

## SVILUPPI DI TAYLOR

### Esercizi proposti

#### Esercizio 1

Calcolare lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) delle seguenti funzioni nel punto  $x_0$  indicato e all'ordine  $n$  indicato:

1.  $f(x) = 2^x$  ( $x_0 = 2$ ,  $n = 3$ )

$$[ f(x) = 4 + 4 \log 2 (x - 2) + 2 \log^2 2 (x - 2)^2 + \frac{2}{3} \log^3 2 (x - 2)^3 + o((x - 2)^3) ]$$

2.  $f(x) = \log(2 - x)$  ( $x_0 = 1$ ,  $n = 3$ )

$$[ f(x) = -(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{3}(x - 1)^3 + o((x - 1)^3) ]$$

3.  $f(x) = \sin x$  ( $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ,  $n = 2$ )

$$[ f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} (x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4} (x - \frac{\pi}{3})^2 + o\left((x - \frac{\pi}{3})^2\right) ]$$

#### Esercizio 2

Calcolare lo sviluppo di Mc Laurin delle seguenti funzioni all'ordine  $n$  indicato:

1.  $f(x) = \sin^2 x$  ( $n = 6$ )

$$[ f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6) ]$$

2.  $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2)$  ( $n = 4$ )

$$[ f(x) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4) ]$$

3.  $f(x) = (e^x - 1)^2$  ( $n = 5$ )

$$[ f(x) = x^2 + x^3 + \frac{7x^4}{12} + \frac{x^5}{4} + o(x^5) ]$$

4.  $f(x) = \log(1 - \sin^2 x)$  ( $n = 4$ )

$$[ f(x) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) ]$$

5.  $f(x) = \frac{1}{1 + 3x - x^2}$  ( $n = 4$ )

$$[ f(x) = 1 - 3x + 10x^2 - 33x^3 + 109x^4 + o(x^4) ]$$

6.  $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$  ( $n = 3$ )

$$[ f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3) ]$$

7.  $f(x) = \log(2 - \cos x)$  ( $n = 4$ )

$$[ f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) ]$$

8.  $f(x) = \cos(\log(1 + x))$  ( $n = 4$ )

$$[ f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{12} + o(x^4) ]$$

#### Esercizio 3

Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  delle seguenti funzioni:

1.  $f(x) = e^{-x \cos x} + \sin x - \cos x$

$$[ \text{p.p.} = x^2; \alpha = 2 ]$$

2.  $f(x) = \sin x(\cos 3x - 1)$

$$[ \text{p.p.} = -\frac{9x^3}{2}; \alpha = 3 ]$$

3.  $f(x) = e^{\cos x} - e^{\cosh x}$  [ p.p. =  $-ex^2$ ;  $\alpha = 2$  ]
4.  $f(x) = \tan x (x - \log(1 + x))$  [ p.p. =  $\frac{x^3}{2}$ ;  $\alpha = 3$  ]
5.  $f(x) = \sin(\sinh x) - x \cos(x^2)$  [ p.p. =  $\frac{13x^5}{30}$ ;  $\alpha = 5$  ]
6.  $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - x^2/2}$  [ p.p. =  $\frac{x^4}{48}$ ;  $\alpha = 4$  ]

#### Esercizio 4

Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$  [  $\frac{1}{3}$  ]
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$  [ 1 ]
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \cos(3x) - 3 \cosh x)^4}{\log(1 + x^2)}$  [ 0 ]
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$  [  $\frac{1}{3}$  ]
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^2 \log(\cos x)}$  [  $\frac{2}{3}$  ]
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$  [  $-\frac{9}{5}$  ]
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1 + x^8} - \sqrt[3]{1 + x^8}}$  [ -3 ]
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1 + x^4} - \cos(x^2)}$  [  $\frac{1}{6}$  ]
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$  [  $-\frac{e}{2}$  ]
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$  [  $\frac{1}{6}$  ]

#### Esercizio 5

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione

$$f(x) = \sin(3x) \log(1 + 2x). \quad [ f(x) = 6x^2 - 6x^3 - x^4 + o(x^4) ]$$

2. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x) \log(1+2x) - 6x^2 + 6x^3}{x^4}. \quad [ -1 ]$$

### Esercizio 6

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della seguente funzione e studiare la natura del punto critico  $x = 0$ :

$$f(x) = e^{3x} - \tan(3x) - \sqrt{1+9x^2}.$$

$$[ f(x) = -\frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \Rightarrow \alpha = 3, \text{ p.p.} = -\frac{9}{2}x^3, \quad x = 0 \text{ è un punto di flesso} ]$$

2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della seguente funzione e studiare la natura del punto critico  $x = 0$ :

$$g(x) = x^2 + x \log(1-x).$$

$$[ g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + o(x^3), \Rightarrow \alpha = 3, \text{ p.p.} = -\frac{1}{2}x^3, \quad x = 0 \text{ è un punto di flesso.} ]$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \tan(3x) - \sqrt{1+9x^2}}{x^2 + x \log(1-x)}. \quad [ 9 ]$$

