

Andrea Bacciotti

**TEORIA MATEMATICA DEI
CONTROLLI:
SISTEMI LINEARI**

Dispense dell'insegnamento di *Teoria matematica dei controlli* tenuto presso il corso di Laurea in
Matematica per le Scienze dell'ingegneria, Politecnico di Torino

Indice

Notazioni	7
1 Considerazioni generali sui sistemi	9
1.1 La nozione astratta di sistema	9
1.1.1 L'operatore ingresso-uscita	9
1.1.2 Tempo discreto e tempo continuo	10
1.1.3 Spazio degli ingressi	11
1.1.4 Spazio delle uscite e spazio degli stati	11
1.1.5 Connessione di sistemi	11
1.1.6 Analisi dei sistemi	12
1.1.7 Controllo dei sistemi	13
1.2 Proprietà dei sistemi	13
1.2.1 Condizioni iniziali	13
1.2.2 Sistemi deterministici	14
1.2.3 Operatori causali	14
1.2.4 Operatori invarianti nel tempo	14
1.3 Sistemi dinamici	15
1.3.1 Sistemi dinamici finito-dimensionali	15
1.3.2 Ingressi ammissibili	15
1.3.3 Equazioni di stato	15
1.4 Sistemi lineari	17
2 Sistemi non forzati	19
2.1 La mappa di flusso	19
2.2 Punti d'equilibrio e stabilità nel senso di Liapunov	22
3 Stabilità dei sistemi lineari non forzati	23
3.1 Posizioni d'equilibrio	23
3.2 Criteri di stabilità	24
3.3 L'equazione di Liapunov	26
3.4 Il criterio di Routh-Hurwitz	28
4 Sistemi lineari con ingressi e uscite	31
4.1 Insiemi raggiungibili	31
4.2 Linearità dell'operatore ingresso-uscita	34
4.3 Controllabilità in assenza di vincoli	35

4.3.1	Soluzione del problema della raggiungibilità	35
4.3.2	Matrice di controllabilità	36
4.3.3	Il criterio di Hautus	38
4.4	Controllabilità in presenza di vincoli	39
4.5	Osservabilità	41
4.5.1	Lo spazio di non osservabilità	41
4.5.2	Matrice di osservabilità	43
4.5.3	Ricostruzione dello stato iniziale	44
4.5.4	Dualità	45
4.6	Scomposizioni canoniche	45
4.6.1	Equivalenza lineare	45
4.6.2	Invarianza controllata	45
4.6.3	Parte controllabile	46
4.6.4	Parte osservabile	47
4.6.5	Scomposizione di Kalman	48
5	Stabilità interna e stabilità esterna dei sistemi lineari	49
5.1	Stabilità esterna	50
5.2	Stabilità I/O	53
5.3	Stabilità interna	54
5.4	Il caso $C = I$	54
5.5	Il caso generale	57
6	Stabilizzabilità	63
6.1	Retroazioni statiche dello stato	63
6.1.1	Controllabilità	64
6.1.2	Stabilità	65
6.2	Retroazioni statiche dell'uscita	69
6.3	Retroazioni dinamiche dell'uscita	71
6.3.1	Costruzione di un osservatore asintotico	72
6.3.2	Costruzione di un compensatore dinamico	73
7	Matrice di trasferimento	77
7.1	Analisi della risposta in frequenza	77
7.2	La matrice di trasferimento	79
7.3	Il problema della realizzazione	84
7.4	Diagramma di Nyquist	88
7.5	Stabilizzabilità BIBO	91
	Appendici	95
A.	Richiami di algebra lineare	97
A.1	Spazi vettoriali	97
A.2	Applicazioni lineari	98
A.3	Matrici	100
A.4	Autovalori, autovettori, forma di Jordan	100
A.5	Procedure per la costruzione di una base propria	104

A.6	Prodotto cartesiano di spazi vettoriali	108
A.7	Sottospazi e ortogonalità	109
B.	Sistemi di equazioni differenziali lineari	111
B.1	Richiami	111
B.2	La matrice esponenziale	113
B.3	A diagonale	114
B.4	A nilpotente	115
B.5	A diagonale a blocchi	116
B.6	Equivalenza lineare	116
B.7	A diagonalizzabile	117
B.8	Forma di Jordan	119
B.9	Stima asintotica delle soluzioni	120
B.10	Equazioni scalari di ordine $n > 1$	122
B.11	Sistemi non omogenei	124
B.12	Un esempio: l'equazione di ordine 2	128
C.	Trasformata di Laplace	131
C.1	Definizione e proprietà	131
C.2	Trasformate notevoli	136
C.2.1	Funzioni elementari	136
C.2.2	Funzioni discontinue	138
C.2.3	Delta di Dirac	139
C.2.4	Trasformata inversa	140
C.3	Applicazioni	140
C.3.1	Equazioni scalari	140
C.3.2	Sistemi lineari	143
C.4	Un esempio	145
E.	Raccolta di esercizi	147
E.1	Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali lineari	147
E.1.1	Integrale generale e soluzioni particolari di sistemi omogenei di due equazioni in due incognite	147
E.1.2	Integrale generale e soluzioni particolari di sistemi omogenei di tre equazioni in tre incognite	148
E.1.3	Sistemi non omogenei ed equazioni lineari di ordine superiore	149
E.2	Esercizi sulla stabilità dei sistemi lineari	150
E.2.1	Stabilità dei sistemi piani e funzioni di Liapunov	150
E.2.2	Stabilità dei sistemi piani ed equazione matriciale di Liapunov	151
E.2.3	Stabilità dei sistemi in dimensione maggiore di 2	152
E.3	Esercizi sulle proprietà strutturali dei sistemi con ingressi	153
E.3.1	Insieme raggiungibile, controllabilità, osservabilità	153
E.3.2	Forma di Kalman	154
E.3.3	Stabilità BIBS	155
E.3.4	Stabilizzabilità, assegnabilità dei poli	155
E.4	Esercizi su trasformata di Laplace e applicazioni alle equazioni differenziali	157

Notazioni

- Se A è un sottoinsieme di \mathbf{R}^n , indicheremo con $\overset{\circ}{A}$, \bar{A} , ∂A rispettivamente, l'insieme dei punti interni ad A , la chiusura di A , la frontiera di A rispetto alla topologia di \mathbf{R}^n
- $\mathcal{F}(A, B)$ indica l'insieme di tutte le funzioni da A a B
- $\mathcal{C}(a, b, U)$, dove a e b sono numeri reali ($a < b$) e $U \subseteq \mathbf{R}^n$, indica l'insieme di tutte le funzioni continue definite nell'intervallo $[a, b]$ e a valori in U
- $\tilde{\mathcal{C}}(a, b, U)$, dove a e b sono numeri reali ($a < b$) e $U \subseteq \mathbf{R}^n$, indica l'insieme di tutte le funzioni continue a tratti definite nell'intervallo $[a, b]$ e a valori in U (si ricorda che una funzione si dice continua a tratti sull'intervallo compatto $[a, b]$ se in tale intervallo la funzione ha al più un numero finito di punti di discontinuità, e ciascuna eventuale discontinuità è di prima specie)
- $\mathcal{C}(a, +\infty, U)$, dove $a \in \mathbf{R}$ e $U \subseteq \mathbf{R}^n$, indica l'insieme di tutte le funzioni continue definite nell'intervallo $[a, +\infty)$ e a valori in U (analogamente si definiscono gli insiemi $\mathcal{C}(-\infty, +\infty, U)$ e $\mathcal{C}(-\infty, b, U)$)
- $\tilde{\mathcal{C}}(a, +\infty, U)$, dove $a \in \mathbf{R}$ e $U \subseteq \mathbf{R}^n$, indica l'insieme di tutte le funzioni continue a tratti a valori in U definite nell'intervallo $[a, +\infty)$ (si ricorda che una funzione si dice continua a tratti sull'intervallo $[a, +\infty)$ se è continua a tratti in ogni intervallo compatto $[c, b] \subset [a, +\infty)$; analogamente si definiscono gli insiemi $\tilde{\mathcal{C}}(-\infty, +\infty, U)$ e $\tilde{\mathcal{C}}(-\infty, b, U)$)

Capitolo 1

Considerazioni generali sui sistemi

1.1 La nozione astratta di sistema

Qualunque sia la loro natura, i fenomeni osservabili nel mondo reale coinvolgono di regola diverse grandezze, e risultano dall'interazione di varie componenti: per questo si usa il termine generico "sistema".

Le conoscenze acquisite sperimentalmente a proposito di un determinato sistema fisico vengono spesso sintetizzate attraverso la messa a punto di un modello matematico: in questo modo possono essere facilmente comunicate ed elaborate in termini qualitativi o numerici, ed eventualmente utilizzate per "controllare" l'evoluzione del sistema stesso.

In queste lezioni il termine "sistema" sarà quasi sempre riferito al modello matematico, piuttosto che al fenomeno reale che questo vuole rappresentare. Senza nessuna pretesa di imbarcarci in una definizione assiomatica, cercheremo di introdurre il concetto di sistema descrivendone gli aspetti principali e le modalità di utilizzo.

1.1.1 L'operatore ingresso-uscita

Caratteristica principale di ogni sistema fisico è quella di evolversi nel tempo, cioè di modificare il proprio stato col trascorrere del tempo. Responsabili di tale evoluzione sono in generale le forze e i vincoli interni al sistema, e le sollecitazioni eventualmente imposte dall'esterno.

Per descrivere matematicamente un sistema fisico, è necessario che lo stato del sistema, le eventuali sollecitazioni esterne e le informazioni che il sistema ci fornisce sul proprio stato possano essere rappresentate per mezzo di grandezze numeriche variabili (nel tempo). In definitiva, per rappresentare un sistema è necessario assegnare:

- 1) un insieme \mathcal{T} di tempi
- 2) un insieme \mathcal{U} di "ingressi"
- 3) un insieme \mathcal{X} di "stati"
- 4) un insieme \mathcal{Y} di "uscite".

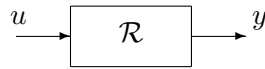
Le sollecitazioni imposte dall'esterno (dette anche *ingressi* o *input*) sono quindi descritte da funzioni $u(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Le informazioni fornite dal sistema sul proprio stato (dette anche *uscite*

o *output*) sono rappresentate da funzioni $y(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y})$, mentre lo stato è rappresentato da una funzione $x(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{X})$.

L'uscita dipende naturalmente dall'ingresso. Il sistema agisce quindi come un operatore (univoco) \mathcal{R} che trasforma ogni funzione di ingresso $u(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ in una funzione di uscita $y(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y})$. Scriveremo pertanto

$$y(\cdot) = \mathcal{R}(u(\cdot)) , \quad \text{con} \quad \mathcal{R} : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y}) .$$

L'operatore \mathcal{R} si chiama anche *operatore ingresso-uscita*. Nella teoria dei sistemi si fa talvolta uso di diagrammi a blocchi; a tal fine, un operatore \mathcal{R} si rappresenta graficamente mediante la figura



Un operatore ingresso-uscita \mathcal{R} non è necessariamente definito per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Per esempio, in talune applicazioni, le funzioni di ingresso devono sottostare a vincoli che la natura del problema impone sia sui valori che esse possono assumere, sia sul loro carattere funzionale. Il sottoinsieme di $\mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$ formato da tutte le funzioni che soddisfano le condizioni richieste costituisce il dominio di \mathcal{R} e si chiama *insieme degli ingressi ammissibili*.

Osservazione 1.1 Nel rappresentare un sistema come un operatore \mathcal{R} univoco, si suppone implicitamente di avere una conoscenza completa del funzionamento del sistema stesso. Questo, nella realtà, non è quasi mai vero. Di regola, l'uscita di un sistema è infatti influenzata da fattori dei quali non si è tenuto conto nella modellizzazione, o da incertezze e imprecisioni nell'identificazione dei parametri, o da eventi di natura aleatoria. Situazioni di questo genere, tuttavia, non saranno trattate in questo corso.

■

Seguono alcuni commenti sulla natura degli insiemi $\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{X}, \mathcal{Y}$.

1.1.2 Tempo discreto e tempo continuo

L'insieme dei tempi \mathcal{T} può essere un qualunque insieme totalmente ordinato dotato di una struttura di gruppo. In pratica vi sono due possibili scelte: $\mathcal{T} = \mathbf{Z}$ oppure $\mathcal{T} = \mathbf{R}$. Nel primo caso si parla di sistemi in *tempo discreto*, e le funzioni che descrivono l'ingresso, l'uscita e lo stato sono in realtà delle successioni. Nel secondo caso si parla di sistemi in *tempo continuo*. Molto spesso, uno stesso sistema fisico può essere rappresentato sia da un modello in tempo discreto che da uno in tempo continuo (ciò dipende dagli scopi e dai mezzi impiegati per la modellizzazione). In questo corso, ci occuperemo quasi esclusivamente di modelli a tempo continuo.

1.1.3 Spazio degli ingressi

Tra le variabili di ingresso, è opportuno fare delle distinzioni. Alcune di queste sono infatti identificabili come segnali che sfuggono al controllo dell'operatore (*disturbi*), altre come *segnali di riferimento* (cioè funzioni di uscita ideali alle quali l'uscita effettiva il sistema si deve adeguare), altre infine come *controlli* veri e propri, cioè segnali mediante i quali l'operatore può influenzare il comportamento del sistema e quindi la funzione d'uscita.

In generale, è conveniente ordinare le variabili di ingresso in modo da poterle rappresentare come componenti di un vettore. È quindi naturale supporre che l'insieme degli ingressi \mathcal{U} possieda una struttura di spazio vettoriale reale.

1.1.4 Spazio delle uscite e spazio degli stati

Anche le variabili di uscita e di stato, come quelle in ingresso, vengono ordinate e rappresentate come vettori. Quindi anche gli insiemi \mathcal{Y} e \mathcal{X} dove prendono valore le funzioni di uscita e di stato conviene che siano degli spazi vettoriali.

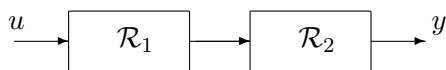
Spesso, anche nelle applicazioni più comuni, le variabili di stato sono più numerose delle variabili di ingresso e di uscita, e sono difficili da identificare in quanto la funzione $x(t)$ che ne rappresenta l'evoluzione non è direttamente disponibile all'osservatore, il quale può misurare solo gli ingressi e le uscite. A volte conviene pensarle come idealizzazioni matematiche inerenti al modello.

Vediamo adesso, per ora in maniera molto schematica, come si può operare con e sui sistemi.

1.1.5 Connessione di sistemi

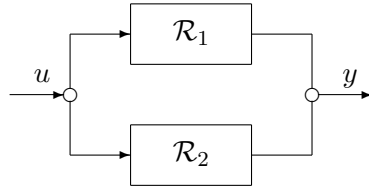
È importante saper operare con i sistemi, stabilendo delle connessioni oppure scomponendoli in sottosistemi. I tipi fondamentali di connessione, a cui abbiamo già fatto implicitamente riferimento, sono tre.

