

OMOGENEIZZAZIONE E TEORIA DELLA DIFFRAZIONE

Il quadro comune ai lavori [CRAS79], [MMAS80], [AIHP82], [BUMI82], [BRESS81] e [PRE81B] è il problema delle onde (acustiche od elastiche) in domini esterni (cioè domini il cui complementare è un compatto) e delle frequenze di diffrazione (scattering):

$$A_\varepsilon u_\varepsilon - \omega^2 u_\varepsilon = 0.$$

Si suppone che i coefficienti dell'operatore A_ε siano costanti all'esterno di un cerchio di raggio R sufficientemente grande. In una regione limitata tali coefficienti sono invece supposti dipendere da un parametro ε (destinato a tendere a zero) e che tiene conto delle inhomogeneità del mezzo. Per ε fisso, se la frequenza ω è reale, il problema di diffrazione, con condizioni al bordo di trasmissione, ha una sola soluzione appartenente a $\mathbf{L}_{\text{loc}}^2$. L'unicità è conseguenza di un teorema di Rellich e (per il caso elastico) di Kupradze. L'esistenza è ottenuta con vari metodi:

- . metodi classici di teoria del potenziale,
- . metodo variazionale: principio dell'assorbimento limite (Wilcox),
- . metodo di riduzione a un dominio limitato (Majda).

Se ω non è reale, il problema può perdere l'unicità. Vi è in effetti un insieme discreto di valori ω complessi, detti frequenze di diffrazione (scattering) in corrispondenza dei quali la soluzione non è unica in $\mathbf{L}_{\text{loc}}^2$ e i cui autospazi associati hanno dimensione finita.

Il contributo originale da me dato riguarda il comportamento delle frequenze di diffrazione nel passaggio al limite di omogeneizzazione, quando $\varepsilon \searrow 0$. Se σ è punto di accumulazione di frequenze di diffrazione σ_ε per $\varepsilon > 0$, allora σ è una frequenza di diffrazione del problema limite per $\varepsilon = 0$. La dimostrazione utilizza delle stime in $\mathbf{H}^1(|x| < R)$ delle soluzioni corrispondenti alle frequenze σ_ε e una formulazione delle condizioni all'infinito come sovrapposizioni di soluzioni fondamentali. Viceversa: se σ è una frequenza di diffrazione del problema limite ($\varepsilon = 0$), allora dato un cerchio arbitrario intorno a σ , $\exists \varepsilon > 0$ tale che il problema corrispondente ha una frequenza di diffrazione σ_ε contenuta nel cerchio di centro σ . La dimostrazione sfrutta il fatto che la frequenza di diffrazione σ è isolata e quindi vi è un cerchio D di frontiera Γ tale che il problema, con $\varepsilon = 0$, non ha altre frequenze di diffrazione in $D \cup \Gamma$. Se tutti i problemi con $\varepsilon > 0$ non avessero frequenze di diffrazione in $D \cup \Gamma$, si otterrebbe un assurdo usando sia il fatto che le soluzioni $u_\varepsilon(\lambda)$ con $\lambda \in \Gamma \cup D$ sono meromorfe sia passando al limite e utilizzando il teorema della convergenza dominata di Lebesgue.