### Esercizio 7

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al terzo ordine della funzione

$$g(x) = e^{x-x^2}. \quad [ g(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) ]$$

2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della funzione

$$f(x) = e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1. \quad [ f(x) = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3) \Rightarrow \alpha = 3, \text{ p.p.} = -\frac{7}{6}x^3 ]$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-x^2} - \log(1+x) - 1}{x - \sin x}. \quad [ -7 ]$$

### Esercizio 8

1. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione

$$f(x) = \sin(2x) e^{-x}. \quad [ f(x) = 2x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^4 + o(x^4) ]$$

2. Calcolare lo sviluppo di McLaurin al quarto ordine della funzione

$$g(x) = \log(1+2x). \quad [ g(x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o(x^4) ]$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) e^{-x} - \log(1+2x)}{x^3}. \quad [ -3 ]$$

### Esercizio 9

1. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della seguente funzione studiando la natura del punto critico  $x = 0$ :

$$f(x) = 2(1+x)^{3/2} - 2 - 3x.$$

$$[ f(x) = \frac{3}{4}x^2 + o(x^2) \Rightarrow \alpha = 2, \text{ p.p.} = \frac{3}{4}x^2, \quad x = 0 \text{ è punto di minimo relativo.} ]$$

2. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della seguente funzione studiando la natura del punto critico  $x = 0$ :

$$g(x) = x(1-x)^{2/3} - \sin x.$$

$$[ g(x) = -\frac{2}{3}x^2 + o(x^2) \Rightarrow \alpha = 2, \text{ p.p.} = -\frac{2}{3}x^2, \quad x = 0 \text{ è punto di massimo relativo.} ]$$

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}. \quad \left[ -\frac{9}{8} \right]$$

### Esercizio 10

Determinando la parte principale per  $x \rightarrow x_0$ , studiare il segno delle seguenti funzioni in un intorno del punto  $x_0$  indicato:

1.  $f(x) = 2 \cos(x + x^2) - 2 + x^2 + 2x^3 \quad (x_0 = 0)$

$$[ f(x) \sim -\frac{11}{12}x^4 \quad (x \rightarrow 0), \text{ quindi } x = 0 \text{ è un punto di massimo relativo e in un intorno di } 0 \text{ si ha } f(x) < 0 \quad \forall x \neq 0. ]$$

2.  $f(x) = e^x + \log \frac{1-x}{e} \quad (x_0 = 0)$

$$[ f(x) \sim -\frac{1}{6}x^3 \quad (x \rightarrow 0), \text{ quindi } x = 0 \text{ è un punto di flesso e in un intorno di } 0 \text{ si ha } f(x) < 0 \text{ per } x > 0 \text{ e } f(x) > 0 \text{ per } x < 0. ]$$

3.  $f(x) = \cos(\log x - \log 2) + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (x_0 = 2)$

$$[ f(x) \sim \frac{1}{16}(x-2)^3 \quad (x \rightarrow 2), \text{ quindi } x = 2 \text{ è un punto di flesso e in un intorno di } 2 \text{ si ha } f(x) > 0 \text{ per } x > 2 \text{ e } f(x) < 0 \text{ per } x < 2. ]$$

4.  $f(x) = \log(\cos x) + \frac{x}{2} \sinh x \quad (x_0 = 0).$

$$[ f(x) \sim -\frac{13}{720}x^6 \quad (x \rightarrow 0), \text{ quindi } x = 0 \text{ è un punto di massimo relativo e in un intorno di } 0 \text{ si ha } f(x) < 0 \quad \forall x \neq 0. ]$$

### Esercizio 11

Determinare  $\alpha \in \mathbb{R}$  in modo che

$$f(x) = \cos x - \cosh x + \sin^2(\alpha x) = o(x^2) \quad (x \rightarrow 0).$$

[ Si ottiene  $f(x) = (\alpha^2 - 1)x^2 - \frac{1}{3}\alpha^4 x^4 + o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$ . Quindi se  $\alpha \neq \pm 1$ ,  $f(x)$  ha parte principale  $(\alpha^2 - 1)x^2$  e non è  $o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$ . Se invece  $\alpha = \pm 1$  si ha  $f(x) \sim -\frac{1}{3}x^4$  e quindi  $f(x) = o(x^2)$  ( $x \rightarrow 0$ ). ]

### Esercizio 12

Determinare al variare di  $a \in \mathbb{R}$  l'ordine di infinitesimo e la parte principale per  $x \rightarrow 0$  della funzione

$$f(x) = \log(\cos x) + \log(\cosh(ax)).$$

[ Si ottiene  $f(x) = \frac{1}{2}(a^2 - 1)x^2 - \frac{1}{12}(a^4 + 1)x^4 + o(x^4)$ . Quindi se  $a \neq \pm 1$  si ha  $f(x) \sim \frac{1}{2}(a^2 - 1)x^2$  ( $x \rightarrow 0$ ) e dunque  $f$  è un infinitesimo di ordine 2. Se invece  $a = \pm 1$ ,  $f$  è un infinitesimo di ordine 4 essendo  $f(x) \sim -\frac{1}{6}x^4$  ( $x \rightarrow 0$ ). ]