistemi seguenti
$$2x'' = -x^2\,, \quad 3x'' = -x^3\,, \quad x'' = x\log x\,,$$
$$2x'' = xe^{-x}\,, \quad 4x'' = -\sin x\,, \quad 2x'' = \cos x\,.$$

19. • Usando il Teorema di Lagrange, si studi la stabilità della posizione di equilibrio $(0,0)$ dei sistemi seguenti:
$$\begin{array}{ll} x' = y & y' = -x \\ x' = y & y' = -x^3 \\ x' = y & y' = -\sin x \\ x' = y & y' = -x^3 + x^4 \\ x' = y & y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3}x^2 \end{array}$$

20. Studiare la stabilità della posizione di equilibrio $(0,0)$ dei sistemi seguenti, eventualmente al variare del parametro α. Non è richiesto di trovare esplicitamente la soluzione dei sistemi.

$$\begin{cases} x' &= -2x-4y \\ y' &= -x+y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= 2x+y \\ y' &= 3x+4y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x-y \\ y' &= y-4x\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= x+5y \\ y' &= -x-3y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= x-2y \\ y' &= x-4y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -3x\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= \alpha x+\alpha y \\ y' &= x+y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= \alpha x+2y \\ y' &= (\alpha+1)x+3y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= 2\alpha x+2\alpha y \\ y' &= -\alpha x+3y\,. \end{cases}$$

21. Se possibile, studiare la stabilità di $(0,0)$ nel caso dei sistemi seguenti, usando il teorema relativo alla stabilità in prima approssimazione.

$$\begin{cases} x' &= 2x+y^2 \\ y' &= 6x-y^2\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -4x-2y \\ y' &= -y+xy\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -x^2-y^2 \\ y' &= 2xy\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= x^2-y-x \\ y' &= -y\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -y \\ y' &= x+x^2\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x-y-(x^2+y^2)\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= 2x+1-\cos y \\ y' &= 6x-\sin(x^2-y^2)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -x^2-y^2-\sin x \\ y' &= -\sin y\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -y-\tan x \\ y' &= -y+(\sin x)(\cos y)\,. \end{cases}$$

22. • Mostrare che in un intorno dell'origine non esistono integrali primi per i seguenti sistemi (tracciare prima le orbite. . .):

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -y \\ y' &= 5x-2y\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -2x+\frac{1}{2}y \\ y' &= 2x-2y\,. \end{cases}$$

23. Mostrare che in un intorno dell'origine non esistono integrali primi per i seguenti sistemi (usare il teorema di stabilità in prima approssimazione...):

$$\begin{cases} x' &= x^2+2xy+\sin x \\ y' &= -3y-5xy\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= -x+e^{-y}-1 \\ y' &= e^{x-y}-1\,. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' &= 1+x-e^{-y} \\ y' &= 1-e^{x-y}\,. \end{cases}$$

24. Passando a coordinate polari, per ciascuno dei seguenti sistemi;
-si traccino le orbite, indicando come sono percorse;
-si dederminino le orbite periodiche e il loro periodo;
- si dica quali condizioni iniziali danno luogo a soluzioni (massimali) definite

$\forall t \geq 0$, oppure $\forall t \leq 0$, o ancora $\forall t \in \mathbf{R}$;
–si studi la stabilità della soluzione nulla e il suo bacino di attrazione.

$$\begin{cases} x' &= -y + x(1 - \sqrt{x^2+y^2}) \\ y' &= x + y(1 - \sqrt{x^2+y^2}), \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= y + x(4 - x^2 - y^2) \\ y' &= -x + y(4 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= x^3 + xy^2 - x - y \\ y' &= y^3 + x^2 y + x - y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= x^3 + xy^2 - x + y \\ y' &= y^3 + x^2 y - x - y. \end{cases}$$

25. Si traccino le orbire dei sistemi che si ottengono linearizzando quelli dati nell'esercizio precedente. Confrontare i risultati con quelli ottenuti sopra.

26. • Tracciare le orbite dei seguenti sistemi, indicando come vengono percorse (trovare precedentemente un integrale primo. . .).

$$\begin{cases} x' &= e^{-x} \\ y' &= -ye^{-x}. \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= y - x^2 y - y^3 \\ y' &= x^2 + y^2 - 1. \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= 2x^2 y \\ y' &= x(y^2+1). \end{cases}$$

27. • Le figure riportano le orbite dei seguenti sistemi. Precisare come vengono percorse.

