NUMERI COMPLESSI

Esercizi proposti

1. Trovare tutte le soluzioni delle equazioni:

   (i) $z^2+z+1=0$ (ii) $z^3+2z=0$ (iii) $z+\dfrac{2}{z}=1$ (iv) $z^4-2z^2-8=0$.

   $\left[\ \text{(i)}\ z=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{(ii)}\ z=0,\ \pm i\sqrt{2}\quad \text{(iii)}\ z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{7}}{2}\quad \text{(iv)}\ z=\pm 2,\ \pm i\sqrt{2}\ \right]$

2. Semplificare le espressioni: $(2-3i)(-2+i)$; $i^5-\dfrac{1}{i^3}$; $\dfrac{1+2i}{3-i}+\dfrac{2-i}{5i}$; $\dfrac{(1+i)^4}{3-4i}$.

   $[\ -1+8i\,;\quad 0\,;\quad -\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i\,;\quad -\frac{12}{25}-\frac{16}{25}i\ ]$

3. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi:

   (i) $\dfrac{1}{1-i}+\dfrac{2i}{i-1}$ (ii) $\dfrac{3-i}{(1+i)^2}$ (iii) $\left(\dfrac{1-3i}{1+i}-i\right)^3$ (iv) $e^{2\pi i/3}-e^{-2\pi i/3}$.

   $\left[\ \text{(i)}\ \frac{\sqrt{10}}{2}\quad \text{(ii)}\ \frac{\sqrt{10}}{2}\quad \text{(iii)}\ 10^{3/2}=\sqrt{1000}\quad \text{(iv)}\ \sqrt{3}\ \right]$

4. Dire se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

   (i) $(z^3+27)^3=0$ ha 9 soluzioni distinte (ii) se $z=1+i$, allora $\dfrac{z}{\bar{z}}=i$

   (iii) l'unica soluzione di $z^{-1}=-z$ è $z=i$ (iv) se $z=e^{2\pi i/3}$, allora $z^{27}\in\mathbb{R}$.

   [(i) falsa (ii) vera (iii) falsa (iv) vera]

5. Calcolare le seguenti potenze di i: i^{13} ; $\frac{1}{i^7}$; i^{63} ; i^{-17} ; i^{26} ; i^{2007}.

   $[\ i\,;\quad i\,;\quad -i\,;\quad -i\,;\quad -1\,;\quad -i\,;\ ]$

6. (a) Mettere in forma esponenziale i numeri: $1+i$, $\dfrac{1+i}{1-i}$, $\dfrac{i(i-1)}{(i+1)^2}$, $\left(\dfrac{i}{\sqrt{3}}-1\right)^2$.

   (b) Dato $z=e^{-\pi i/6}+e^{-\pi i/2}$, esprimere z e z^2 in forma algebrica.

   $\left[\ \text{(a)}\ \sqrt{2}\,e^{\pi i/4}\,;\quad e^{\pi i/2}\,;\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{3\pi i/4}\,;\quad \frac{4}{3}\,e^{5\pi i/3}\,;\quad \text{(b)}\ z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\,;\ z^2=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\ \right]$

7. Calcolare le potenze: z^4, z^7, z^{34}, dei seguenti numeri complessi:

   a) $z=\frac{1}{(1-i)^2}-i$ $\left[\ z^4=\frac{1}{16}\,;\ z^7=\frac{i}{128}\,;\ z^{34}=-\frac{1}{2^{34}}\right]$

   b) $z=\frac{1-i}{i}$ $\left[\ z^4=-4\,;\ z^7=2^{7/2}\ e^{3\pi i/4}=8(-1+i)\,;\ z^{34}=2^{17}\ e^{i\frac{\pi}{2}}=2^{17}i\right]$

8. Sia $z = 1 + ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{6}(ix)^3$ con $x \in \mathbb{R}$. Calcolare la parte reale e la parte immaginaria di z e di z^2.

$$\Big[\ \operatorname{Re} z = 1 - \tfrac{x^2}{2}\,, \quad \operatorname{Im} z = x - \tfrac{x^3}{6}; \quad \operatorname{Re}(z^2) = 1 - 2x^2 + \tfrac{7}{12}x^4 - \tfrac{1}{36}x^6\,,$$
$$\operatorname{Im}(z^2) = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{6}x^5\ \Big]$$

9. (a) Risolvere l'equazione $z^2 - z - 1 = 0$. Verificare che $z_1 = \frac{1}{2}i(1 \pm \sqrt{5})$ soddisfa l'equazione $z^2 - iz + 1 = 0$.

