SVILUPPI DI TAYLOR
Esercizi proposti

Esercizio 1

Calcolare lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato e all'ordine n indicato:

1. $f(x) = 2^x \quad (x_0 = 2,\ n = 3)$
   $[\ f(x) = 4 + 4\log 2\,(x-2) + 2\log^2 2\,(x-2)^2 + \dfrac{2}{3}\log^3 2\,(x-2)^3 + o((x-2)^3)\ ]$
2. $f(x) = \log(2-x) \quad (x_0 = 1,\ n = 3)$
   $[\ f(x) = -(x-1) - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - \dfrac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)\ ]$
3. $f(x) = \sin x \quad (x_0 = \frac{\pi}{3},\ n = 2)$
   $[\ f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)\ ]$

Esercizio 2

Calcolare lo sviluppo di Mc Laurin delle seguenti funzioni all'ordine n indicato:

1. $f(x) = \sin^2 x \quad (n = 6)$ $\qquad [\ f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{3} + \dfrac{2x^6}{45} + o(x^6)\ ]$
2. $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2) \quad (n = 4)$ $\qquad [\ f(x) = -\dfrac{x^4}{3} + o(x^4)\ ]$
3. $f(x) = (e^x - 1)^2 \quad (n = 5)$ $\qquad [\ f(x) = x^2 + x^3 + \dfrac{7x^4}{12} + \dfrac{x^5}{4} + o(x^5)\ ]$
4. $f(x) = \log(1 - \sin^2 x) \quad (n = 4)$ $\qquad [\ f(x) = -x^2 - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)\ ]$
5. $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3x - x^2} \quad (n = 4)$ $\qquad [f(x) = 1 - 3x + 10x^2 - 33x^3 + 109x^4 + o(x^4)\ ]$
6. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x} \quad (n = 3)$ $\qquad [\ f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)\ ]$
7. $f(x) = \log(2 - \cos x) \quad (n = 4)$ $\qquad [\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{6} + o(x^4)\ ]$
8. $f(x) = \cos(\log(1 + x)) \quad (n = 4)$ $\qquad [\ f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{5x^4}{12} + o(x^4)\ ]$

Esercizio 3

Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = e^{-x\cos x} + \sin x - \cos x$ $\qquad [\ \text{p.p.} = x^2;\ \alpha = 2\ ]$
2. $f(x) = \sin x(\cos 3x - 1)$ $\qquad [\ \text{p.p.} = -\dfrac{9x^3}{2};\ \alpha = 3\ ]$

3. $f(x) = e^{\cos x} - e^{\cosh x}$ [p.p. $= -ex^2$; $\alpha = 2$]

4. $f(x) = \tan x\,(x - \log(1+x))$ [p.p. $= \frac{x^3}{2}$; $\alpha = 3$]

5. $f(x) = \sin(\sinh x) - x\cos(x^2)$ [p.p. $= \frac{13x^5}{30}$; $\alpha = 5$]

6. $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - x^2/2}$ [p.p. $= \frac{x^4}{48}$; $\alpha = 4$]

Esercizio 4

Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - \sin x}{x^3}$ [$\frac{1}{3}$]

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$ [1]

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(2 + \cos(3x) - 3\cosh x)^4}{\log(1+x^2)}$ [0]

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$ [$\frac{1}{3}$]

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^2 \log(\cos x)}$ [$\frac{2}{3}$]

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$ [$-\frac{9}{5}$]

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}}$ [-3]

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1+x^4} - \cos(x^2)}$ [$\frac{1}{6}$]

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ [$-\frac{e}{2}$]

10. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$ [$\frac{1}{6}$]

Esercizio 5

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione
$f(x) = \sin(3x)\log(1+2x)$. [$f(x) = 6x^2 - 6x^3 - x^4 + o(x^4)$]

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)\log(1+2x) - 6x^2 + 6x^3}{x^4}. \qquad [\,-1\,]$$

Esercizio 6

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della seguente funzione e studiare la natura del punto critico $x = 0$:
   $f(x) = e^{3x} - \tan(3x) - \sqrt{1+9x^2}$.
   [$f(x) = -\frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \;\Rightarrow\; \alpha = 3,\ \text{p.p.} = -\frac{9}{2}x^3,\ \ x = 0$ è un punto di flesso]
2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della seguente funzione e studiare la natura del punto critico $x = 0$:
   $g(x) = x^2 + x\log(1-x)$.
   [$g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3),\ \Rightarrow\; \alpha = 3,\ \text{p.p.} = -\frac{1}{2}x^3,\ \ x = 0$ è un punto di flesso.]
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - \tan(3x) - \sqrt{1+9x^2}}{x^2 + x\log(1-x)}. \qquad [\,9\,]$$

