Problemi

(1) Si consideri la successione (a_n) definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{8}a_n^2\,, \quad a_0 = \alpha\,,$$

dove $\alpha \geq 0$.

- Individuare i valori di α per i quali la successione (a_n) risulta costante: $a_n = \alpha$ per ogni n.
- Studiare, al variare di $\alpha \geq 0$, la monotonia della successione (a_n).
- Studiare, al variare di $\alpha \geq 0$, il comportamento limite della successione (a_n).

(2) Data una successione (u_n) e un numero $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri la successione (a_n) definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \lambda a_n + u_n\,, \quad a_0 = \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

- Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = a_0\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1}u_k\,.$$

- Nell'ipotesi che $\lambda \in]-1,1[$ e che (u_n) sia definitivamente nulla (cioè che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $u_n = 0$ per ogni $n \geq n_0$), dimostrare che (a_n) è infinitesima per qualunque condizione iniziale α.
- (*) Generalizzando il caso precedente si dimostri che se $\lambda \in]-1,1[$ e (u_n) è una qualunque successione infinitesima, allora (a_n) è infinitesima per qualunque condizione iniziale α.

(3) Si consideri la funzione $f(x) = x^3 - 2$. Dato $x \geq 0$ si determini il punto d'incontro $g(x)$ della retta tangente al grafico di f nel punto (x, x^3-2) con l'asse x. Si consideri dunque la successione (a_n) definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = g(a_n)\,, \quad a_0 = \alpha \in \mathbb{R}^+\,,$$

e si ne studi il comportamento limite.

(4) Si consideri la successione (a_n) definita per ricorrenza da

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{n}\,, \quad a_1 = \alpha\,.$$

- Dimostrare che per ogni $\alpha \leq 1$, la successione (a_n) é decrescente e converge a 0.
- Dimostrare che per ogni $\alpha \geq 2$, la successione (a_n) soddisfa la relazione $a_n \geq 2n$ per ogni n.
- (*) Provare a trovare qualche risultato di convergenza per $\alpha \in]1,2[$.

(5) Si consideri il seguente sottoinsieme di sequenze ternarie di lunghezza n:

$$\Omega_n = \{\omega \in \{0,1,2\}^n \mid \omega_i\omega_{i+1} \neq 01, 10 \;\; \forall i = 1,\ldots,n-1\}\,.$$

Sia $a_n = |\Omega_n|$ la cardinalitá di Ω_n.

- Dimostrare che (a_n) soddisfa la relazione ricorsiva

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$$

- Trovare una formula chiusa per (a_n).