    $\star$ Si verifichi la correttezza delle orbite proposte, calcolando per ciascun sistema un integrale primo.

$$\begin{cases} x' &= -y(x^2 - y^2) \\ y' &= 4(x-1)(x^2 - y^2). \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= x - xy \\ y' &= -y + y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= 2x - x^3 - xy^2 \\ y' &= 2y - y^3 - x^2 y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= xy + y^2 \\ y' &= -x^2 + xy. \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= 4x^4 + 4x^3 y, \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= 2x^2 + xy \\ y' &= x^2 - 2xy. \end{cases}$$

28. Determinare le orbite periodiche dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x' &= -y(1 - xy) \\ y' &= x(1 - xy). \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= -2y(x^2 - y) \\ y' &= 8x(x^2 - y). \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= 2x^2 + xy \\ y' &= x^2 - 2xy. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' &= e^y(x - y) \\ y' &= e^y(x + y). \end{cases}$$

29. ($\star$) Dato il sistema

$$x' = y(x - y + \alpha) \qquad y' = -x(x - y + \alpha)$$

    (a) determinare per quali valori del parametro reale α esiste almeno una soluzione periodica non costante;

(b) posto $\alpha = -2$, si consideri la soluzione $(x(t), y(t))$ tale che $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$. Calcolare $\lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t))$.

(c) posto $\alpha = 1$, determinare le eventuali soluzioni che ammettono lo stesso limite $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ sia per $t \to +\infty$, sia per $t \to -\infty$, e determinare il punto (x_0, y_0);

30. Per ciascuna delle seguenti proprietà, produrre un esempio di un sistema lineare omogeneo 2×2 che la soddisfi:
–la matrice dei coefficienti non è diagonalizzabile;
–il sistema ammette la soluzione $x(t) = e^{-t},\ y(t) = -e^{-t}$;
–la matrice dei coefficienti ha l'autovalore $\lambda = 3 + 2i$;
–tutte le soluzioni sono limitate sia in passato, sia in futuro e esistono soluzioni non costanti;
–il sistema ha una soluzione non costante con sostegno contenuto nell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$;
–il sistema ha infiniti punti critici sulla retta di equazione $x + 2y = 0$ e almeno una soluzione non costante,
–il sistema ha tre punti critici non allineati;
–il sistema è equivalente ad un'equazione del secondo ordine;
–il sistema non è equivalente ad un'equazione del secondo ordine;
–il sistema ha esattamente una soluzione limitata in futuro;
–esistono soluzioni non costanti che tendono a zero per $t \to +\infty$ e altre che sono illimitate per $t \to +\infty$;
– $(\star)$ il sistema ammette una soluzione non costante con sostegno contenuto nella parabola di equazione $x - y^2 = 2$.

31. Si consideri la soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema

$$\begin{cases} x' &= -e^{-y} - 1 \\ y' &= -2x\,, \end{cases}$$

soddisfacente $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Mostrare che il suo sostegno, in un intorno di $(1, 0)$, coincide con il grafico di una funzione $y = \phi(x)$. Calcolare $\phi(1)$, $\phi'(1)$, $(\star)$ $\phi''(1)$.

32. Si consideri la soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema

$$\begin{cases} x' &= \sin x - 2ye^x \\ y' &= y(ye^x - \cos x)\,, \end{cases}$$

soddisfacente $x(0) = 0$, $y(0) = 2$. Mostrare che il suo sostegno, in un intotorno di $(0, 2)$, coincide con il grafico di una funzione $x = \phi(y)$. Calcolare $\phi(2)$, $\phi'(2)$, $(\star)$ $\phi''(2)$.

33. ($\star$) Dato il sistema

$$\begin{cases} x' &= (1+y^2)\log(2+\cos(\pi x)) \\ y' &= x^2+y^2\,, \end{cases}$$

(a) si determini la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $(1,1)$;

(b) mostrare che se $(x(t), y(t))$ è una soluzione del sistema, con t in un intervallo $I \subset \mathbf{R}$, allora si ha $|x(t) - x(t')| < 2$, $\forall t, t' \in \mathbf{R}$.

34. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -x^n\,, \end{cases}$$

dederminare gli interi $n \geq 0$ per cui tutte le soluzioni sono periodiche.

35. Dati i seguenti sistemi, si studi la stabilità della soluzione nulla (siccome il teorema di stabilità in prima approssimazione non è applicabile (perché?) conviene trovare un integrale primo, e usare la definizione di stabilità)

$$\begin{cases} x' &= -\sin(2y) \\ y' &= 2x\,, \end{cases} \quad \begin{cases} x' &= -\sin(2y) \\ y' &= 4x^3\,, \end{cases}$$

36. calcolare tutte le soluzioni dei sistemi seguenti:

$$\begin{cases} x' = x+2y+e^t \\ y' = 2x+y+1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x+2y+e^{3t} \\ y' = 2x+y-e^{3t}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x+2y+2e^{3t} \\ y' = 2x+y+4e^{3t}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x+4y+e^{3t} \\ y' = -x+3y-1\,, \end{cases}$$