Esercizio 7

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al terzo ordine della funzione
   $g(x) = e^{x-x^2}$. [$g(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$]
2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione
   $f(x) = e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1$. [$f(x) = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)) \;\Rightarrow\; \alpha = 3,\ \text{p.p.} = -\frac{7}{6}x^3$]
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1}{x - \sin x}. \qquad [\,-7\,]$$

Esercizio 8

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione
   $f(x) = \sin(2x)\,e^{-x}$. [$f(x) = 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^4 + o(x^4)$]
2. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione
   $g(x) = \log(1+2x)$. [$g(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4)$]
3. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)\,e^{-x} - \log(1+2x)}{x^3}. \qquad [\,-3\,]$$

Esercizio 9

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della seguente funzione studiando la natura del punto critico $x = 0$:

   $f(x) = 2(1+x)^{3/2} - 2 - 3x.$

   [$f(x) = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \;\Rightarrow\; \alpha = 2,$ p.p. $= \frac{3}{4}x^2,\;\; x = 0$ è punto di minimo relativo.]

2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della seguente funzione studiando la natura del punto critico $x = 0$:

   $g(x) = x(1-x)^{2/3} - \sin x.$

   [$g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \;\Rightarrow\; \alpha = 2,$ p.p. $= -\frac{2}{3}x^2,\;\; x = 0$ è punto di massimo relativo.]

3. Calcolare il limite

   $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}.$ [$-\frac{9}{8}$]

Esercizio 10

Determinando la parte principale per $x \to x_0$, studiare il segno delle seguenti funzioni in un intorno del punto x_0 indicato:

1. $f(x) = 2\cos(x + x^2) - 2 + x^2 + 2x^3 \quad (x_0 = 0)$

   [$f(x) \sim -\frac{11}{12}x^4 \quad (x \to 0)$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo e in un intorno di 0 si ha $f(x) < 0 \;\forall x \neq 0$.]

2. $f(x) = e^x + \log \frac{1-x}{e} \quad (x_0 = 0)$

   [$f(x) \sim -\frac{1}{6}x^3 \quad (x \to 0)$, quindi $x = 0$ è un punto di flesso e in un intorno di 0 si ha $f(x) < 0$ per $x > 0$ e $f(x) > 0$ per $x < 0$.]

3. $f(x) = \cos(\log x - \log 2) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (x_0 = 2)$

   [$f(x) \sim \frac{1}{16}(x-2)^3 \quad (x \to 2)$, quindi $x = 2$ è un punto di flesso e in un intorno di 2 si ha $f(x) > 0$ per $x > 2$ e $f(x) < 0$ per $x < 2$.]

4. $f(x) = \log(\cos x) + \frac{x}{2}\sinh x \quad (x_0 = 0).$

   [$f(x) \sim -\frac{13}{720}x^6 \quad (x \to 0)$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo e in un intorno di 0 si ha $f(x) < 0 \;\forall x \neq 0$.]

Esercizio 11

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che

$$f(x) = \cos x - \cosh x + \sin^2(\alpha x) = o(x^2) \quad (x \to 0).$$

[Si ottiene $f(x) = (\alpha^2 - 1)x^2 - \frac{1}{3}\alpha^4 x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$. Quindi se $\alpha \neq \pm 1$, $f(x)$ ha parte principale $(\alpha^2 - 1)x^2$ e non è $o(x^2)$ per $x \to 0$. Se invece $\alpha = \pm 1$ si ha $f(x) \sim -\frac{1}{3}x^4$ e quindi $f(x) = o(x^2)$ $(x \to 0)$.]

Esercizio 12

Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \log(\cos x) + \log(\cosh(ax)).$$

[Si ottiene $f(x) = \frac{1}{2}(a^2 - 1)x^2 - \frac{1}{12}(a^4 + 1)x^4 + o(x^4)$. Quindi se $a \neq \pm 1$ si ha $f(x) \sim \frac{1}{2}(a^2 - 1)x^2$ $(x \to 0)$ e dunque f è un infinitesimo di ordine 2. Se invece $\alpha = \pm 1$, f è un infinitesimo di ordine 4 essendo $f(x) \sim -\frac{1}{6}x^4$ $(x \to 0)$.]