- 1) *Cascata* (o *serie*): l'ingresso coincide con l'uscita di un altro sistema



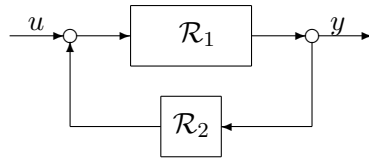
Indicando con \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R} gli operatori che rappresentano, rispettivamente, il primo sistema, il secondo sistema e il sistema risultante dalla connessione, si ha $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$, dove \circ indica il prodotto di composizione.

- 2) *Parallelo*: due sistemi hanno lo stesso ingresso e contribuiscono entrambe a determinare l'uscita



Indicando come prima con \mathcal{R}_1 , \mathcal{R}_2 , \mathcal{R} gli operatori che rappresentano, rispettivamente, il primo sistema, il secondo sistema e il sistema risultante dalla connessione, questa volta si ha $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$.

- 3) *Retroazione* (o *feedback*): l'uscita del primo sistema viene letta dal secondo sistema, elaborata, addizionata ad eventuali altri input esterni e quindi re-immessa nel canale di ingresso del primo sistema.



Adesso, l'operatore \mathcal{R} che rappresenta la connessione di \mathcal{R}_1 e \mathcal{R}_2 è definito implicitamente dalla relazione $y(\cdot) = \mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2(y(\cdot) + u(\cdot)))$.

Combinando questi tipi di connessioni, si possono ottenere schemi molto generali.

1.1.6 Analisi dei sistemi

Scopo dell'*analisi dei sistemi* è essenzialmente quello di studiare le proprietà dell'operatore ingresso-uscita per varie classi di sistemi. In particolare ha interesse dare delle stime dell'energia trasportata dal segnale di uscita, in funzione dell'energia trasportata dal segnale in ingresso. Per poter fare ciò, bisogna che ingressi e uscite vengano presi in spazi vettoriali dotati di norme opportune. Indichiamo rispettivamente con $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ e con $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$ le norme che si è ritenuto opportuno introdurre sullo spazio degli ingressi \mathcal{U} e sullo spazio delle uscite \mathcal{U} .

Il sistema dato, o l'operatore \mathcal{R} che lo rappresenta, si dice *I/O stabile* (rispetto alle norme $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}}$) se esiste una funzione

$$\alpha(r) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

continua e non-decrescente tale che

$$\|y(\cdot)\|_{\mathcal{Y}} \leq \alpha(\|u(\cdot)\|_{\mathcal{U}})$$

per ogni $u(\cdot) \in \mathcal{U}$. La costante $\alpha(0)$ prende il nome di *distorsione*, mentre la funzione $\alpha(r) - \alpha(0)$ si chiama *funzione-guadagno*.

Nell'analisi dei sistemi è di fondamentale importanza conoscere le condizioni sotto le quali un sistema è I/O stabile rispetto agli ingressi e, nel caso affermativo, ricavare informazioni sulle caratteristiche della funzione α .

1.1.7 Controllo dei sistemi

Il *progetto (design)* del sistema (o *sintesi*) consiste nel determinare una strategia di controllo, da esercitare utilizzando il canale di ingresso, in modo che l'uscita del sistema sia il più vicina possibile a quella desiderata.

Genericamente, esistono due possibili tipi di strategie di controllo.

- 1) *Controllo a circuito aperto*: il controllo viene implementato costruendolo direttamente come funzione del tempo $u : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$.
- 2) *Controllo a circuito chiuso*: il controllo viene implementato costruendo un secondo sistema e realizzando una connessione in retroazione.

Il secondo tipo è in generale preferibile (si parla anche di *controllo automatico*) in quanto mette il sistema in grado di autoregolarsi, in caso di perturbazioni impreviste, anche senza la presenza costante di un operatore umano. Nel controllo a circuito chiuso infatti, l'uscita del sistema principale, denominato *impianto* e rappresentato da un operatore $\mathcal{R}_I : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y})$, viene confrontata col segnale di riferimento. Quando la differenza tra le due funzioni diventa troppo sensibile, il secondo sistema, denominato *compensatore* o *controllore* e rappresentato da un operatore $\mathcal{R}_C : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$, comunica all'impianto le correzioni necessarie.

Talvolta è possibile accedere direttamente allo stato del sistema, e quindi realizzare il compensatore come un operatore $\mathcal{R}_C : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$. Per distinguere tra le due situazioni, si parla di *retroazione dell'uscita* nel primo caso e di *retroazione dello stato* nel secondo.

1.2 Proprietà dei sistemi

In questo corso ci occuperemo principalmente di sistemi lineari: si tratta di una classe molto particolare di sistemi, per i quali è disponibile una teoria relativamente sviluppata e completa, e della quale sono note numerose e importanti applicazioni. Arriveremo più avanti a definire cosa si intende per "sistema lineare".

In questo paragrafo, facendo per il momento ancora riferimento al caso generale, ci proponiamo di discutere le proprietà che è ragionevole aspettarsi, affinché un operatore $\mathcal{R} : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y})$ sia effettivamente rappresentativo di un sistema fisico.

1.2.1 Condizioni iniziali

L'idea di interpretare un sistema come un operatore

$$\mathcal{R} : \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{Y})$$

è molto semplice ma non del tutto soddisfacente. Nelle più comuni applicazioni infatti, gli ingressi non sono noti su tutto l'asse dei tempi, ma solo a partire da un certo istante $t_0 \in \mathcal{T}$, fissato una volta per tutte e chiamato *istante iniziale*. In generale, ha interesse studiare l'evoluzione futura del

sistema, e cioè le relazioni che intercorrono tra l'ingresso e l'uscita per $t \geq t_0$. Ma per determinare tale evoluzione, sarà allora necessario conoscere almeno lo stato $x_0 \in \mathcal{X}$ a cui si trovava il sistema all'istante iniziale t_0 . In questa ottica, conviene interpretare l'operatore ingresso-uscita come un operatore "inizializzato" $\mathcal{R}(t_0, x_0)(u(\cdot))$ che trasforma funzioni $u : \{t \in \mathcal{T} : t \geq t_0\} \mapsto \mathcal{U}$ in funzioni $y : \{t \in \mathcal{T} : t \geq t_0\} \mapsto \mathcal{Y}$, e scrivere $y(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u(\cdot))$.

1.2.2 Sistemi deterministici

Possiamo immaginare che nelle *condizioni iniziali*, cioè nel dato della coppia $(t_0, x_0) \in \mathcal{T} \times \mathcal{X}$, venga riassunta tutta la storia passata del sistema. In linea di principio, niente vieta di ritenere che uno stesso stato x_0 possa essere raggiunto dal sistema al tempo t_0 seguendo evoluzioni diverse, e che l'eventuale diversità dell'evoluzione passata abbia influenza su quella futura. Ha pertanto senso dare la seguente definizione.

Si dice che un operatore è *deterministico* se $\forall t_0 \in \mathcal{T}$,

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t \geq t_0 \text{ e } x_1 = x_2 \implies y_1(t) = y_2(t) \quad \forall t \geq t_0$$

dove $y_1(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_1)(u_1(\cdot))$ e $y_2(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_2)(u_2(\cdot))$.

Per esempio, in accordo con questa definizione, vanno considerati non deterministici i cosiddetti sistemi con memoria (o con ritardo), nei quali il comportamento per $t \geq t_0$ dipende non solo dallo stato in cui si trova il sistema al tempo t_0 , ma anche da tutti quegli stati che il sistema ha attraversato al trascorrere del tempo da un certo istante $t_0 - \tau$ fino a t_0 . Sistemi con memoria sono molto importanti nelle applicazioni, ma la loro trattazione va al di là degli scopi di questo corso.

Nel seguito dunque, parlando di "operatori" o di "sistema" intenderemo sempre, senza bisogno di specificarlo, "operatori" o "sistemi" deterministici.

1.2.3 Operatori causali

Si dice che un operatore inizializzato $\mathcal{R}(t_0, x_0)$ è *causale* (o *non-anticipativo*) se $\forall t_0 \in \mathcal{T}, \forall t > t_0, \forall x_0 \in \mathcal{X}$

$$u_1(s) = u_2(s) \text{ per } t_0 \leq s \leq t \implies y_1(t) = y_2(t)$$

dove $y_1(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u_1(\cdot))$ e $y_2(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u_2(\cdot))$. Di regola, i sistemi che si incontrano nelle applicazioni pratiche sono causali.

1.2.4 Operatori invarianti nel tempo

Si noti che il comportamento di un sistema dal punto di vista delle relazioni ingresso-uscita può dipendere dall'istante iniziale t_0 . Quando ciò effettivamente accade, si dice che il sistema, o l'operatore che lo rappresenta, è *tempo-variante*. Diremo invece che un sistema è *invariante nel tempo* (o *stazionario*, o anche *autonomo*) se $\forall t_0, \theta \in \mathcal{T}, \forall x_0 \in \mathcal{X}$, per ogni ingresso ammissibile $u(\cdot)$, posto

$$v(t) = u(t + \theta), \quad y(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u(\cdot)), \quad z(\cdot) = \mathcal{R}(t_0 - \theta, x_0)(v(\cdot))$$

si ha

$$z(t) = y(t + \theta) .$$

Anche se i sistemi tempo-varianti hanno molta importanza nelle applicazioni (soprattutto ai fenomeni biologici) in questo corso ci occuperemo quasi esclusivamente di sistemi invarianti nel tempo.

Proposizione 1.1 *Sia \mathcal{R} un operatore inizializzato invariante nel tempo, e sia $y(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u(\cdot))$. Allora,*

$$y(t) = z(t - t_0)$$

dove $z(\cdot) = \mathcal{R}(0, x_0)(v(\cdot))$, e $v(t) = u(t + t_0)$.

In altre parole, quando si ha a che fare con operatori invarianti nel tempo non è restrittivo assumere che l'istante iniziale coincida con l'origine dell'insieme dei tempi.

1.3 Sistemi dinamici

In questo paragrafo circoscriveremo l'oggetto dei nostri studi ai quei sistemi modellizzati per mezzo di equazioni differenziali ordinarie in dimensione finita; essi si chiamano anche *sistemi dinamici* (differenziali).

1.3.1 Sistemi dinamici finito-dimensionali

Si dice che un sistema è finito-dimensionale quando le variabili di ingresso, di stato e di uscita possono essere rappresentate come vettori con un numero finito di componenti reali, ovvero $\mathcal{X} = \mathbf{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathbf{R}^m$, $\mathcal{Y} = \mathbf{R}^p$, essendo n, m, p numeri interi assegnati, maggiori o uguali ad 1. In particolare, il sistema si dice di tipo SISO (single-input-single-output) quando $m = p = 1$; altrimenti si dice di tipo MIMO (multi-input-multi-output).

Come abbiamo già accennato, nelle applicazioni più comuni n è più grande di m e p .

1.3.2 Ingressi ammissibili

Trattandosi di sistemi dinamici, per funzione di *ingresso ammissibile* si intenderà sempre una funzione $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(-\infty, +\infty, \mathbf{R}^m)$. Tuttavia, per certe applicazioni, è necessario limitare gli ingressi ammissibili alle funzioni $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(-\infty, +\infty, U)$, dove U è un sottoinsieme limitato non vuoto di \mathbf{R}^m dato una volta per tutte. Il ruolo di U è quello di rappresentare eventuali limitazioni sull'energia disponibile per esercitare il controllo.

1.3.3 Equazioni di stato

Si suppongano date due funzioni

$$f(x, u, t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

e

$$h(x, t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p .$$

Un *sistema dinamico* è definito dal sistema di equazioni (dette anche *equazioni di stato*)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, u, t) \quad (1.1)$$

e dalla *funzione d'osservazione*¹

$$y = h(x, t) . \quad (1.2)$$

Per ogni data funzione di ingresso ammissibile $u(t)$, la (1.1) diventa un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale

$$\dot{x} = f(x, u(t), t) = g(x, t) . \quad (1.3)$$

A proposito delle funzioni f e h , assumeremo sempre che:

- f sia continua e dotata di derivate parziali prime continue rispetto ad x , continua rispetto a u , e continua a tratti rispetto a t ;
- h sia continua rispetto a x , e continua a tratti rispetto a t .

Sotto tali ipotesi, per ogni coppia di valori iniziali $(t_0, x_0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ e per ogni funzione di ingresso ammissibile esiste un'unica soluzione locale del *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x, t) \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases} \quad (1.4)$$

Questo significa che esiste almeno un intervallo non degenere I ($t_0 \in I$) ed esiste un'unica funzione $x(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ tale che $\frac{dx}{dt}(t) = g(x(t), t)$ per ogni $t \in I$ e $x(t_0) = x_0$. Se inoltre esistono funzioni continue $a(t)$ e $b(t)$ tali che

$$\|f(x, u, t)\| \leq a(t)\|x\| + b(t)$$

per ogni $(x, u, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}$, allora ogni soluzione locale può essere prolungata, conservando l'unicità, sull'intero asse reale.

Volendo esplicitare la dipendenza della soluzione del problema (1.4) dallo stato iniziale e dall'ingresso, useremo la notazione

$$x = x(t; t_0, x_0, u(\cdot)) . \quad (1.5)$$

Per mezzo della rappresentazione (1.5), possiamo enunciare alcune proprietà, che corrispondono ad aspettative fisicamente naturali.

$$x(t_0; t_0, x_0, u(\cdot)) = x_0 \quad \forall t_0, x_0, u(\cdot) \quad (1.6)$$

$$x(t_2; t_0, x_0, w(\cdot)) = x(t_2; t_1, x(t_1; t_0, x_0, u(\cdot)), v(\cdot)) \quad (1.7)$$

ove la funzione di ingresso $w : [t_0, t_2] \rightarrow \mathcal{U}$ è ottenuta giustapponendo le funzioni $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathcal{U}$ e $v : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{U}$ cioè:

¹Per certe applicazioni, è talvolta utile considerare funzioni di osservazione della forma più generale $y = h(x, u, t)$.

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{per } t \in [t_0, t_1) \\ v(t) & \text{per } t \in [t_1, t_2] \end{cases} .$$

L'operatore ingresso-uscita associato al sistema dinamico (1.1), (1.2)

$$y(\cdot) = \mathcal{R}(t_0, x_0)(u(\cdot)) \quad (1.8)$$

si definisce come $y(t) = h(x(t; t_0, x_0, u(\cdot)), t)$ per ogni $t \geq t_0$. In analogia con (1.5) useremo talvolta la notazione

$$y = y(t; t_0, x_0, u(\cdot)) . \quad (1.9)$$

Proposizione 1.2 *Nelle ipotesi indicate sopra a proposito di f e h , il sistema dinamico (1.1), (1.2) definisce un operatore ingresso-uscita (1.8) deterministico e causale sull'insieme degli ingressi ammissibili. Inoltre, l'uscita $y(t)$ è una funzione continua a tratti (e addirittura continua, se h non dipende esplicitamente da t e u)*

Proposizione 1.3 *L'operatore ingresso-uscita (1.8) definito dal sistema dinamico (1.1), (1.2) risulta invariante nel tempo se le funzioni f e h non dipendono esplicitamente dal tempo. Ossia, se $f(x, u, t) = f(x, u)$ e $h(x, t) = h(x)$.*

Dimostrazione Sia $u(t)$ un ingresso ammissibile. Data una coppia di valori iniziali (t_0, x_0) , sia $x(t)$ la corrispondente soluzione dell'equazione (1.1) e sia $y(t) = h(x(t))$. Sia infine θ un numero reale dato.