(b) Siano $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$. Si supponga che $z^2 + az + b = 0$ ammetta una sola soluzione $z = z_0$. Spiegare perchè $z_0 \in \mathbb{R}$.

$$\Big[\ \text{(a)}\ z = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \equiv z_0\,;\ \ z_1 = iz_0 \ \ \Rightarrow\ \ z_1^2 - iz_1 + 1 = -z_0^2 + z_0 + 1 = -[z_0^2 - z_0 - 1] = 0$$
$$\text{(b)}\ \ z = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2};\ \text{se vi è una sola soluzione } z_0 \ \ \Rightarrow\ \ a^2 = 4b \ \text{ e } \ z_0 = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}\ \Big]$$

10. Siano $z_1 = -1 + i$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 + i$. Disegnare i seguenti numeri nel piano complesso:

(i) $-z_1,\ -z_2,\ -z_3$ (ii) $\overline{z}_1,\ \overline{z}_2,\ \overline{z}_3$ (iii) $iz_1,\ iz_2,\ iz_3$

(iv) $\dfrac{1}{z_1},\ \dfrac{1}{z_2},\ \dfrac{1}{z_3}$ (v) $z_1^2,\ z_2^2,\ z_3^2$ (vi) $z_1^4,\ z_2^4,\ z_3^4$.

11. Calcolare le seguenti radici e disegnarle nel piano complesso:

$$\sqrt[5]{-1}; \qquad (-2i)^{1/2}; \qquad (1+i)^{1/4}; \qquad (\sqrt{5})^{1/3}; \qquad \left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{1/4}.$$

$$\Big[\ \sqrt[5]{-1} = e^{\pi i/5},\ e^{3\pi i/5},\ e^{\pi i}(=-1),\ e^{7\pi i/5},\ e^{9\pi i/5};$$
$$\sqrt{-2i} = \pm\sqrt{2}\,e^{3\pi i/4} = -1 + i,\ 1 - i;$$
$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\,e^{\pi i/16},\ \sqrt[8]{2}\,e^{9\pi i/16},\ \sqrt[8]{2}\,e^{17\pi i/16},\ \sqrt[8]{2}\,e^{25\pi i/16};$$
$$(\sqrt{5})^{1/3} = \sqrt[6]{5},\ \sqrt[6]{5}\,e^{2\pi i/3},\ \sqrt[6]{5}\,e^{4\pi i/3} = \sqrt[6]{5},\ \sqrt[6]{5}(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}),\ \sqrt[6]{5}(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2})$$
$$\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2}\,e^{\pi i/6},\ \sqrt[4]{2}\,e^{2\pi i/3},\ \sqrt[4]{2}\,e^{7\pi i/6},\ \sqrt[4]{2}\,e^{5\pi i/3}$$
$$= \pm\sqrt[4]{2}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right),\ \pm\sqrt[4]{2}\left(-\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).\ \Big]$$

12. (a) Verificare che $z = 4$ è una radice del polinomio $P(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 32z + 32$, trovare un'altra radice reale e fattorizzare il polinomio prima in $\mathbb{R}$ e poi in $\mathbb{C}$.

(b) Fattorizzare il polinomio $P(z) = z^3 - z^2 + 2$ in $\mathbb{C}$.

$$\Big[\ \text{(a)}\ \ P(z) = (z-4)(z-1)(z^2 + 2z + 8) = (z-4)(z-1)(z + 1 - i\sqrt{7})(z + 1 + i\sqrt{7})$$
$$\text{(b)}\ \ P(z) = (z+1)(z - 1 - i)(z - 1 + i)\ \Big]$$

13. Sia $w = i\dfrac{1+z}{1-z}$ con $z \in \mathbb{C}$. Esprimere z in funzione di w e trovare un valore di $w \in \mathbb{C}$ per cui z non è definito.

$$\Big[\ z = \tfrac{w-i}{w+i} \quad (w \neq -i)\ \Big]$$

14. Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

(i) $z^4 - z^2 + 1 = 0$ (ii) $z^6 + z^3 + 1 = 0$ (iii) $|z| = z + 1$ (iv) $z + \overline{z} = z^2$.

$$\left[\ \text{(i)}\ z = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right),\ \pm\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \quad \text{(iii)}\ z = -\frac{1}{2} \quad \text{(iv)}\ z = 0,\ 2 \right.$$
$$\left. \text{(ii)}\ z = e^{2\pi i/9},\ e^{8\pi i/9},\ e^{14\pi i/9},\ e^{4\pi i/9},\ e^{10\pi i/9},\ e^{16\pi i/9}\ \right]$$

15. E' dato il polinomio $P(z) = z^3 - iz^2 + 3iz + 3$. Verificare che $z = i$ è una radice di $P(z)$. Trovare poi tutte le radici di $P(z)$.

$$\left[\ z = i,\ \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 - i)\ \right]$$

16. E' dato il polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 21z^2 - 32z + 80$. Verificare che $z = 4i$ è una sua radice. Trovare poi tutte le radici di $P(z)$.

$$[\ z = \pm 4i,\ 1 \pm 2i\ ]$$

17. Determinare il valore di a tale che il polinomio $P(z) = z^4 - iz^3 + iz + a$ abbia $z = i$ come radice. Per tale valore di a calcolare poi tutte le radici di $P(z)$.

$$\left[\ a = 1; \qquad z = i \text{ (con molteplicità 2)},\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\ \right]$$