Teoremi di Cauchy e De l'Hôpital

(1.1) Teorema (di Cauchy) *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni tali che*

a) f *e* g *sono continue in* $[a, b]$*;*

b) f *e* g *sono derivabili in* (a, b) *con* $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$*.*

Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ *tale che*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $g(a) \neq g(b)$. Infatti, se fosse $g(a) = g(b)$, allora per il Teorema di Rolle esisterebbe $x \in (a, b)$ tale che $g'(x) = 0$, contro l'ipotesi $b)$.

Consideriamo la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x).$$

Si ha che h è continua in $[a, b]$ perché composizione di funzioni continue, h è derivabile in (a, b) perché composizione di funzioni derivabili con

$$\forall x \in (a, b) : \qquad h'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x) - [f(b) - f(a)]g'(x).$$

Inoltre si ha che

$$h(a) = [g(b) - g(a)]f(a) - [f(b) - f(a)]g(a) = f(a)g(b) - f(b)g(a),$$

$$h(b) = [g(b) - g(a)]f(b) - [f(b) - f(a)]g(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a).$$

Per il Teorema di Rolle applicato ad h esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $h'(x_0) = 0$, cioè

$$[g(b) - g(a)]f'(x_0) - [f(b) - f(a)]g'(x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

■

(1.2) Teorema (di De l'Hôpital nella forma [0/0]) *Siano* $A \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo,* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *due funzioni e* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *un punto di accumulazione per* A*. Supponiamo che*

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$*;*

b) esista un intorno $I(x_0)$ *di* x_0 *tale che* f *e* g *siano derivabili in ogni* $x \in A \cap I(x_0)$*,* $x \neq x_0$*, e che per tali* x *si abbia* $g'(x) \neq 0$*;*

c) esista $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*.*

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e occupiamoci di dimostrare la proprietà per il limite destro.

Siano $\widetilde{f}, \widetilde{g} : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0, \end{cases} \qquad \widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Per l'ipotesi $a)$ risulta che $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ sono continue in x_0. Inoltre per l'ipotesi $b)$ sono derivabili in un tutto un intervallo (y, x) contenuto in A, contenente x_0, ad eccezione che nel punto x_0. Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni $\widetilde{f}_{|[x_0,x]}$ e $\widetilde{g}_{|[x_0,x]}$ si ottiene che esiste $t \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(x_0)}{\widetilde{g}(x) - \widetilde{g}(x_0)},$$

ossia, essendo $\widetilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq x_0$, $\widetilde{g}(x) = g(x)$ se $x \neq x_0$ e $\widetilde{f}(x_0) = \widetilde{g}(x_0) = 0$,

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ora se $x \to x_0^+$, essendo $x_0 < t < x$ per il Teorema dei due Carabinieri risulta che $t \to x_0^+$. Quindi per l'ipotesi $a)$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)} = l.$$

In modo del tutto analogo, ottenendo il medesimo risultato, si procede per il limite sinistro, da cui la tesi.

Evidentemente se $x_0 \in \mathbb{R}$ è uno degli estremi dell'intervallo A, allora abbiamo solamente una delle due situazioni precedenti.

Consideriamo ora $x_0 = +\infty$ (analogamente se $x_0 = -\infty$). Mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ si ricade nel caso precedente. Infatti, se $z = \frac{1}{x}$, allora $x = \frac{1}{z}$. Quindi $f(x) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ e $g(x) = g\left(\frac{1}{z}\right)$. Osserviamo che le derivate delle funzioni $f\left(\frac{1}{z}\right)$ e $g\left(\frac{1}{z}\right)$ sono rispettivamente

$$\frac{d}{dz}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right] = -\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \frac{d}{dz}\left[g\left(\frac{1}{z}\right)\right] = -\frac{1}{z^2}g'\left(\frac{1}{z}\right).$$

Quindi si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{z=\frac{1}{x}}}}{=} \lim_{z\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{caso precedente}}}}{=} \lim_{z\to0^+}\frac{\frac{d}{dz}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\right]}{\frac{d}{dz}\left[g\left(\frac{1}{z}\right)\right]} = \lim_{z\to0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{x=\frac{1}{z}}}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

■

(1.3) Teorema (di De l'Hôpital nella forma $[\infty/\infty]$**)** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f, g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un punto di accumulazione per A. Supponiamo che*

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *(o $-\infty$) e* $\lim_{x\to x_0} g(x) + \infty$ *(o $-\infty$);*

b) esista un intorno $I(x_0)$ di x_0 tale che f e g siano derivabili in ogni $x \in A \cap I(x_0)$, $x \neq x_0$, e che per tali x si abbia $g'(x) \neq 0$;

c) esista $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $x_0 \in \mathbb{R}$ e occupiamoci di dimostrare la proprietà per il limite destro.