Posto $u_\theta(t) = u(t - \theta)$ e $x_\theta(t) = x(t - \theta)$, si ha

$$\frac{d}{dt}x_\theta(t) = \frac{d}{dt}x(t - \theta) = f(x(t - \theta), u(t - \theta)) = f(x_\theta(t), u_\theta(t)) .$$

In altre parole, $x_\theta(t)$ coincide con la soluzione relativa all'ingresso traslato $u_\theta(t)$ e alle condizioni iniziali $(t_0 + \theta, x_0)$. Posto infine $z(t) = h(x_\theta(t))$, è chiaro che $z(t)$ coincide con $y_\theta(t) = y(t - \theta)$.

■

1.4 Sistemi lineari

Nella teoria matematica dei sistemi, un ruolo di rilievo spetta, sia dal punto di vista storico che dal punto di vista delle applicazioni, ai sistemi rappresentabili mediante operatori lineari.

Definizione 1.1 *Supponiamo che \mathcal{U} , \mathcal{Y} , \mathcal{X} siano spazi vettoriali. Un operatore inizializzato \mathcal{R} invariante nel tempo si dice lineare se $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $\forall u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}, \mathcal{U})$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ si ha*

$$\mathcal{R}(0, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(\alpha_1 u_1(\cdot) + \alpha_2 u_2(\cdot)) = \alpha_1 \mathcal{R}(0, x_1)(u_1(\cdot)) + \alpha_2 \mathcal{R}(0, x_2)(u_2(\cdot)) .$$

Definizione 1.2 *Un sistema dinamico finito-dimensionale e invariante nel tempo, definito da equazioni del tipo (1.1), (1.2), si dice lineare quando*

$$f(x, u) = Ax + Bu \quad \text{and} \quad h(x) = Cx$$

dove A, B, C sono matrici a elementi reali di dimensioni, rispettivamente, $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$.

Proposizione 1.4 *Dato un sistema dinamico*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad (1.10)$$

lineare nel senso della Definizione 1.2, l'operatore ingresso-uscita associato (1.8) è lineare, nel senso della Definizione 1.1.

La dimostrazione della Proposizione 1.4 sarà data più avanti.

Capitolo 2

Sistemi non forzati

Un sistema si dice *non forzato* quando l'ingresso u è identicamente posto uguale a zero. Un sistema non forzato può comunque presentare un'evoluzione nel tempo: per effetto dell'energia inizialmente accumulata nel sistema lo stato iniziale non corrisponderà infatti, in generale, ad uno stato di riposo. Nell'analisi delle proprietà di un sistema, lo studio del comportamento in assenza di termini forzanti costituisce, di regola, una delle fasi più importanti e, comunque, preliminare.

Scopo di questo capitolo è l'introduzione di alcune proprietà rilevanti nella caratterizzazione del comportamento qualitativo "a lungo termine" dei sistemi dinamici non forzati. Poiché tali proprietà riguardano la variabile di stato, possiamo ignorare almeno per il momento la funzione di osservazione h (o meglio, supporre che h sia l'identità). Faremo sempre riferimento ad un sistema finito-dimensionale, a tempo continuo e invariante nel tempo.

In definitiva, ai fini di questo capitolo l'oggetto delle nostre attenzioni si riduce a un sistema di equazioni differenziali (in generale, non lineari)

$$\dot{x} = f(x, 0) = f(x) . \quad (2.1)$$

A proposito della (2.1), in accordo con quanto fatto nel capitolo precedente, supporremo che f sia definita, continua e dotata di derivate parziali prime continue per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, e che inoltre soddisfi una disuguaglianza del tipo

$$\|f(x)\| \leq a\|x\| + b$$

per certe costanti positive a, b . Sappiamo che sotto queste condizioni è garantita, per ogni condizione iniziale (t_0, x_0) , esistenza, unicità e prolungabilità all'infinito della soluzione al problema di Cauchy.

2.1 La mappa di flusso

Ogni soluzione della (2.1) può essere interpretata come una parametrizzazione di una curva di \mathbf{R}^n . Per ogni $t \in \mathbf{R}$, posto $x = \varphi(t)$, il vettore tangente a tale curva in x coincide con $f(x)$. Per questa ragione una funzione $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ (o meglio, l'equazione differenziale autonoma da essa definita) si chiama anche un *campo vettoriale*.

Il sostegno di una curva parametrizzata per mezzo di una soluzione di un sistema autonomo prende anche il nome di *orbita* o *traiettoria*. Bisogna fare attenzione a non confondere il grafico di una soluzione $\varphi(t)$, che è un sottoinsieme di $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, con l'orbita di $\varphi(t)$, che coincide con l'immagine

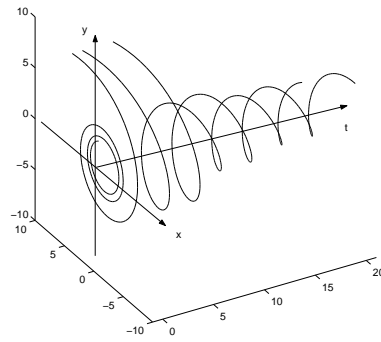


Figura 2.1: Due soluzioni e loro proiezione

$\varphi(\mathbf{R})$ e che è un sottoinsieme di \mathbf{R}^n . Per chiarire ulteriormente, osserviamo che l'orbita di φ non è altro che la proiezione ortogonale su \mathbf{R}^n del grafico di φ (si veda la Figura 2.1).

Come abbiamo già osservato, nelle nostre ipotesi la (2.1) ha un'unica soluzione per ogni condizione iniziale assegnata. Possiamo formulare tale proprietà, tenendo conto della sua validità globale, scrivendo che date due soluzioni globali, $x = \varphi(t)$ e $x = \psi(t)$ della (2.1),

$$\exists \bar{t} : \varphi(\bar{t}) = \psi(\bar{t}) \implies \varphi(t) = \psi(t) \quad \forall t \in \mathbf{R} . \quad (2.2)$$

Da un punto di vista geometrico, la (2.2) ci dice che se i grafici di due soluzioni hanno un punto in comune, allora coincidono.

Lemma 2.1 *Sia $\varphi(t)$ una soluzione di (2.1) e sia $T \in \mathbf{R}$. Allora anche la funzione $\psi(t) = \varphi(t+T)$ è una soluzione. Viceversa se φ e ψ sono due soluzioni della (2.1),*

$$\exists t_1, t_2 : \varphi(t_1) = \psi(t_2) \implies \psi(t) = \varphi(t+T) \quad \forall t \in \mathbf{R} , \quad (2.3)$$

dove si è posto $T = t_1 - t_2$.

Dimostrazione La prima affermazione è un caso particolare della Proposizione 1.2 del capitolo precedente. Per quanto riguarda la seconda, si ponga $T = t_1 - t_2$ e $\chi(t) = \varphi(t+T)$. Chiaramente, $\chi(t)$ è una soluzione. Essa soddisfa alla condizione iniziale

$$\chi(t_2) = \varphi(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi(t_1) .$$

Ma anche $\psi(t)$ è la soluzione e, per ipotesi, soddisfa alla stessa condizione. In conseguenza dell'unicità delle soluzioni, si ha allora

$$\chi(t) = \varphi(t+T) = \psi(t) \quad \forall t \in \mathbf{R} .$$

■

Si può interpretare la prima affermazione del lemma dicendo che traslando grafici di soluzioni si ottengono ancora grafici di soluzioni. Tutte le soluzioni ottenute in questo modo sono ovviamente parametrizzazioni equivalenti della stessa curva: ad esse corrisponde dunque una stessa orbita (si veda ancora la Figura 2.1). La seconda affermazione del lemma può anzi essere interpretata dicendo

che se due orbite hanno un punto in comune, esse devono coincidere (a questo proposito, si faccia ben attenzione alla differenza tra la (2.2) e la (2.3)). Dunque, per ogni punto di \mathbf{R}^n passa una e una sola orbita.

Per indicare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

si adotta spesso la notazione

$$x = x(t, x_0) \quad (2.5)$$

che ha il vantaggio di evidenziare, oltre alla variabile temporale t , anche lo stato iniziale x_0 . La (2.5) definisce una funzione da $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, a cui si dà il nome di *mappa di flusso* generato dal campo vettoriale f . Essa può essere interpretata come una funzione di t per ogni dato x_0 , oppure come una funzione da \mathbf{R}^n in \mathbf{R}^n parametrizzata da t . Confrontando le due notazioni (1.5) e (2.5) si osserva che

$$x(t, x_0) = x(t; 0, x_0, 0) .$$

Osservazione 2.1 Un piccolo commento sulle notazioni. La scelta di indicare con x la mappa di flusso non è certo delle più felici: propriamente, la lettera x dovrebbe infatti essere usata per le variabili di stato, cioè per i valori che la mappa di flusso assume. Per di più, abbiamo già usato la x con un significato ancora diverso nella (1.5). L'introduzione di nuovi simboli comporta, d'altra parte, il rischio di complicazioni e appesantimenti in vista dei futuri sviluppi, rendendo preferibile questo piccolo abuso che, per altro, facendo attenzione alla notazione completa e al contesto, non dovrebbe essere fonte di equivoci.

■

Osservazione 2.2 Mentre nella (1.5) le variabili temporali t_0, t vanno pensate come degli istanti (cioè come ascisse sull'asse dei tempi), nella (2.5), la variabile t va piuttosto pensata come la lunghezza dell'intervallo di tempo necessario per operare il trasferimento di stato indicato.

■

Proposizione 2.1 *La mappa di flusso del campo vettoriale f soddisfa le proprietà*

$$x(0, x_0) = x_0 \quad (2.6)$$

e

$$x(t, x(s, x_0)) = x(t + s, x_0) \quad (2.7)$$

qualunque siano $t, s \in \mathbf{R}$ e $x_0 \in \mathbf{R}^n$.

Dimostrazione La (2.6) segue immediatamente dalla (1.6)

$$x(0, x_0) = x(0; 0, x_0) = x_0 .$$

Per quanto riguarda la (2.7) osserviamo che

$$x(t, x(s, x_0)) = x(t + s; s, x(s; 0, x_0)) = x(t + s; 0, x_0) = x(t + s, x_0)$$

in virtù della (1.7).

■

2.2 Punti d'equilibrio e stabilità nel senso di Liapunov

Dato un sistema dinamico invariante nel tempo e non forzato (2.1), si dice che $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ è un *punto d'equilibrio* se la funzione costante $\varphi(t) \equiv \bar{x}$ è una soluzione. Tali punti si dicono anche *punti critici* o *punti singolari*. Se \bar{x} è un punto d'equilibrio, allora l'orbita passante per \bar{x} si riduce a $\{\bar{x}\}$.

Proposizione 2.2 *Un punto \bar{x} è d'equilibrio se e solo se $f(\bar{x}) = 0$.*

Un punto d'equilibrio \bar{x} si dice *isolato* se esiste un intorno \mathcal{O} di \bar{x} tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathcal{O}, x \neq \bar{x}$. Nel seguito, \bar{x} indicherà sempre un punto d'equilibrio isolato dal sistema (2.1).

Definizione 2.1 *Si dice che \bar{x} è un punto d'equilibrio stabile (nel senso di Liapunov) per il sistema (2.1) se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$:*

$$\|x_0 - \bar{x}\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t; x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

La Definizione 2.1 richiede che le soluzioni di (2.1) corrispondenti a condizioni iniziali sufficientemente vicine a \bar{x} siano definite per ogni $t \geq 0$.

Definizione 2.2 *Si dice che \bar{x} è un punto d'equilibrio attrattivo se esiste un $\delta_0 > 0$ tale che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0) = \bar{x} \tag{2.8}$$

per ogni stato iniziale x_0 per cui $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_0$.

Definizione 2.3 *Se \bar{x} è allo stesso tempo un punto d'equilibrio stabile e attrattivo, si dice che è asintoticamente stabile. Se inoltre la (2.8) vale per ogni $x \in \mathbf{R}^n$, \bar{x} si dirà globalmente asintoticamente stabile. Infine, se la convergenza delle soluzioni verso \bar{x} ha carattere esponenziale, e cioè se esistono $M > 0, \alpha > 0$ tali che*

$$\|x(t; x_0) - \bar{x}\| \leq M e^{-\alpha t} \quad \forall x_0 \quad \text{con} \quad \|x_0 - \bar{x}\| < \delta_0$$

si parla di stabilità esponenziale.

Capitolo 3

Stabilità dei sistemi lineari non forzati

In questo capitolo continueremo ad occuparci di sistemi dinamici lineari non forzati

$$\dot{x} = Ax \tag{3.1}$$

ove A è una matrice quadrata di ordine n a elementi reali e $x \in \mathbf{R}^n$. Ci concentreremo in particolare sul problema della stabilità.

3.1 Posizioni d'equilibrio

Le posizioni d'equilibrio del sistema (3.1) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $Ax = 0$. Quindi il sistema (3.1) ha sempre una posizione d'equilibrio per $x = 0$. Tale posizione d'equilibrio è unica (quindi isolata) se e solo se $\det A \neq 0$. Altrimenti si ha un'infinità di posizioni d'equilibrio (nessuna delle quali isolata), il cui insieme forma un sottospazio di \mathbf{R}^n .

Osservazione 3.1 *Supponiamo che esista un punto $\bar{x} \neq 0$ tale che $A\bar{x} = 0$. Con riferimento al sistema (3.1), \bar{x} è una posizione d'equilibrio stabile se e solo se l'origine è una posizione d'equilibrio stabile.*

Infatti, posto $y = x - \bar{x}$, si ha

$$\dot{y} = \dot{x} = Ax = Ax - A\bar{x} = Ay .$$

Le deviazioni di x rispetto a \bar{x} , ovvero le deviazioni di y rispetto alla posizione $y = 0$, vengono quindi determinate dallo stesso sistema di equazioni che determina le deviazioni di x rispetto alla posizione $x = 0$.

Osservazione 3.2 *Se un punto d'equilibrio è attrattivo per il sistema (3.1), allora deve essere isolato. Dunque se A è singolare, non ci sono posizioni d'equilibrio attrattive. Pertanto, se il sistema (3.1) possiede una posizione d'equilibrio attrattiva \bar{x} , allora $\bar{x} = 0$.*

Le due osservazioni precedenti portano a concludere che nello studio della stabilità e della stabilità asintotica dei sistemi lineari, non è restrittivo limitarsi all'origine.

