CONVOLUZIONE, TRASFORMATE DI LAPLACE DI DISTRIBUZIONI E STABILITÀ

Il quadro dei lavori [IEEETCS84] e [TO83] è la teoria dei sistemi lineari e invarianti per traslazioni temporali. Sia T un tale sistema. La risposta impulsiva $h(t)$ è definita come la risposta (nulla per $t < 0$) del sistema alla $\delta(t)$ (di Dirac). La risposta forzata $y(t)$ a un ingresso $e(t)$ è definita senza ambiguità se $e(t)$ è nulla per $t < t_0$. Nel caso di sistemi lineari e invarianti per traslazioni temporali si ha che la risposta forzata è data dal prodotto di convoluzione:

$$y(t) = e(t) * h(t);$$

tale prodotto esiste sempre essendo $e(t)$ e $h(t) \in D'_+$. Si definisce inoltre la funzione di trasferimento $\mathbf{H}(\mathrm{s})$ (o $\mathbf{H}(\omega)$) come la trasformata di Laplace (o di Fourier) di $h(t)$. Vi è tuttavia un altro modo di definire la funzione di trasferimento, spesso citata nella letteratura (cfr. Zadeh-Desoer: Linear System Theory, N. Y., McGraw-Hill, 1963), ma senza giustificazione in ambito distribuzionale. Si afferma che $\mathbf{H}(\mathrm{s})$ può essere interpretata come l'ampiezza della risposta forzata al segnale e^{st}:

$$e(t) = e^{st} \quad \stackrel{T}{\rightarrow} \quad y(t) = \mathbf{H}(s)e^{st}$$

o analogamente per $\mathbf{H}(\omega)$:

$$e(t) = e^{i\omega t} \quad \stackrel{T}{\rightarrow} \quad y(t) = \mathbf{H}(\omega)e^{i\omega t}$$

Ora questi modi di definire la funzione di trasferimento richiedono:

1) la definizione di risposta forzata per segnali che appartengono a D', in quanto e^{st}, $e^{i\omega t} \in D'$, ma non a D'_+;
2) una definizione adeguata a queste esigenze della convoluzione e delle trasformate;
3) la individuazione dei sistemi per i quali una definizione della $\mathbf{H}(\mathrm{s})$ (o $\mathbf{H}(\omega)$) di tale genere è possibile.

Il risultato che si è ottenuto indica che l'appartenenza di $h(t)$ a **S'** (distribuzioni temperate), e cioè l'esistenza della trasformata di Fourier di h, non è sufficiente a definire $\mathbf{H}(\omega)$ come ampiezza della risposta forzata a $e^{i\omega t}$, ma occorre che il sistema sia stabile nel senso **"bounded input - bounded output"** (cfr. Beltrami-Wohlers IEEE Trans. Cir. Syst. 1965) e cioè $h(t) \in D'_{\mathrm{L}^1}$. Per $\mathbf{H}(\mathrm{s})$ tale analoga possibilità coincide con l'esistenza della trasformata di Laplace di $h(t)$.