

MODELLI PROBABILISTICI E STATISTICI

Esercizi in classe, 11 Aprile 2030

1. Siano X_1, \dots, X_n i.i.d. Uniforme(0, 1). Calcolare la covarianza del minimo e del massimo campionario, cioè

$$\text{Cov}(X_{(1)}, X_{(n)}).$$

2. Siano X_1, \dots, X_n indipendenti e

$$X_i \sim \text{Normale}(\mu, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

con σ_i note. Trovare lo stimatore di massima verosimiglianza di μ e la sua distribuzione campionaria.

3. Siano X_1, \dots, X_n normali indipendenti con valore atteso 0 e varianze

$$\text{Var}(X_i) = i^2, \quad i = 1, \dots, n$$

e siano quindi x_1, \dots, x_n le loro realizzazioni sperimentali. Disegnare un grafico plausibile di (i, x_i) . Ripetere la cosa per X_1, \dots, X_n normali indipendenti di varianza 1 e valore atteso

$$E(X_i) = i, \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Siano X_1, \dots, X_{n_1} i.i.d. Normale(μ_1, σ_1^2) e Y_1, \dots, Y_{n_2} i.i.d. Normale(μ_2, σ_2^2), con σ_1^2 e σ_2^2 note. Sotto il vincolo $n_1 + n_2 = n$, con n fissato, trovare n_1 e n_2 ottimali per stimare $\mu_1 - \mu_2$ con varianza minima.

5. Il raggio di un cerchio viene misurato con un errore di misura additivo Normale(0, σ^2), con σ^2 incognito. Date n misure indipendenti, trovare almeno due stimatori non distorti dell'area del cerchio.

6. Siano X_1, \dots, X_{n_1} un campione casuale Normale(μ, σ^2) con μ nota.

(a) Trovare la distribuzione di

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}.$$

(b) Derivare un intervallo di confidenza per σ^2 .

7. Sia X una singola osservazione da

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} (0 < x < 1),$$

con $\theta > 0$. Per il sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0 : \theta \leq 1 \\ H_1 : \theta > 1, \end{cases}$$

si usi il test "Rifiuto H_0 se $X \geq 1/2$ ". Determinare il livello del test e la funzione potenza.

8. Siano X_1, \dots, X_{n_1} indipendenti e

$$Y_i \sim \text{Normale}(i\beta, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n,$$

con β parametro scalare incognito. Trovare lo stimatore dei minimi quadrati di β e la sua distribuzione campionaria.

9. Tramite un sistema di pesi, tre quantità incognite a, b, c danno luogo a quattro pesate Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 di valore atteso $E(Y_1) = a + b + c$, $E(Y_2) = a + b - c$, $E(Y_3) = a - b + c$ e $E(Y_4) = a - b - c$, rispettivamente. Gli errori siano omoschedastici e additivi. Trovare le stime dei minimi quadrati di a, b, c .

10. Siano Z_1, \dots, Z_k indipendenti e

$$X_i \sim \text{Normale}(\mu_i, 1), \quad i = 1, \dots, k.$$

Si dimostri che:

(a) la funzione generatrice dei momenti di $Z_i^2, \forall i = 1, \dots, k$ è

$$\psi(t) = E\left(e^{tZ_i^2}\right) = \frac{\exp\{\mu^2 t / (1 - 2t)\}}{\sqrt{1 - 2t}};$$

(b) la variabile $Y = \sum Z_i^2$ ha una legge (chiamata χ^2 non centrale) che dipende da μ_1, \dots, μ_k solo tramite

$$\delta = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu} = \sum \mu_i^2,$$

chiamato parametro di non centralità.

11. Si dimostri che, se X_1, \dots, X_n sono un campione casuale da Esponenziale(λ), allora la famiglia delle densità Gamma è coniugata, e trovare i parametri della densità finale quando $\lambda \sim \text{Gamma}(a, b)$, con a e b costanti note.

12. Sia X una singola osservazione Beta($\theta, 1$). Sia

$$Y = -(\log(X))^{-1}.$$

Si calcoli il livello di confidenza dell'intervallo $[Y/2, Y]$.