Osservazione 3.3 *Se l'origine è stabile [rispettivamente, asintoticamente stabile] per il sistema (3.1) allora l'origine è stabile [rispettivamente, asintoticamente stabile] per tutti i sistemi linearmente equivalenti a (3.1).*

Dimostrazione Sia $B = P^{-1}AP$ e sia $\psi(t)$ una generica soluzione del sistema $\dot{y} = By$. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e sia $\varepsilon' = \varepsilon/\|P^{-1}\|$. Poiché (3.1) è stabile nell'origine, esiste un $\delta' > 0$ tale che $\|\varphi(0)\| < \delta' \implies \|\varphi(t)\| < \varepsilon'$ per ogni $t \geq 0$. Poniamo $\delta = \delta'/\|P\|$. Allora

$$\|\psi(0)\| < \delta \implies \|\varphi(0)\| = \|P\psi(0)\| \leq \|P\| \cdot \|\psi(0)\| < \delta'$$

da cui

$$\|\psi(t)\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|\varphi(t)\| < \varepsilon .$$

Infine, supponiamo che $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ per una data soluzione di (3.1). Preso $\sigma > 0$ e posto $\sigma' = \sigma/\|P^{-1}\|$, esiste allora $T > 0$ tale che

$$t > T \implies \|\varphi(t)\| < \sigma'$$

e di qui segue $\|\psi(t)\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|\varphi(t)\| < \sigma$. A questo punto non è difficile completare il ragionamento. ■

3.2 Criteri di stabilità

Per i sistemi lineari invarianti nel tempo, lo studio della stabilità può essere ricondotto ad un problema puramente algebrico.

Teorema 3.1 *Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa allora l'origine è un punto d'equilibrio globalmente e esponenzialmente stabile per il sistema (3.1).*

Viceversa, se l'origine è un punto d'equilibrio (localmente) attrattivo per il sistema (3.1), allora tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa.

Dimostrazione Supponiamo che gli autovalori di A siano tutti con parte reale negativa. Allora nella (B.15) si può scegliere α e k_0 in modo che $\alpha_0 < \alpha < 0$. Che l'origine sia globalmente e esponenzialmente attrattiva, è una conseguenza immediata. Per quanto riguarda la stabilità, facciamo ancora ricorso alla (B.15). Come già osservato, α si può prendere negativo; per $t \geq 0$, si ha allora $e^{\alpha t} \leq 1$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$, è sufficiente prendere $\delta = \varepsilon/k_0$.

Supponiamo ora che l'origine sia localmente attrattiva. Esiste dunque un intorno dell'origine con la proprietà che tutte le soluzioni corrispondenti ad uno stato iniziale appartenente a tale intorno, devono tendere a zero per $t \rightarrow +\infty$. Procediamo per esclusione.

Cominciamo a supporre che vi sia un autovalore λ con parte reale strettamente positiva.

Se λ è reale e se v è un autovettore corrispondente (ovviamente anch'esso reale) allora si ha una soluzione della forma $e^{\lambda t}v$. Si noti che v può essere preso di norma arbitrariamente piccola.

Se invece $\lambda = \alpha + i\beta$ è complesso, allora si ha una soluzione della forma

$$e^{\alpha t}[(\cos \beta t)u + (\sin \beta t)w] ,$$

dove u, w sono certi vettori reali, che possono essere presi di norma arbitrariamente piccola, e $\alpha > 0$. In entrambi i casi, queste soluzioni sono non limitate per $t \geq 0$. Ciò contraddice l'ipotesi.

In modo analogo si esclude la possibilità di autovalori λ con parte reale nulla. In tal caso infatti o $\lambda = 0$, e allora vi sarebbe una soluzione costante non nulla, oppure λ è un numero puramente immaginario, e allora vi sarebbe una soluzione periodica del tipo $(\cos \beta t)u + (\sin \beta t)w$ che è limitata ma non tende a zero. ■

Dal Teorema 3.1 e dalla sua dimostrazione si deducono altre informazioni, che possono essere riassunte nel modo seguente.

- La condizione che la matrice A abbia tutti i suoi autovalori con parte reale strettamente negativa è necessaria e sufficiente affinché l'origine sia un punto d'equilibrio asintoticamente stabile per il sistema lineare (3.1).
- L'origine, se è localmente attrattiva per il sistema lineare (3.1), allora lo è anche globalmente e esponenzialmente.
- Per un sistema lineare, se l'origine è un punto d'equilibrio localmente attrattivo, allora è anche stabile.

Può invece darsi il caso di un sistema lineare con un punto d'equilibrio stabile non attrattivo; per esempio, $\dot{x} = 0$ con $x \in \mathbf{R}$, le cui soluzioni sono tutte costanti, oppure il sistema dell'Esempio B.1, le cui soluzioni sono tutte periodiche.

Un'altro fatto che si desume dalla dimostrazione del Teorema 3.1 è che se c'è anche un solo autovalore di A con parte reale positiva allora l'origine è instabile. A questo punto, resta solo da prendere in considerazione il caso in cui tutti gli autovalori di A hanno parte reale non positiva, e ce n'è almeno uno con parte reale esattamente uguale a zero.

Teorema 3.2 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) *Gli autovalori di A hanno tutti parte reale non positiva, e gli eventuali autovalori con parte reale nulla hanno la molteplicità algebrica coincidente con quella geometrica;*
- (ii) *la matrice esponenziale e^{tA} è limitata in norma per $t \geq 0$;*
- (iii) *L'origine è stabile per il sistema (3.1).*

Dimostrazione (i) \implies (ii) Se gli autovalori di A hanno tutti parte reale non positiva, e se gli eventuali autovalori con parte reale nulla hanno la molteplicità algebrica uguale a quella geometrica, allora possiamo applicare la (B.14) con $\alpha = \alpha_0 = 0$. La conclusione è immediata.

(ii) \implies (iii) Se esiste una costante $k_0 > 0$ tale che $\|e^{tA}\| \leq k_0 \forall t \geq 0$, allora $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$ si ha

$$\|e^{tA}x_0\| \leq k_0\|x_0\|. \quad (3.2)$$

La definizione di stabilità è soddisfatta prendendo $\delta = \varepsilon/k_0$.

Proviamo infine, per assurdo, che (iii) \implies (i). Sappiamo già che se l'origine è stabile non possono esistere autovalori con parte reale strettamente positiva. Supponiamo che vi sia un autovalore λ con parte reale nulla, la cui molteplicità geometrica sia minore di quella algebrica. Se $\lambda = i\beta$ con $\beta \neq 0$, vi sarà almeno una soluzione complessa della forma $(\cos \beta t + i \sin \beta t)(tu + v)$, dove v è un autovettore associato a λ , e u è un autovettore generalizzato; sia v che u possono essere presi arbitrariamente piccoli. Ma allora, vi sarà anche una soluzione reale uguale a

$$(\cos \beta t)[tu_1 + v_1] - (\sin \beta t)[tu_2 + v_2]$$

dove v_1, v_2, u_1, u_2 sono certi vettori reali. Tale soluzione corrisponde alla condizione iniziale $\xi = v_1$, come è facile verificare. Poiché u_1 e u_2 non possono essere entrambi nulli, la soluzione presenta un andamento oscillatorio, e l'ampiezza delle oscillazioni cresce al crescere di t . Abbiamo cioè identificato una soluzione non limitata per $t \geq 0$. Ciò contraddice l'ipotesi di stabilità.

Il caso $\lambda = 0$ si tratta in modo analogo ed è lasciato al lettore. ■

Con ragionamenti del tutto analoghi, si può anche provare la proposizione seguente.

Proposizione 3.1 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) *Gli autovalori di A hanno tutti parte reale non positiva, e gli eventuali autovalori con parte reale nulla hanno la molteplicità algebrica coincidente con quella geometrica;*
- (ii) *tutte le soluzioni del sistema sono limitate per $t \geq 0$.*

3.3 L'equazione di Liapunov

In questa sezione studieremo una diversa caratterizzazione dei sistemi lineari stabili. Ricordiamo che una matrice P simmetrica e a coefficienti reali si dice:

- *definita positiva* se per ogni $0 \neq x \in \mathbf{R}^n$ si ha $x^t P x > 0$;
- *semidefinita positiva* se $x^t P x \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

Se le condizioni richieste si applicano alla matrice $-P$, allora si dice, rispettivamente, che P è *definita negativa*, *semidefinita negativa*. Si dice infine che P è *indefinita* se $x^t P x$ assume sia valori positivi che negativi.

Teorema 3.3 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *gli autovalori della matrice A hanno tutti parte reale strettamente negativa;*
2. *esiste una matrice reale simmetrica definita positiva P tale che per ogni soluzione non nulla $\varphi(t)$ della (3.1), posto $V(x) = x^t P x$ e $g(t) = V(\varphi(t))$, si ha*

$$\left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0} = -\|\varphi(0)\|^2 ; \quad (3.3)$$

3. *esiste una matrice reale simmetrica definita positiva P tale che*

$$A^t P + P A = -I . \quad (3.4)$$

Dimostrazione Supponiamo valida la prima affermazione e dimostriamo la seconda. Indichiamo con p_{ij} gli elementi della matrice P da costruire, e siano

$$\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$$

le colonne della matrice esponenziale e^{tA} . Poniamo

$$p_{ij} = \int_0^{+\infty} \psi_i^t(s) \psi_j(s) ds .$$

Ogni p_{ij} è ben definito: infatti, se gli autovalori di A hanno parte reale negativa, tutti gli elementi di e^{tA} tendono a zero esponenzialmente e quindi l'integrale improprio converge.

Dimostriamo che la matrice P così costruita ha le proprietà richieste. È chiaro che P è simmetrica. Se $\varphi(t)$ indica la soluzione corrispondente ad uno stato iniziale $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, abbiamo la rappresentazione

$$\varphi(t) = e^{tA} x = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) x_i .$$

Dunque,

$$\begin{aligned}
 V(x) = x^t P x &= \sum_{i,j=1}^n p_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^{+\infty} \psi_i^t(s) \psi_j(s) ds \right) x_i x_j = \\
 &= \int_0^{+\infty} \sum_{i,j=1}^n (\psi_i^t(s) \psi_j(s)) x_i x_j ds = \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n \psi_i(s) x_i \right)^t \left(\sum_{j=1}^n \psi_j(s) x_j \right) ds = \\
 &= \int_0^{+\infty} \|\varphi(s)\|^2 ds .
 \end{aligned}$$

Da qui segue subito che $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$. Resta da far vedere la (3.3). Premesso che

$$V(\varphi(t)) = \int_0^{+\infty} \|\varphi(t+s)\|^2 ds = \int_t^{+\infty} \|\varphi(\sigma)\|^2 d\sigma$$

si ha, qualunque sia $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_t^{+\infty} \|\varphi(\sigma)\|^2 d\sigma \Big|_{t=0} = \\
 &= -\|\varphi(t)\|^2 \Big|_{t=0} = -\|x\|^2 .
 \end{aligned}$$

Supponiamo ora valida la seconda affermazione e dimostriamo la terza. Riprendiamo la funzione $V(\varphi(t))$ introdotta poc'anzi e calcoliamone la derivata in un modo diverso. Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} V(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt} ((\varphi(t))^t P \varphi(t)) = (\dot{\varphi}(t))^t P \varphi(t) + (\varphi(t))^t P \dot{\varphi}(t) = \\
 &= (\varphi(t))^t A^t P \varphi(t) + (\varphi(t))^t P A \varphi(t) .
 \end{aligned}$$

Valutiamo questa identità per $t = 0$ e poniamo $\varphi(0) = x$. Tenendo conto dell'ipotesi, si ha

$$x^t [A^t P + P A] x = -x^t x$$

da cui, per l'arbitrarietà della soluzione $\varphi(t)$ scelta, segue $A^t P + P A = -I$.

Supponiamo infine valida la terza affermazione e dimostriamo la prima. Sia λ un autovalore di A , reale o complesso, e sia $Av = \lambda v$ ($v \neq 0$). Si ha

$$\begin{aligned}
 -\bar{v}^t v &= \bar{v}^t (A^t P + P A) v = (A \bar{v})^t P v + \bar{v}^t P A v = \\
 &= \bar{\lambda} \bar{v}^t P v + \lambda \bar{v}^t P v = (\bar{\lambda} + \lambda) \bar{v}^t P v = 2\alpha \bar{v}^t P v
 \end{aligned}$$

dove α indica la parte reale di λ . Ora, non è difficile verificare che se P è una qualunque matrice reale simmetrica definita positiva, e se v è un vettore (reale o complesso) diverso dall'origine, allora $\bar{v}^t P v > 0$. Dunque, necessariamente $\alpha < 0$.

■

La (3.4) può essere interpretata come un'equazione nell'incognita matriciale P , ed è infatti nota come *equazione matriciale di Liapunov*. Essa equivale ad un sistema lineare di $n(n+1)/2$ equazioni

algebriche avente come incognite gli elementi di P ; il Teorema 3.3 stabilisce tra l'altro che se gli autovalori di A hanno tutti parte reale strettamente negativa, allora tale sistema è risolubile. Più precisamente, sotto tale condizione, la (3.4) ammette una e una sola soluzione definita positiva.

Il seguente corollario fornisce una versione generalizzata della (3.4).

Corollario 3.1 *Se gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa, allora per ogni matrice reale simmetrica definita positiva Q , esiste una soluzione (reale, simmetrica, definita positiva) dell'equazione*

$$A^t P + PA = -Q . \quad (3.5)$$

Se per una data matrice reale simmetrica definita positiva Q , esiste una soluzione (reale, simmetrica, definita positiva) della (3.5), allora gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa.

Il seguente teorema caratterizza invece la stabilità.

Teorema 3.4 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *gli autovalori di A hanno tutti parte reale non positiva, e gli eventuali autovalori con parte reale nulla hanno la molteplicità algebrica coincidente con quella geometrica;*
2. *esiste una matrice reale simmetrica definita positiva P tale che la matrice $A^t P + PA$ è semidefinita negativa.*

3.4 Il criterio di Routh-Hurwitz

I risultati che abbiamo esaminato in questo capitolo mettono in evidenza l'importanza di criteri che permettono di prevedere il segno delle radici di un polinomio. Gli autovalori di una matrice A altro non sono infatti che le soluzioni dell'equazione algebrica che si ottiene annullando il polinomio caratteristico. Sia dunque

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

un polinomio a coefficienti reali di grado n , monico¹.

Proposizione 3.2 *Condizione necessaria affinché $P(\lambda)$ abbia tutte le radici con parte reale negativa è che i coefficienti a_i siano tutti maggiori di zero.*

Dimostrazione Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici reali (negative) di $P(\lambda)$ e siano

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_h \pm i\beta_h$$

quelle complesse coniugate, con $\alpha_1 < 0, \dots, \alpha_h < 0$. Allora deve aversi

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & (\lambda - \lambda_1)^{\mu_1} \dots \\ & \dots (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k} (\lambda - (\alpha_1 + i\beta_1))^{\nu_1} (\lambda - (\alpha_1 - i\beta_1))^{\nu_1} \dots \\ & \dots (\lambda - (\alpha_h + i\beta_h))^{\nu_h} (\lambda - (\alpha_h - i\beta_h))^{\nu_h} . \end{aligned}$$

¹ *Monico* significa che il coefficiente di grado massimo è uguale ad 1. Poiché siamo interessati alle radici dell'equazione $P(\lambda) = 0$, non è restrittivo assumere che $P(\lambda)$ sia monico.

