

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi proposti

1. Determinare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:

- (a) $yy' = 3x^2$ $[\pm\sqrt{2x^3 + c}]$
 (b) $y' = xy + x$ $[ae^{x^2/2} - 1]$
 (c) $xy' - 3y + 1 = 0$ $[\frac{1}{3} + ax^3]$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} (x^2 + 1)y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[1/\sqrt{x^2 + 1}]$
 (b) $\begin{cases} yy' = \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $[\pm\sqrt{2 - 2\cos x}]$
 (c) $\begin{cases} y' = \frac{3y-2}{1+x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $[\frac{2}{3}(1 - e^{3\arctan x})]$

3. (a) Determinare a, b per cui $y(x) = x^2 + ax + b$ è una soluzione di $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$.
 Trovare c per cui $y(x) = e^{cx}$ è una soluzione della stessa equazione. $[a = b = 2, c = 1]$

(b) Trovare k per cui $y(x) = x^k$ è una soluzione di $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; determinare la soluzione $y(x)$ della stessa equazione per cui $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$ $[(3x^2 + 2x^{-3})/5]$

4. Trovare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali:

- (a) $y' = -\frac{y}{x} + 1$ $[\frac{1}{2}x + c/x]$
 (b) $xy' + (3x - 1)y = 0$ $[axe^{-3x}]$
 (c) $(x \ln x)y' = -y + x$ $[(x + c)/\ln x]$

5. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} y' = 2(y/x) + x^3 \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$ $[x^3 \sin x + x^2 \cos x + x^2]$
 (b) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = \frac{x}{x^2 + 1} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $[1 + (\frac{1}{4}\pi - \arctan x)/x]$
 (c) $\begin{cases} y' + (\tan x)y = \cos x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[(x + 1) \cos x]$
 (d) $\begin{cases} y' = -y + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $[x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}]$

6. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

- (a) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$ $[3e^{2x} - 2e^{3x}]$
 (b) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 1 \end{cases}$ $[(1 - x + e^{-3x})e^{3x}]$
 (c) $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 1 \end{cases}$ $[e^{-x}(\sin 2x + \cos 2x)]$

7. Determinare la soluzione del seguente problema:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0 \end{cases} \quad [e^{-2x}]$$

8. Determinare una soluzione particolare delle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} (a) \quad y'' + 2y' + 5y &= \cos 2x && \left[\frac{4}{17} \sin 2x + \frac{1}{17} \cos 2x \right] \\ (b) \quad y'' - 6y' + 9y &= x + e^{3x} && \left[\frac{2}{27} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{2}x^2 e^{3x} \right] \\ (c) \quad y'' + y &= x + e^x && \left[x + \frac{1}{2}e^x \right] \\ (d) \quad y'' - 5y' - 6y &= -xe^{-x} && \left[\left(\frac{1}{49}x + \frac{1}{14}x^2 \right) e^{-x} \right] \end{aligned}$$

9. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{aligned} (a) \quad \begin{cases} y'' - 5y' - 6y = 16e^{-2x} \\ y(0) = 2, y'(0) = 3 \end{cases} &&& [e^{6x} - e^{-x} + 2e^{-2x}] \\ (b) \quad \begin{cases} y'' - 8y' + 17y = 34x + 1 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} &&& [2x + 1 - e^{4x} \cos x + 2e^{4x} \sin x] \\ (c) \quad \begin{cases} y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases} &&& \left[\frac{1}{2}x e^x \sin x \right] \end{aligned}$$

10. Determinare la soluzione del seguente problema:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 3 - 3e^{-3x} \\ y(0) = 0, y(x) \text{ limitata su } [0, \infty) \end{cases} \quad [-1 + (1 + \frac{3}{4}x)e^{-3x}]$$

11. Determinare le soluzioni generali di:

$$\begin{aligned} (a) \quad y''' + 3y'' + 3y' + y &= 0 && [(c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}] \\ (b) \quad y'''' - 3y'' - 4y &= e^x && [c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} - \frac{1}{6}e^x] \end{aligned}$$