Distinguiamo il caso $g(x) \to +\infty$ dal caso $g(x) \to -\infty$.

$I)$ Consideriamo il caso in cui $\lim_{x\to x_0^+} g(x) = +\infty$.

Supponiamo inizialmente che $\lim_{x\to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x_0, x_0+\delta) \subseteq A$ e per ogni $x \in (x_0, x_0+\delta)$ si ha che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo $x, y \in (x_0, x_0+\delta)$ con $x < y$. Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni $f_{|[x,y]}$ e $g_{|[x,y]}$ esiste $t \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

ossia

$$f(x) - f(y) = \frac{f'(t)}{g'(t)}[g(x)-g(y)].$$

Dividendo per $g(x)$, che non è zero perché tende a $+\infty$ per $x \to x_0^+$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Poiché $g'(x) \neq 0$ e $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0^+$, essendo $x_0 < x < y$ risulta che $g(x) > g(y) > 0$. Quindi $1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0$. Essendo $l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(t)}{g'(t)} < l + \frac{\varepsilon}{2}$ si ottiene

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(y)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0,$$

si ha che

$$\lim_{x\to x_0^+} \left[\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\right] = l - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \left[\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\right] = l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi a patto di considerare un δ più piccolo si ha che per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$

$$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} > l - \varepsilon,$$

$$\left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Quindi per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha

$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

In modo del tutto analogo, ottenendo il medesimo risultato, si procede per il limite sinistro, da cui la tesi.

Supponiamo ora che $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ (in modo analogo si procede se il limite è $-\infty$).

Per definizione di limite, per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2a.$$

Consideriamo $x, y \in (x_0, x_0 + \delta)$ con $x < y$. Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni $f_{|[x,y]}$ e $g_{|[x,y]}$ esiste $t \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

ossia

$$f(x) - f(y) = \frac{f'(t)}{g'(t)}[g(x) - g(y)].$$

Dividendo per $g(x)$, che non è zero perché tende a $+\infty$ per $x \to x_0^+$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Poiché $g'(x) \neq 0$ e $g(x) \to +\infty$ per $x \to x_0^+$, essendo $x_0 < x < y$ risulta che $g(x) > g(y)$. Quindi $1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0$. Essendo $\frac{f'(t)}{g'(t)} > 2a$ si ottiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2a \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Poiché

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(y)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g(y)}{g(x)} = 0,$$

si ha che

$$\lim_{x \to x_0^+} \left[2a \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}\right] = 2a.$$

Quindi a patto di considerare un δ più piccolo si ha che per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$

$$2a\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} > a.$$

Quindi per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} > a.$$

Ne segue che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

da cui la tesi.

II) Consideriamo il caso in cui $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = -\infty$.

Supponiamo inizialmente che $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$.

Per definizione di limite, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ si ha che

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo $x, y \in (x_0, x_0 + \delta)$ con $x < y$. Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni $f_{|[x,y]}$ e $g_{|[x,y]}$ esiste $t \in (x, y)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

ossia

$$f(x) - f(y) = \frac{f'(t)}{g'(t)}[g(x) - g(y)].$$

Dividendo per $g(x)$, che non è zero perché tende a $-\infty$ per $x \to x_0^+$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Poiché $g'(x) \neq 0$ e $g(x) \to -\infty$ per $x \to x_0^+$, essendo $x_0 < x < y$ risulta che $g(x) < g(y) < 0$. Quindi $1 - \frac{g(y)}{g(x)} > 0$. A questo punto la dimostrazione procede come nel caso in cui $g(x) \to +\infty$.

I casi $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty \ (-\infty)$ si trattano in modo simile a questo e ci si riconduce alle dimostrazioni corrispondenti nel caso in cui $g(x) \to +\infty$.

In modo del tutto analogo, ottenendo il medesimo risultato, si procede sia nel caso $g(x) \to +\infty$ che nel caso $g(x) \to -\infty$ per il limite sinistro, da cui la tesi.

Evidentemente se $x_0 \in \mathbb{R}$ è uno degli estremi dell'intervallo A, allora abbiamo solamente una delle due situazioni precedenti.

Infine, i casi in cui $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$ si trattano come nel caso [0/0], ossia mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ si ricade nel caso precedente in cui $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$. ■

(1.4) Osservazione Come si evince dalla dimostrazione del Teorema di De l'Hôpital nella forma $[\infty/\infty]$ l'ipotesi che la funzione a numeratore f tenda a $+\infty$ o $-\infty$ per $x \to x_0$ non viene mai usata. Per questo motivo si può concludere che questo Teorema vale nella forma più generale $[?/\infty]$.