Le coppie di binomi dove compaiono le soluzioni complesse possono essere sostituite da trinomi

$$\lambda^2 + p_1\lambda + q_1, \dots, \lambda^2 + p_h\lambda + q_h$$

dove, essendo $\alpha_1 < 0, \dots, \alpha_h < 0$, tutti i coefficienti $p_1, \dots, p_h, q_1, \dots, q_h$ sono positivi.

Eseguendo la moltiplicazione, si trova che i coefficienti di $P(\lambda)$ devono essere tutti positivi. ■

La condizione della Proposizione 3.2 è certamente anche sufficiente se il grado del polinomio è minore o uguale a 2, ma non lo è in generale. Per esempio, si ha

$$\left[\lambda - \frac{1 + i\sqrt{11}}{2} \right] \cdot \left[\lambda - \frac{1 - i\sqrt{11}}{2} \right] \cdot [\lambda + 2] = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 6 .$$

Esistono vari criteri che permettono di stabilire quando un polinomio ha tutte le radici nel semipiano $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$. Questi vanno genericamente sotto il nome di *criteri di Routh e Hurwitz*. Presentiamo, senza dimostrazione, uno di questi criteri, che si basa sul calcolo del segno dei determinanti di n matrici $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ di ordine rispettivamente uguale a 1, 2, \dots, n . Tali matrici sono costruite a partire dai coefficienti di $P(\lambda)$, secondo la seguente procedura. Innanzitutto, per comodità di notazione, poniamo $a_j = 0$ per ogni valore dell'indice $j > n$. Definiamo quindi

$$\Delta_1 = a_1 ,$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} ,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} ,$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} ,$$

$$\Delta_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{pmatrix} ,$$

e così via, fino all'ordine n . Osserviamo che nelle righe di posto dispari (la prima, la terza, ecc.) si dispongono i coefficienti di indice dispari in ordine crescente, mentre nelle righe di posto pari si dispongono i coefficienti di indice pari, sempre in ordine crescente, incluso il primo che è uguale ad 1. Gli elementi che compongono le prime due righe si ripetono nelle righe successive ma spostati ogni volta di una posizione a destra. Le posizioni che si liberano all'inizio vengono occupate da zeri mentre, ad ogni nuova ripetizione, viene eliminato l'ultimo elemento sulla destra della riga.

Teorema 3.5 *Il polinomio $P(\lambda)$ ha tutte le radici nel semipiano $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ se e solo se tutti i determinanti delle matrici $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ costruite come sopra indicato, sono positivi.*

Per esempio, nel caso $n = 3$ la condizione si riduce a

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_3 > 0 .$$

Il Criterio di Routh-Hurwitz si trova enunciato in questa forma o su Pontrjagin L., *Équations différentielles ordinaires*, MIR 1975, oppure su Coppel W.A., *Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations*, Heath Mathematical Monographs, 1965, cui si rimanda per la dimostrazione.

Capitolo 4

Sistemi lineari con ingressi e uscite

Incominciamo ad occuparci di sistemi fisici dotati di ingressi e di uscite nella cui modellizzazione matematica intervengono equazioni differenziali ordinarie. Ci concentreremo in particolare sulle cosiddette proprietà strutturali dei sistemi dinamici lineari finito-dimensionali e invarianti nel tempo, che sono definiti, come sappiamo già, da equazioni della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.1)$$

dove $x \in \mathbf{R}^n$ rappresenta lo stato del sistema, $u \in \mathbf{R}^m$ rappresenta l'ingresso e $y \in \mathbf{R}^p$ rappresenta l'uscita (n , m e p interi qualunque maggiori o uguali a 1). In generale si assumono, come ingressi ammissibili, tutte le funzioni $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, U)$, dove U è un sottoinsieme assegnato di \mathbf{R}^m . Il ruolo di U è quello di rappresentare eventuali restrizioni sui valori delle funzioni in ingresso. Nelle applicazioni, accade di frequente che U è limitato. Tuttavia, la maggior parte dei risultati di questo capitolo riguardano il caso particolare in cui $U = \mathbf{R}^m$. Infatti, le proprietà strutturali sono quelle che dipendono esclusivamente dal dato delle matrici A, B, C , e che quindi prescindono dalla presenza di eventuali vincoli sulle funzioni in ingresso. Del resto, come vedremo, la conoscenza delle proprietà strutturale è utile, e comunque preliminare, anche ai fini dello studio del caso generale in cui U è un sottoinsieme qualunque di \mathbf{R}^m .

4.1 Insiemi raggiungibili

Il sistema di equazioni differenziali

$$\dot{x} = Ax + Bu(t) \quad (4.2)$$

ha, per ogni ingresso ammissibile $u(t)$ e per ogni stato iniziale $x(0) = x_0$, un'unica soluzione, definita per $t \geq 0$, che indicheremo con $x(t, x_0, u(\cdot))$.

Il sistema (4.2) si può pensare come un sistema di equazioni lineari non omogeneo, con termine forzante $b(t) = Bu(t)$. Pertanto,

$$x(t, x_0, u(\cdot)) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} Bu(\tau) d\tau \right). \quad (4.3)$$

Come abbiamo già osservato nell'Appendice B (paragrafo B.11), la (4.3) si decompone come la somma di

$$x(t, x_0, 0) = e^{tA}x_0 \quad (4.4)$$

che si dice anche la *soluzione libera* (o *non forzata*) del sistema, in quanto corrisponde all'ingresso $u = 0$, e la

$$x(t, 0, u(\cdot)) = \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau \quad (4.5)$$

che rappresenta la soluzione corrispondente allo stesso ingresso ma con stato iniziale nullo.

La Proposizione 2.1 ha un analogo in questo contesto.

Proposizione 4.1 *Per ogni coppia di numeri reali $t, s \in [0, +\infty)$, per ogni ingresso ammissibile $u(t)$, per ogni stato iniziale x_0 , si ha*

$$x(0, x_0, u(\cdot)) = x_0$$

e

$$x(t + s, x_0, u(\cdot)) = x(t, x(s, x_0, u(\cdot)), w(\cdot))$$

dove si è posto $w(t) = u(t + s)$.

■

Introduciamo adesso alcuni importanti concetti di natura geometrica relativi ai sistemi della forma (4.1), con vincoli sugli ingressi definiti da un insieme $U \subseteq \mathbf{R}^m$.

Definizione 4.1 *Siano $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$. Si dice che x_1 è raggiungibile da x_0 al tempo $T > 0$ (o anche che x_0 è trasferibile in x_1 al tempo T) se esiste un ingresso ammissibile $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ tale che*

$$x_1 = x(T, x_0, u(\cdot)) . \quad (4.6)$$

Se si fissa x_0 , l'insieme dei punti raggiungibili da x_0 al tempo T si indica con $\mathbf{R}(T, x_0, U)$ e si chiama insieme raggiungibile.

Si possono considerare altri tipi di insiemi raggiungibili, a seconda delle esigenze; per esempio

$$\mathbf{R}([0, T], x_0, U) = \cup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{R}(t, x_0, U) \quad \text{e} \quad \mathbf{R}(x_0, U) = \cup_{t \geq 0} \mathbf{R}(t, x_0, U) .$$

Analogamente si può parlare di *insiemi trasferibili*: per esempio, si indica talvolta con $\mathbf{C}(T, x_1, U)$ l'insieme dei punti x_0 per i quali esiste un ingresso ammissibile $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ per cui vale la (4.6).

Definizione 4.2 *Un sistema della forma (4.1), con insieme di vincoli U , si dice:*

- *accessibile da x_0 al tempo T quando $\overset{\circ}{\mathbf{R}}(T, x_0, U) \neq \emptyset$;*
- *localmente controllabile da x_0 al tempo T quando $x_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(T, x_0, U)$;*
- *localmente controllabile lungo la soluzione libera da x_0 al tempo T se $\phi(T, x_0, 0) \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(T, x_0, U)$;*

- globalmente controllabile da x_0 al tempo T se $\mathbf{R}(T, x_0, U) = \mathbf{R}^n$;
- globalmente controllabile al tempo T se $\mathbf{R}(T, x_0, U) = \mathbf{R}^n$ qualunque sia x_0 .

Si possono naturalmente definire concetti analoghi con riferimento agli altri tipi di insiemi raggiungibili, o ai corrispondenti tipi di insiemi trasferibili.

Esempio 4.1 Si consideri un processo scalare di tipo lineare

$$\dot{x} = x + u, \quad x, u \in \mathbf{R},$$

con vincoli sulle funzioni di controllo $|u(t)| \leq u_0$, dove $u_0 \in \mathbf{R}^+$ è assegnato. Risolvendo l'equazione, per $t \geq 0$ si ha

$$x(t) = e^t x_0 + \int_0^t e^{(t-s)} u(s) ds$$

e quindi

$$e^t x_0 - \int_0^t e^{(t-s)} u_0 ds \leq x(t) \leq e^t x_0 + \int_0^t e^{(t-s)} u_0 ds$$

cioè

$$e^t(x_0 - u_0) + u_0 \leq x(t) \leq e^t(x_0 + u_0) - u_0$$

e infine

$$e^t x_0 - (e^t - 1)u_0 \leq x(t) \leq e^t x_0 + (e^t - 1)u_0 .$$

Chiaramente, il sistema è accessibile e localmente controllabile lungo la soluzione libera, qualunque siano x_0 e u_0 (tenere presente che per $t \geq 0$, $e^t - 1 \geq 0$).

Se $-u_0 < x_0 < u_0$, per ogni t si ha $x_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(t, x_0, U) = (e^t(x_0 - u_0) + u_0, e^t(x_0 + u_0) - u_0)$. Dunque il sistema è anche localmente controllabile a x_0 . Inoltre, $x_0 - u_0 < 0 < x_0 + u_0$ e quindi $\mathbf{R}(x_0, U) = \mathbf{R}$. Se invece $x_0 \geq u_0$ allora $\mathbf{R}(x_0, U)$ è la semiretta $[x_0, +\infty)$. Il sistema non è localmente controllabile. Analogamente per $x_0 \leq -u_0$.

Rimuovendo i vincoli sull'ingresso (ammettendo cioè come ingressi tutte le funzioni continue a tratti a valori in \mathbf{R}^n) si ottiene un esempio di sistema globalmente controllabile.

■

Le affermazioni elencate nella seguente proposizione discendono facilmente dalle definizioni date.

Proposizione 4.2 *Un sistema della forma (4.1), con insieme di vincoli U :*

- (i) *è accessibile da x_0 al tempo T se e solo se è accessibile dall'origine al tempo T ;*
- (ii) *è controllabile da x_0 al tempo T lungo la soluzione libera se e solo se è controllabile dall'origine al tempo T lungo la soluzione libera ovvero, se e solo se $0 \in \overset{\circ}{\mathbf{R}}(T, 0, U)$;*
- (iii) *è globalmente controllabile da x_0 al tempo T se e solo se è globalmente controllabile dall'origine al tempo T .*

4.2 Linearità dell'operatore ingresso-uscita

I risultati di questo paragrafo sono fondamentali per caratterizzare le principali proprietà dei sistemi lineari privi di vincoli sui valori degli ingressi.

Teorema 4.1 *Sia dato il sistema lineare (4.1). Qualunque siano a, b ($-\infty < a < b \leq +\infty$), l'applicazione che associa ad ogni $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(a, b, \mathbf{R}^m)$ la funzione*

$$t \mapsto x(t, 0, u(\cdot)) = \int_a^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau \in \mathcal{C}(a, b, \mathbf{R}^n) \quad (4.7)$$

è lineare.

Dimostrazione La verifica segue immediatamente dalle ben note proprietà di linearità dell'integrale. Se $u_1, u_2 \in \tilde{\mathcal{C}}(a, b, \mathbf{R}^m)$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, anche $\alpha u_1 + \beta u_2 \in \tilde{\mathcal{C}}(a, b, \mathbf{R}^m)$ e

$$\int_a^t e^{(t-\tau)A} B (\alpha u_1(\tau) + \beta u_2(\tau)) d\tau = \alpha \int_a^t e^{(t-\tau)A} B u_1(\tau) d\tau + \beta \int_a^t e^{(t-\tau)A} B u_2(\tau) d\tau .$$

■

Fissiamo ora $T \geq 0$. La (4.7) si può reinterpretare come un'applicazione Λ che associa ad ogni funzione $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(0, T, \mathbf{R}^m)$ l'elemento di \mathbf{R}^n

$$x = \Lambda(u(\cdot)) = x(T, 0, u(\cdot)) = \int_0^T e^{(T-\tau)A} B u(\tau) d\tau \in \mathbf{R}^n . \quad (4.8)$$

Corollario 4.1 *L'applicazione $\Lambda : \tilde{\mathcal{C}}(0, T, \mathbf{R}^m) \rightarrow \mathbf{R}^n$ è lineare.*

■

Siamo ora in grado di dimostrare la Proposizione 1.4. Dalla (4.3), per ogni ingresso ammissibile $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^m$ e ogni stato iniziale x_0 , si deduce infatti una rappresentazione per la funzione di uscita del sistema (4.1)

$$y(t, x_0, u(\cdot)) = Cx(t, x_0, u(\cdot)) = Ce^{tA}(x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau) . \quad (4.9)$$

Ovviamente, $y(0, x_0, u(\cdot)) = Cx_0$ e

$$y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_0, 0) + y(t, 0, u(\cdot)) . \quad (4.10)$$

Dimostrazione della Proposizione 1.4 Per il Teorema 4.1, l'applicazione che associa ad ogni $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(0, T, \mathbf{R}^m)$ la funzione $x(t, 0, u(\cdot))$ è lineare. Quindi anche l'applicazione che associa ad $u(\cdot)$ la funzione $y(t, 0, u(\cdot)) = Cx(t, 0, u(\cdot))$ è lineare. D'altra parte pure l'applicazione che associa x_0 alla funzione $y(t, x_0, 0) = Ce^{tA}x_0$ è lineare. Per concludere, basta tener presente la (4.10) e osservare che se $f_1 : V_1 \rightarrow W$, $f_2 : V_2 \rightarrow W$ sono applicazioni lineari, allora $f_1 + f_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ è un'applicazione lineare.

■

4.3 Controllabilità in assenza di vincoli

Le proprietà di controllabilità del sistema (4.1) consistono in certe relazioni che il sistema induce tra le variabili di ingresso e le variabili di stato. Come vedremo, esse dipendono solo dalle matrici A e B , e non coinvolgono le variabili di uscita. In questo paragrafo ci interesseremo al caso di sistemi senza vincoli sulle variabili in ingresso.

Ricordando la definizione (4.8) dell'operatore Λ , si ottiene facilmente il seguente enunciato.

Corollario 4.2 *Per ogni fissato $T > 0$, l'insieme $R(T, 0, \mathbf{R}^m)$ coincide con l'immagine dell'operatore Λ ed è quindi un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^n . L'insieme $R(T, x_0, \mathbf{R}^m)$, per ogni $x_0 \neq 0$, si ottiene traslando $R(T, 0, \mathbf{R}^m)$ mediante il vettore $v = e^{TA}x_0$, ed è quindi una sottovarietà lineare di \mathbf{R}^n .*

Segue poi dal Corollario 4.2 che in assenza di vincoli, il sistema (4.1) è accessibile da uno stato qualunque se e solo se $R(T, 0, \mathbf{R}^m) = \mathbf{R}^n$, e quindi se e solo se è globalmente controllabile al tempo T .

4.3.1 Soluzione del problema della raggiungibilità

Il seguente teorema fornisce una prima condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità globale di un sistema lineare senza vincoli sui controlli.

Teorema 4.2 *Il sistema (4.1) con $U = \mathbf{R}^m$ è globalmente controllabile al tempo $T > 0$ se e solo se la matrice*

$$\Gamma(T) = \int_0^T e^{-sA} B B^t e^{-sA^t} ds$$

è non singolare.

Dimostrazione Prima facciamo vedere che se $\Gamma(T)$ è non singolare, allora per ogni coppia di stati $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^n$ esiste un controllo $u(t)$ per cui vale la (4.6): in ciò consiste infatti la proprietà da provare. Si ponga

$$u(s) = -B^t e^{(T-s)A^t} \Gamma^{-1}(T) [e^{TA} x_0 - x_1] \quad (4.11)$$

e si calcoli

$$e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds = \quad (4.12)$$

$$= e^{TA} x_0 - \left[\int_0^T e^{(T-s)A} B B^t e^{(T-s)A^t} ds \right] \Gamma^{-1}(T) [e^{TA} x_0 - x_1] = \quad (4.13)$$

$$= e^{TA} x_0 - \Gamma(T) \Gamma^{-1}(T) [e^{TA} x_0 - x_1] \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

(nell'integrale si è applicata la sostituzione $\sigma = T - s$). In definitiva,

$$e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds = x_1 .$$

Per quanto riguarda il viceversa, serve qualche premessa. È chiaro che $\Gamma(T)$ è simmetrica, e che la forma quadratica

$$\xi^t \Gamma(T) \xi = \int_0^T \|B^t e^{-sA} \xi\|^2 ds \quad (4.16)$$

è, in generale, semidefinita positiva. Supponiamo ora che $\Gamma(T)$ sia singolare: esisterà allora un punto $x_0 \in \mathbf{R}^n$ ($x_0 \neq 0$) tale che $x_0^t \Gamma(T) x_0 = 0$.

Tenendo conto di (4.16), si dovrebbe avere $B^t e^{-sA} x_0 = 0$ identicamente per ogni $s \in [0, T]$. L'ipotesi di controllabilità globale implica che partendo da x_0 si possa raggiungere l'origine al tempo T : ovvero,

$$e^{TA} x_0 = - \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s) ds \quad (4.17)$$

per qualche ingresso ammissibile $u(t)$. Dalla (4.17) segue

$$x_0 = - \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds$$

e quindi

$$\|x_0\|^2 = x_0^t x_0 = -x_0^t \int_0^T e^{-sA} B u(s) ds = - \int_0^T u^t(s) B^t e^{-sA} x_0 ds = 0$$

mentre x_0 era stato scelto diverso da zero. L'asserto è così provato per assurdo. ■

Osservazione 4.1 La (4.11) fornisce una risposta (teorica) al problema di determinare il controllo che permette di trasferire il sistema dallo stato x_0 allo stato x_1 . ■

4.3.2 Matrice di controllabilità

Il criterio offerto dal Teorema 4.2 ci sarà utile nei successivi sviluppi teorici, ma è chiaramente di scarsa utilità pratica. Il criterio che andiamo a dimostrare in questa sezione costituisce, da questo punto di vista, un risultato migliore, perchè può essere verificato eseguendo semplici calcoli algebrici a partire dalle matrici A e B che definiscono il sistema.

Teorema 4.3 Per il sistema (4.1) l'insieme $\mathbf{R}(T, 0, \mathbf{R}^m)$ è indipendente da T . Si ha infatti, per ogni $T > 0$,

$$\mathbf{R}(T, 0, \mathbf{R}^m) = \text{span} \{b^1, \dots, b^m; Ab^1, \dots, Ab^m; \dots; A^{n-1}b^1, \dots, A^{n-1}b^m\} \quad (4.18)$$

dove b^1, \dots, b^m sono le colonne di B .

Dimostrazione Poiché entrambi i membri della (4.18) sono sottospazi di \mathbf{R}^n , è sufficiente far vedere che i rispettivi spazi ortogonali coincidono. Sia $\mu \neq 0$ un vettore ortogonale a $\mathbf{R}(T, 0, \mathbf{R}^m)$. Sia cioè, per ogni controllo ammissibile,

$$0 = \langle \mu, \int_0^T e^{(T-\tau)A} B u(\tau) d\tau \rangle = \int_0^T \langle \mu, e^{(T-\tau)A} B u(\tau) \rangle d\tau = \int_0^T \langle \mu, e^{\theta A} B u(T-\theta) \rangle d\theta. \quad (4.19)$$

Tenendo conto della (4.19), dimostriamo che

$$\langle \mu, e^{\theta A} Bu \rangle = 0 \quad \forall \theta \in (0, T) \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbf{R}^m . \quad (4.20)$$

Infatti, in caso contrario, esisterebbero $\bar{\theta} \in (0, T)$ e $\bar{u} \in \mathbf{R}^m$ tali che $\langle \mu, e^{\bar{\theta} A} B\bar{u} \rangle \neq 0$ (per fissare le idee, diciamo $\langle \mu, e^{\bar{\theta} A} B\bar{u} \rangle > 0$). Per il principio della permanenza del segno, esisterebbe allora un $\delta > 0$ tale che $(\bar{\theta} - \delta, \bar{\theta} + \delta) \subset (0, T)$ e la funzione

$$\theta \mapsto \langle \mu, e^{\theta A} B\bar{u} \rangle$$

si manterrebbe positiva per $\bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta$. Posto $\bar{\tau} = T - \bar{\theta}$, potremmo dunque definire

$$u(\tau) = \begin{cases} \bar{u} & \text{per } \bar{\tau} - \delta < \tau < \bar{\tau} + \delta \\ 0 & \text{altrimenti} . \end{cases} \quad (4.21)$$

Allora,

$$u(T - \theta) = \begin{cases} \bar{u} & \text{per } \bar{\theta} - \delta < \theta < \bar{\theta} + \delta \\ 0 & \text{altrimenti} . \end{cases} \quad (4.22)$$

Dunque,

$$\int_0^T \langle \mu, e^{\theta A} Bu(T - \theta) \rangle d\theta = \int_{\bar{\theta} - \delta}^{\bar{\theta} + \delta} \langle \mu, e^{\theta A} B\bar{u} \rangle d\theta > 0$$

in contraddizione con la (4.19). Dunque la (4.20) è vera. Passando al limite per $\theta \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\langle \mu, Bu \rangle = 0 \quad \forall u \in \mathbf{R}^m .$$

Scegliendo successivamente $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quest'ultima mostra che μ è ortogonale a b^1, \dots, b^m .

Inoltre, derivando la (4.20) rispetto a θ , si ha

$$\langle \mu, e^{\theta A} ABu \rangle = 0 \quad \forall \theta \in (0, T) \quad \text{e} \quad \forall u \in \mathbf{R}^m$$

da cui, per $\theta \rightarrow 0^+$, segue

$$\langle \mu, ABu \rangle = 0 .$$

Ragionando come prima, si vede allora che μ è ortogonale ai vettori Ab^1, \dots, Ab^m . Non resta adesso che iterare il procedimento, finché non si giunge alla conclusione.

Viceversa, sia μ ortogonale a

$$b^1, \dots, b^m, Ab^1, \dots, Ab^m, \dots, A^{n-1}b^1, \dots, A^{n-1}b^m .$$

Per ogni $u \in \mathbf{R}^m$, risulta allora

$$\langle \mu, Bu \rangle = \dots = \langle \mu, A^{n-1}Bu \rangle = 0 .$$

Inoltre,

$$\langle \mu, e^{\theta A} Bu \rangle = \langle \mu, \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^i A^i}{i!} Bu \rangle + \langle \mu, \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\theta^i A^i}{i!} Bu \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta^i}{i!} \langle \mu, A^i Bu \rangle + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\theta^i}{i!} \langle \mu, A^i Bu \rangle .$$

I termini della prima sommatoria sono tutti nulli, ma anche quelli della seconda lo sono in quanto, per il Teorema di Cayley-Hamilton, per ogni $i \geq n$, il vettore $A^i Bu$ è combinazione lineare degli $A^i Bu$ con $i < n$. In conclusione, $\langle \mu, e^{\theta A} Bu \rangle = 0, \forall \theta \in [0, T]$ e $\forall u \in \mathbf{R}^m$. Ma allora anche

$$\langle \mu, \int_0^T e^{(T-\tau)A} B u(\tau) d\tau \rangle = 0$$

qualunque sia $u \in \tilde{C}([0, T], \mathbf{R}^m)$ e il teorema è provato. ■

Definizione 4.3 Quando il sistema (4.1) è globalmente controllabile con $U = \mathbf{R}^m$ per qualche (e quindi per ogni) $T > 0$ si dice anche che è completamente controllabile.

Corollario 4.3 Il sistema (4.1) è completamente controllabile se e solo se

$$\text{rank} [B|AB|\dots|A^{n-1}B] = n \quad (4.23)$$

dove $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ indica la matrice con n righe e $n \cdot m$ colonne che si ottiene scrivendo una accanto all'altra, nell'ordine, le colonne delle matrici $B, AB, \dots, A^{n-1}B$.

La matrice $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ prende anche il nome di *matrice di controllabilità* o *matrice di Kalman* del sistema (4.1).

4.3.3 Il criterio di Hautus

Soffermiamoci ancora sulla questione della completa controllabilità del sistema (4.1) per presentare un criterio alternativo a quello fornito dal Corollario 4.3.

Teorema 4.4 (criterio di Hautus) *Il sistema (4.1) è completamente controllabile se e solo se*

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \text{rank} [A - \lambda I | B] = n. \quad (4.24)$$

Prima di procedere alla dimostrazione, osserviamo che la (4.24) è certamente verificata se λ non è un autovalore di A . Ricordiamo inoltre che un sottospazio V di \mathbf{R}^n si dice *invariante* per A se $AV \subseteq V$.

Lemma 4.1 *Se V è un sottospazio invariante per A , allora esiste un autovettore $v \neq 0$ di A contenuto in V .*

Dimostrazione Sia $q = \dim V$ e sia v_1, \dots, v_n una base di \mathbf{R}^n , tale che i suoi primi q vettori v_1, \dots, v_q costituiscano una base di V . Con riferimento a questa base, la matrice A deve assumere la forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

in forza dell'ipotesi di invarianza. L'operatore da V in V definito dalla matrice A_{11} avrà un autovettore della forma $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = w \in V$ corrispondente a qualche autovalore λ . Non è difficile verificare che w è anche un autovettore di A corrispondente a λ . ■

Dimostrazione del Teorema 4.4 Dimostriamo ora che la (4.23) implica la (4.24). Supponiamo, per assurdo, che per qualche $\lambda \in \mathbf{C}$, le righe della matrice $[A - \lambda I | B]$ (che sono in numero di n) possano essere linearmente dipendenti. Esisterebbe un vettore $\eta \in \mathbf{C}^n$ ($\eta \neq 0$) tale che

$$\eta^t A = \lambda \eta^t \quad \text{e} \quad \eta^t B = 0 .$$

In particolare, la funzione

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \eta^t B = (e^{\lambda t} \eta)^t B = \eta^t B + \lambda t \eta^t B + \frac{\lambda^2 t^2}{2} \eta^t B + \dots$$

sarebbe identicamente nulla. Si avrebbe cioè

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = 0 .$$

Applicando il teorema di derivazione per serie e tenendo conto che

$$\eta^t A = \lambda \eta^t \implies \eta^t A^2 = \lambda \eta^t A = \lambda^2 \eta^t \quad \text{ecc.}$$

si ottiene, in definitiva,

$$\eta^t B = \eta^t AB = \eta^t A^2 B = \dots = 0 .$$

Ciò implica che le n righe della matrice $[B|AB|\dots|A^{n-1}B]$ sono linearmente dipendenti, e dunque il suo rango non è uguale ad n .

Facciamo infine vedere che la (4.24) implica la (4.23). Per il Teorema di Cayley-Hamilton, se la (4.23) non valesse, allora le righe di tutte le matrici della forma $A^j B$ ($j = 0, 1, \dots$) appartenerebbero ad uno stesso sottospazio proprio di \mathbf{C}^n . Esisterebbe cioè un vettore $v \neq 0$ tale che

$$v^t B = v^t AB = v^t A^2 B = \dots = 0 . \quad (4.25)$$

Posto $w = A^t v$, si ha

$$w^t B = (A^t v)^t B = v^t AB = 0 , \quad w^t AB = (A^t v)^t AB = v^t A^2 B = 0 , \quad \text{ecc.}$$

Indicato con V il sottospazio di \mathbf{C}^n costituito da tutti i vettori v per cui vale la (4.25), abbiamo così provato che se $v \in V$, anche $w = A^t v \in V$, e cioè che V è invariante rispetto all'operatore lineare associato alla matrice A^t . Per il Lemma 4.1, deve allora esistere un vettore non nullo $\eta \in V$ ed un numero complesso $\lambda \in \mathbf{C}$ tale che

$$A^t \eta = \lambda \eta \quad \text{ovvero} \quad \eta^t A = \lambda \eta^t .$$

Per la definizione di V , si ha in particolare che $\eta^t B = 0$. In conclusione, le righe di $[A - \lambda I|B]$ sono linearmente dipendenti e la (4.24) non vale. ■

4.4 Controllabilità in presenza di vincoli

Se l'insieme U che rappresenta i vincoli sui valori degli ingressi è un sottoinsieme proprio di \mathbf{R}^m , l'insieme $\mathbf{R}(T, 0, U)$ non è più in generale un sottospazio di \mathbf{R}^n ; tuttavia, conserva una proprietà importante.

Proposizione 4.3 *Sia dato il sistema lineare (4.1). Per ogni $T \geq 0$ e qualunque sia U (non vuoto) l'insieme $\mathbf{R}(T, 0, U)$ è convesso.*

■

La dimostrazione è banale se U è convesso; richiede invece risultati avanzati di Teoria della misura in generale¹.

Teorema 4.5 *Supponiamo che il sistema (4.1) sia completamente controllabile (in assenza di vincoli). Supponiamo inoltre che $0 \in \overset{\circ}{U}$. Allora, $0 \in \overset{\circ}{R}(T, 0, U)$.*

Dimostrazione Sia S una sfera di centro l'origine e raggio r contenuta nell'interno di U . Poiché il sistema è completamente controllabile, per ogni vettore \mathbf{e}_i appartenente alla base canonica di \mathbf{R}^n esiste un controllo $u_i(t) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ che permette di raggiungere \mathbf{e}_i dall'origine in tempo T . I controlli $u_i(t)$ non rispettano necessariamente i vincoli però, essendo funzioni continue a tratti su $[0, T]$, esiste $M > 0$ tale che

$$|u_i(t)| < M \quad \forall t \in [0, T], \forall i = 1, \dots, n.$$

Poiché il sistema è lineare, i controlli $\tilde{u}_i(t) = \frac{r}{M} u_i(t)$ permettono di raggiungere dall'origine in tempo T n vettori $\tilde{\mathbf{e}}_i$ che costituiscono comunque una base di \mathbf{R}^n . Questi nuovi controlli $\tilde{u}_i(t)$ rispettano i vincoli.

Sempre in virtù della linearità, usando i controlli $-\tilde{u}_i(t)$ si raggiungono i punti $-\tilde{\mathbf{e}}_i$. L'asserto è provato, in quanto $\overset{\circ}{R}(T, 0, U)$ è convesso.

■

Corollario 4.4 *Nelle ipotesi del Teorema 4.5, il sistema ha la proprietà di controllabilità locale lungo la soluzione libera.*

Corollario 4.5 *Supponiamo che il sistema (4.1) sia completamente controllabile (in assenza di vincoli). Supponiamo inoltre che $\overset{\circ}{U} \neq \emptyset$. Allora, il sistema ha la proprietà di accessibilità dall'origine qualunque sia $T > 0$.*

Dimostrazione Per ipotesi, esiste una sfera di centro $u_0 \in U$ e raggio r contenuta in U . Sostituendo U con il suo traslato

$$U - \{u_0\} = \{v : v = u - u_0 \text{ con } u \in U\}$$

si ottiene un sistema che soddisfa le ipotesi del Teorema 4.5. Basta infine osservare che

$$\overset{\circ}{R}(T, 0, U) = \overset{\circ}{R}(T, 0, U) - \{u_0\} + \int_0^T e^{(T-s)A} B u_0 ds.$$

■

Osservazione 4.2 *L'ipotesi $0 \in \overset{\circ}{U}$ è un rafforzamento della condizione $0 \in U$. Quest'ultima esprime il fatto che esiste un controllo ammissibile ($u \equiv 0$) per cui il sistema ammette una posizione di equilibrio.*

¹si veda R. Conti, Processi di controllo lineari in \mathbf{R}^n , Pitagora Editrice Bologna 1985 (quaderni UMI 30)

4.5 Osservabilità

Lo studio delle proprietà di osservabilità interessa i sistemi dinamici, nella cui modellizzazione si vuole distinguere tra variabili di stato e variabili di uscita. Il ruolo della funzione di osservazione diventa cruciale, e si pongono nuovi problemi.

Definizione 4.4 Due punti $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ si dicono indistinguibili al tempo T se per ogni ingresso ammissibile $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ si ha

$$y(t, x_1, u(\cdot)) = y(t, x_2, u(\cdot)) \quad \forall t \in [0, T] .$$

La precedente definizione si interpreta nel modo seguente: che lo stato iniziale sia x_1 o x_2 , la risposta del sistema è sempre la stessa, qualunque sia la sollecitazione $u(\cdot)$ applicata in ingresso. In altre parole, non è possibile ricostruire lo stato iniziale sulla base di esperimenti che si limitino a registrare l'uscita in corrispondenza di un ingresso arbitrario.

Esempio 4.2 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases}$$

con $y = x_1 - x_2$. In corrispondenza di una condizione iniziale del tipo (a, a) si ha

$$x_1 = e^t \left(a + \int_0^t e^{-s} u(s) ds \right), \quad x_2 = ae^t .$$

Dunque $y(t) = e^t \int_0^t e^{-s} u(s) ds$ è indipendente da a . Ne segue che la retta $x_1 = x_2$ è tutta fatta di punti indistinguibili.

■

4.5.1 Lo spazio di non osservabilità

Ci interessano in maniera particolare i processi lineari che sono privi di stati indistinguibili. Osserviamo prima di tutto che nella Definizione 4.4 la funzione di ingresso gioca un ruolo del tutto marginale.

Proposizione 4.4 Due punti x_1 e x_2 sono indistinguibili per il sistema (4.1) se e solo se sono indistinguibili per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.26)$$

Dimostrazione Se x_1 e x_2 sono indistinguibili al tempo T per il sistema (4.1), allora, per ogni $u(\cdot) \in \tilde{C}(0, T, \mathbf{R}^m)$ e ogni $t \in [0, T]$ si ha

$$y(t, x_1, u(\cdot)) = y(t, x_2, u(\cdot))$$

cioè

$$C \left[e^{tA} \left(x_1 + \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau \right) \right] = C \left[e^{tA} \left(x_2 + \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau \right) \right] .$$

Semplificando, rimane l'identità

$$Ce^{tA}x_1 = Ce^{tA}x_2$$

per ogni $t \in [0, T]$. Ciò significa appunto che x_1 e x_2 sono indistinguibili rispetto al sistema (4.26).

Il viceversa si prova eseguendo i passaggi al contrario. ■

Inoltre, per caratterizzare gli stati indistinguibili da un generico $x \in \mathbf{R}^n$, è sufficiente caratterizzare gli stati indistinguibili dall'origine.

Proposizione 4.5 *Se x_1, x_2 sono indistinguibili al tempo $T > 0$, allora $\xi = x_1 - x_2$ è indistinguibile dall'origine. Viceversa, se ξ è indistinguibile dall'origine al tempo T e se x è un generico vettore di \mathbf{R}^n , allora x e $x + \xi$ sono tra loro indistinguibili.*

Dimostrazione Grazie alla Proposizione 4.4, possiamo riferire la definizione di indistinguibilità al sistema (4.26). Dire che x_1 e x_2 sono indistinguibili al tempo T , significa allora che

$$Ce^{tA}x_1 = Ce^{tA}x_2$$

per ogni $t \in [0, T]$. Quest'ultima si può riscrivere come

$$Ce^{tA}(x_2 - x_1) = 0 = Ce^{tA}0$$

per ogni $t \in [0, T]$. L'asserto segue ponendo $\xi = x_1 - x_2$.

Viceversa, se ξ è indistinguibile dall'origine (e quindi $Ce^{tA}\xi = 0$ per ogni $t \in [0, T]$), qualunque sia $x \in \mathbf{R}^n$ possiamo scrivere

$$Ce^{tA}(\xi + x) = Ce^{tA}\xi + Ce^{tA}x = Ce^{tA}x$$

per ogni $t \in [0, T]$. Ciò significa che $\xi + x$ e x sono indistinguibili al tempo T per il sistema (4.26), e quindi anche per il sistema (4.1). ■

Un primo passo verso la caratterizzazione degli stati indistinguibili dall'origine è costituito dal seguente teorema.

Teorema 4.6 *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) ξ è indistinguibile dall'origine al tempo T per il sistema (4.1);
- (ii) $\xi \in \ker Ce^{tA}, \forall t \in [0, T]$;
- (iii) l'uscita del sistema (4.1) relativa all'ingresso nullo $u(t) \equiv 0$ e allo stato iniziale ξ è nulla su $[0, T]$.

Dimostrazione L'equivalenza tra (i) e (ii) segue subito dalla Proposizione 4.4. L'equivalenza tra (ii) e (iii) è immediata. ■

4.5.2 Matrice di osservabilità

Dal Teorema 4.6(ii) si deduce che l'insieme $N(T, 0)$ degli stati indistinguibili dall'origine al tempo T coincide con l'intersezione

$$\bigcap_{t \in [0, T]} \ker C e^{tA} .$$

Ma $\bigcap_{t \in [0, T]} \ker C e^{tA}$ è un sottospazio di \mathbf{R}^n . Dunque $N(T, 0)$ è un sottospazio di \mathbf{R}^n , al quale si dà anche il nome di spazio di *non-osservabilità*. Consideriamo ora le matrici

$$C^t, A^t C^t, \dots, (A^t)^{n-1} C^t$$

e interpretiamo le loro colonne come vettori di \mathbf{R}^n . Sia $V \subset \mathbf{R}^n$ lo spazio generato da tali vettori.

Teorema 4.7 *Per il sistema (4.1), lo spazio di non-osservabilità $N(T, 0)$ è indipendente da T . Si ha infatti, per ogni $T > 0$, $N(T, 0) = V^\perp$.*

Dimostrazione È simile a quella del Teorema 4.3. Sia $v \in N(T, 0)$. Allora, $\forall \theta \in [0, T]$ e $\forall \mu \in \mathbf{R}^p$

$$\langle C e^{\theta A} v, \mu \rangle = 0$$

ovvero

$$\langle v, e^{\theta A^t} C^t \mu \rangle = 0 .$$

Per $\theta = 0$, segue $\langle v, C^t \mu \rangle = 0$ e, per l'arbitrarietà di μ , v è ortogonale a tutte le colonne di C^t . Si prosegue derivando rispetto a θ e calcolando le successive derivate sempre per $\theta = 0$.

Viceversa, se $v \in V^\perp$, allora per ogni $\mu \in \mathbf{R}^p$

$$\langle v, C^t \mu \rangle = \dots = \langle v, (A^t)^{n-1} C^t \mu \rangle = 0$$

e da queste segue $\langle v, e^{\theta A^t} C^t \mu \rangle = 0$ per ogni θ usando, come nel Teorema 4.3, lo sviluppo in serie dell'esponenziale e il Teorema di Cayley-Hamilton. Infine,

$$\langle C e^{\theta A} v, \mu \rangle = 0 \quad \forall \theta$$

il che implica necessariamente $C e^{\theta A} v = 0, \forall \theta$.

■

La matrice $[C^t | A^t C^t | \dots | (A^t)^{n-1} C^t]$ si dice la *matrice di osservabilità* del sistema (4.1). Da questo momento in poi, visto che $N(T, 0)$ non dipende da T , scriveremo semplicemente N .

Definizione 4.5 *Un sistema si dice completamente osservabile se per ogni coppia di stati indistinguibili x_1, x_2 si ha $x_1 = x_2$, ovvero se $N = \{0\}$.*

Corollario 4.6 *Il sistema (4.1) è completamente osservabile se e solo se*

$$\text{rank} [C^t | A^t C^t | \dots | (A^t)^{n-1} C^t] = n . \quad (4.27)$$

Osservazione 4.3 *Né l'affermazione (ii) del Teorema 4.6 né la condizione (4.27) dipendono dalla matrice B . Ciò non è sorprendente, se si tiene conto della Proposizione 4.4.*

4.5.3 Ricostruzione dello stato iniziale

Dire che il sistema (4.1) è completamente osservabile equivale a dire che per ogni data funzione di ingresso $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^m$, l'applicazione che associa un segnale di uscita $y(t)$ ad uno stato iniziale $x(0) = x_0$ è iniettiva, e quindi la conoscenza di $y(t)$ su un intervallo $[0, T]$ (per qualche $T > 0$) deve essere sufficiente per risalire a x_0 . A tale scopo, si può procedere nel modo seguente.

Supponiamo noti A, B, C , e $y(t)$ per $t \in [0, T]$. Ricordiamo che per ogni ingresso ammissibile $u(t)$

$$y(t) = C \left[e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds \right] .$$

Moltiplicando ambo i membri per $e^{tA^t} C^t$ si ha

$$e^{tA^t} C^t y(t) = e^{tA^t} C^t C e^{tA} x_0 + e^{tA^t} C^t C \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds$$

e integrando tra 0 e T :

$$E(T)x_0 = \int_0^T e^{tA^t} C^t y(t) dt - \int_0^T e^{tA^t} C^t C \left(\int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) ds \right) dt , \quad (4.28)$$

avendo posto $E(T) = \int_0^T e^{tA^t} C^t C e^{tA} dt$.

Teorema 4.8 *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) *il sistema (4.1) è completamente osservabile;*
- (ii) *la matrice $E(T)$ è definita positiva per ogni $T > 0$, quindi invertibile.*

Dimostrazione Un semplice calcolo mostra che

$$\xi^t E(T) \xi = \int_0^T \|C e^{tA} \xi\|^2 dt \geq 0 .$$

L'integrale a secondo membro è zero se e solo se l'integrando è identicamente nullo, cioè se e solo se $\xi \in \ker C e^{tA}$ per ogni $t \in [0, T]$. Se il sistema è completamente osservabile, l'unica possibilità è $\xi = 0$. Il viceversa si prova facilmente per assurdo.

■

Dunque, se (4.1) è completamente osservabile, dalla (4.28) si può ricavare x_0 invertendo la matrice $E(T)$.

Sottolineiamo ancora che in questo procedimento la scelta dell'ingresso è del tutto arbitraria: se non ci sono ragioni per fare diversamente, si può prendere $u(t) \equiv 0$.

Questo approccio fornisce esattamente x_0 ; tuttavia, la necessità di calcolare una matrice esponenziale e alcuni integrali può rendere la procedura difficilmente applicabile.

4.5.4 Dualità

Tra la teoria della controllabilità e la teoria dell'osservabilità vi sono evidenti analogie. Si noti che la matrice di osservabilità del sistema (4.1) coincide con la matrice di controllabilità del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = A^t x + C^t u \\ y = B^t x \end{cases} \quad (4.29)$$

con $u \in \mathbf{R}^p$ e $y \in \mathbf{R}^m$, in cui le matrici B e C hanno, per così dire, scambiato i loro ruoli. Così (4.1) è completamente controllabile se e solo se (4.29) è completamente osservabile e viceversa. Il sistema (4.29) si dice anche il *duale* del sistema (4.1). Le proprietà di completa controllabilità e di completa osservabilità si dicono anche proprietà duali.

Si noti anche l'analogia tra il Teorema 4.2 e il Teorema 4.8.

4.6 Scomposizioni canoniche

Nello studio dei sistemi, gioca un ruolo importante la ricerca di forme canoniche, cioè di rappresentazioni che consentono una visualizzazione immediata delle principali proprietà strutturali. Ciò implica la ricerca di opportuni sistemi di coordinate per il sistema (4.1).

4.6.1 Equivalenza lineare

I sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u \\ y = C_1 x_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u \\ y = C_2 x_2 \end{cases}$$

si dicono *linearmente equivalenti* se esiste un cambiamento di coordinate $x_2 = P x_1$ ($\det P \neq 0$) tale che $A_1 = P^{-1} A_2 P$, $B_1 = P^{-1} B_2$, e $C_1 = C_2 P$.

Si generalizza così una nozione già introdotta per i sistemi dinamici senza ingressi, e che ci sarà di aiuto negli sviluppi successivi.

Osserviamo prima di tutto che una trasformazione del tipo indicato non altera le proprietà di controllabilità del sistema. Infatti, con le notazioni del Paragrafo 4.6.1, si ha

$$[B_1 | A_1 B_1 | \dots | A_1^{n-1} B_1] = [P^{-1} B_2 | P^{-1} A_2 B_2 | \dots | P^{-1} A_2^{n-1} B_2] = P^{-1} [B_2 | A_2 B_2 | \dots | A_2^{n-1} B_2].$$

Cosicché la matrice di controllabilità del sistema dato e quella di un qualunque altro sistema linearmente equivalente hanno lo stesso rango. Inoltre gli spazi generati dalle colonne di tali matrici (cioè gli spazi raggiungibili dei due sistemi) si trasformano coerentemente col cambiamento di coordinate.

4.6.2 Invarianza controllata

Prima di procedere alla determinazione della prima importante forma canonica, ci serve ancora una definizione. Un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^n$ si dice un *invariante controllato* per il sistema (4.1) se $\forall x_0 \in W$ e per ogni ingresso ammissibile si ha:

$$x(t, x_0, u(\cdot)) \in W \quad \forall t > 0.$$

Lo spazio $\mathbf{R}(T, 0, \mathbf{R}^m)$ (che da questo momento in poi indicheremo semplicemente con \mathbf{R}) è un esempio di spazio invariante controllato. Infatti, supponiamo che esista, per assurdo, un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ e un ingresso $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^m$ tale che $x(T, x_0, u(\cdot)) = x_1 \notin \mathbf{R}$. Se $u_0(\cdot) : [0, t_0] \rightarrow \mathbf{R}^m$ è un ingresso per cui $x(t_0, 0, u_0(\cdot)) = x_0$ (ed almeno uno di tali ingressi esiste per ipotesi) si potrebbe allora porre

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} u_0(\tau) & \text{per } 0 \leq \tau < t_0 \\ u(\tau - t_0) & \text{per } t_0 \leq \tau \leq t_0 + T. \end{cases}$$

È chiaro che $\phi(t_0 + T, 0, \tilde{u}(\cdot)) = x_1$ e ciò è assurdo.

Lemma 4.2 *Sia $W \subset \mathbf{R}^n$ un sottospazio invariante controllato per il sistema (4.1) e sia*

$$x(t, x_0, u(\cdot))$$

una generica traiettoria con $x_0 \in W$. Allora il vettore tangente alla curva $t \mapsto x(t, x_0, u(\cdot))$ per $t = 0$ deve appartenere anch'esso a W .

Dimostrazione Il vettore tangente si calcola come

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t, x_0, u(\cdot)) - x_0}{t}.$$

Essendo W un sottospazio, l'espressione di cui si deve calcolare il limite sta in W per ogni t . Dunque anche il limite deve stare in W , poiché i sottospazi di W sono particolari insiemi chiusi. ■

4.6.3 Parte controllabile

Teorema 4.9 *Esiste un cambiamento di coordinate $x = Pz$ ed un intero q ($0 \leq q \leq n$) tale che nelle nuove coordinate z il sistema (4.1) prende la forma*

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 \end{cases} \quad (4.30)$$

dove $z = (z_1, z_2)$ con $z_1 \in \mathbf{R}^q$, $z_2 \in \mathbf{R}^{n-q}$, e dove A_{11}, A_{12}, A_{22} , e B_1 sono matrici delle dimensioni opportune. Inoltre, il sistema

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + B_1u \quad (4.31)$$

con variabile di stato $z_1 \in \mathbf{R}^q$, risulta completamente controllabile.

Dimostrazione Sia $q = \dim \mathbf{R}$. I casi estremi $q = 0$ e $q = n$ corrispondono rispettivamente ai casi in cui (4.1) è completamente incontrollabile ($B = 0$) e in cui (4.1) è completamente controllabile.

Consideriamo in generale una base dello spazio degli stati tale che i primi q vettori siano anche una base di \mathbf{R} . Siano z le nuove coordinate, partizionate come indicato nell'enunciato, in modo che $\mathbf{R} = \{z : z_2 = 0\}$. Nelle nuove coordinate possiamo rappresentare il sistema come

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{21}z_1 + A_{22}z_2 + B_2u. \end{cases}$$

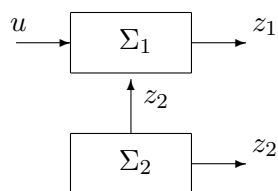
A questo punto ricordiamo che \mathbf{R} è fortemente invariante e che tale proprietà è ovviamente intrinseca.

Se fosse allora $A_{21} \neq 0$ la traiettoria uscente da uno stato $(z_1, 0) \in \mathbf{R}$ con $z_1 \neq 0, A_{21}z_1 \neq 0$ e corrispondente all'ingresso $u(\cdot) = 0$ avrebbe per $t = 0$ vettore tangente

$$\begin{pmatrix} A_{11}z_1 \\ A_{21}z_1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{R}$$

e ciò è assurdo per il Lemma 4.2. Dunque $A_{21} = 0$. In maniera del tutto analoga si mostra poi che $B_2 = 0$.

Dato infine un qualunque $z_1 \in \mathbf{R}^q$, per costruzione deve esistere un ingresso $u(t)$ in corrispondenza del quale la soluzione del sistema (4.30) trasferisce l'origine di \mathbf{R}^n nello stato $(z_1, 0) \in \mathbf{R}$. Ovviamente, lo stesso ingresso applicato al sistema (4.31) trasferisce l'origine di \mathbf{R}^q in z_1 . Dunque (4.31) è completamente controllabile. ■



La (4.31) si ottiene dalla (4.30) ponendo $z_2 = 0$. Essa si configura dunque come un sottosistema, cui si dà talvolta il nome di *parte controllabile* del sistema (indicata nella figura con Σ_1).

Si noti che l'evoluzione della componente z_2 dello stato, in (4.30), è del tutto indipendente dall'azione dell'ingresso. Si dice anche che essa rappresenta la *parte incontrollabile* del sistema (indicata nella figura con Σ_2).

La forma (4.30) ha dunque il vantaggio di evidenziare la parte controllabile del sistema, separandola da quella incontrollabile.

4.6.4 Parte osservabile

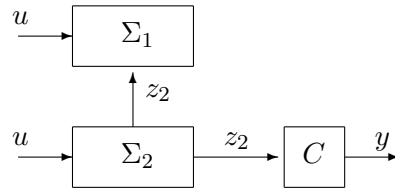
Analogamente a quanto abbiamo fatto in precedenza con riferimento alla controllabilità, tra tutti i sistemi linearmente equivalenti a (4.1) possiamo identificarne alcuni, la cui forma permette di visualizzare in maniera semplice le proprietà di osservabilità. Più precisamente, si può provare che esiste un intero r ($0 \leq r \leq n$) e una matrice non singolare P tali che il cambiamento di coordinate $z = Px$ dà luogo alla forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + B_2u \\ y = C_2z_2 \end{cases}$$

dove $z = (z_1, z_2)$, $z_1 \in \mathbf{R}^r$, $z_2 \in \mathbf{R}^{n-r}$, e il sottosistema

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + B_2u \\ y = C_2z_2 \end{cases}$$

è completamente osservabile. Il numero r coincide con la dimensione di N . I due sottosistemi che si ottengono ponendo rispettivamente $z_2 = 0$ e $z_1 = 0$, si dicono *parte inosservabile* (indicata in figura con Σ_1) e *parte osservabile* (indicata in figura con Σ_2) del sistema.



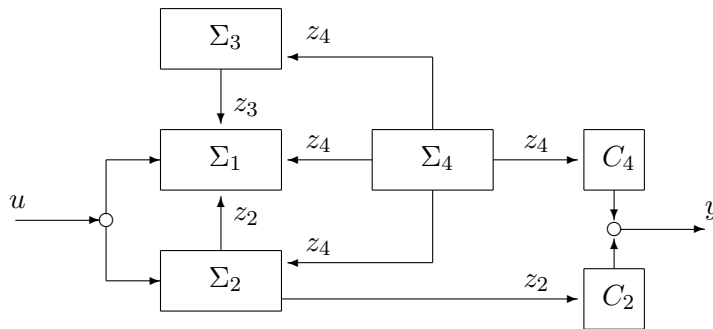
4.6.5 Scomposizione di Kalman

Le scomposizioni ottenute nelle sezioni precedenti, quella per la controllabilità e quella per l'osservabilità, si possono combinare. Si ottiene la forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u \\ \dot{z}_3 = A_{33}z_3 + A_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 = A_{44}z_4 \\ y = C_2z_2 + C_4z_4 . \end{cases}$$

Si osserva:

- il blocco delle coordinate (z_1, z_2) identifica la parte completamente controllabile;
- il blocco delle coordinate (z_2, z_4) identifica la parte completamente osservabile;
- il blocco delle coordinate z_2 identifica la parte completamente controllabile e completamente osservabile;
- il blocco delle coordinate z_3 identifica la parte non controllabile e non osservabile;



Capitolo 5

Stabilità interna e stabilità esterna dei sistemi lineari

Le nozioni classiche di stabilità e stabilità asintotica non sono sufficienti a descrivere il comportamento di un sistema con ingressi. Si consideri per esempio un sistema che, in assenza di sollecitazioni, presenta una posizione d'equilibrio stabile. Tale posizione non sarà certamente mantenuta quando si applicano delle forze esterne. Tuttavia, è ragionevole aspettarsi che lo scarto della funzione d'uscita rispetto alla posizione d'equilibrio sia in qualche modo legato all'ampiezza del segnale in ingresso, e che si mantenga “piccolo” se l'ampiezza del segnale in ingresso è “piccola”. Intuitivamente, un sistema si dice esternamente stabile quando ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata. Di fatto, la stabilità esterna viene spesso identificata con la così detta proprietà di stabilità BIBO (dall'inglese *Bounded-Input Bounded-Output*).

Esempio 5.1 Molti sistemi possono essere rappresentati mediante un'equazione

$$x'' + ax' + bx = u(t)$$

dove x viene riguardata come funzione di uscita. Supponiamo che le radici caratteristiche dell'equazione omogenea associata abbiano parte reale strettamente negativa, e supponiamo di inviare al sistema un segnale del tipo

$$u(t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t .$$

Abbiamo già studiato il comportamento delle soluzioni nell'ultimo paragrafo dell'Appendice B. È chiaro che in queste condizioni non può esserci risonanza, e sappiamo che qualunque siano le condizioni iniziali, a regime la soluzione ha la forma di una combinazione lineare $c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$. A fronte di un ingresso limitato, il sistema fornisce dunque un'uscita limitata. ■

Oggetto delle nostre attenzioni sarà anche in questo capitolo un sistema dinamico lineare invariante nel tempo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.1)$$

dove, con le solite notazioni, $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$. Per quanto il segnale in ingresso sia stato preso di una forma molto speciale, l'Esempio 5.1 illustra e motiva gran parte dei contenuti che

saranno sviluppati successivamente. Esso infatti suggerisce che la stabilità BIBO di un sistema del tipo (5.1) sia in qualche modo legata alla stabilità nel senso di Liapunov del sistema non forzato

$$\dot{x} = Ax . \quad (5.2)$$

Sistemi del tipo (5.1) per cui il sistema non forzato (5.2) abbia nell'origine una posizione d'equilibrio asintoticamente stabile verranno qui chiamati *internamente stabili*. Possiamo così sintetizzare il contenuto di questo capitolo come lo studio delle relazioni che intercorrono tra la stabilità interna e la stabilità esterna di un sistema lineare.

Nel seguito, lo spazio degli ingressi ammissibili $\tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, \mathbf{R}^m)$, così come lo spazio delle uscite $\mathcal{C}(0, +\infty, \mathbf{R}^p)$ si intendono dotati della norma della convergenza uniforme. Useremo la notazione $\|u(\cdot)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|$. Inoltre, come in precedenza, indicheremo con $x(t, x_0, u(\cdot))$ e con $y(t, x_0, u(\cdot))$ rispettivamente la soluzione della parte differenziale e l'uscita del sistema (5.1), corrispondenti allo stato iniziale x_0 (al tempo $t_0 = 0$) e all'ingresso $u(\cdot)$, valutate al tempo t .

5.1 Stabilità esterna

Prima di tutto, dobbiamo cercare di definire la stabilità esterna in maniera più precisa. Da un punto di vista operativo, è infatti utile poter disporre di una certa uniformità nella dipendenza della costante che limita le soluzioni da quella che limita gli ingressi. Prenderemo in considerazione due possibili definizioni. La prima è formulata in modo da suggerire il contenuto qualitativo della nozione, mentre la seconda si ricollega più strettamente alla natura lineare del sistema (5.1).

Definizione 5.1 Diremo che il sistema (5.1) è uniformemente BIBO-stabile se per ogni $R > 0$ esiste un $S > 0$ tale che

$$\|x_0\| \leq R , \quad \|u(\cdot)\|_\infty \leq R \implies \|y(t, x_0, u(\cdot))\| \leq S \quad (5.3)$$

per ogni $t \geq 0$, ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e ogni ingresso $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, \mathbf{R}^m)$ e limitato.

Se $C = I$ (matrice identica) la (5.3) vale con $x(t, x_0, u(\cdot))$ al posto di $y(t, x_0, u(\cdot))$; in tal caso si dice, più propriamente, che il sistema è *uniformemente BIBS-stabile* (dall'inglese *Bounded-Input Bounded-State*).

Definizione 5.2 Si dice che il sistema (5.1) ha la proprietà di stabilità con guadagno finito se esistono due costanti positive γ_1 e γ_2 tali che

$$\|y(t, x_0, u(\cdot))\| \leq \gamma_1 \|x_0\| + \gamma_2 \|u(\cdot)\|_\infty \quad (5.4)$$

per ogni $t \geq 0$, ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e ogni ingresso $u(\cdot) \in \tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, \mathbf{R}^m)$ e limitato (senza perdita di generalità, si può supporre $\gamma_1 = \gamma_2$).

In generale, la (5.4) appare più restrittiva della (5.3): in essa si richiede infatti che la norma dell'uscita possa essere stimata secondo una regola di proporzionalità rispetto alla norma dell'ingresso e alla norma dello stato iniziale. Lo studio formale delle relazioni che intercorrono tra le nozioni introdotte nelle Definizioni 5.1 e 5.2 è uno degli scopi del presente Capitolo.

Proposizione 5.1 Se il sistema (5.1) è stabile con guadagno finito, allora è anche uniformemente BIBO-stabile.

Dimostrazione Assumendo la (5.4), e assegnato $R > 0$, si scelga $S = R(\gamma_1 + \gamma_2)$. ■

Nel caso dei sistemi lineari, anche l'inverso della Proposizione 5.1 è vero: per dimostrarlo, abbiamo però bisogno di premettere alcuni lemmi.

Lemma 5.1 *Se il sistema (5.1) è uniformemente BIBO-stabile, allora esiste un $L > 0$ tale che*

$$\int_0^t \|W(s)\| ds < L \quad (5.5)$$

per ogni $t \geq 0$, dove $W(s) = Ce^{sA}B$.

Dimostrazione Posto $R = 1$, applichiamo l'ipotesi di stabilità BIBO con $x_0 = 0$: esiste un S_1 tale che

$$\|u(\cdot)\|_\infty \leq 1 \implies \|y(t, 0, u(\cdot))\| \leq S_1$$

per ogni $t \geq 0$. Indichiamo con $w_{ij}(t)$ ($i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$) gli elementi della matrice $W(t)$. Fissato $T > 0$ e fissata una coppia di indici i, j definiamo un ingresso $\tilde{u}(t) = (\tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_m(t))$ ponendo $\tilde{u}_l(t) \equiv 0$ se $l \neq j$ e

$$\tilde{u}_j(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} w_{ij}(T-t) & \text{se } t \in [0, T] \\ 0 & \text{se } t > T \end{cases} .$$

Sia infine $\tilde{\psi}(t) = (\tilde{\psi}_1(t), \dots, \tilde{\psi}_n(t)) = y(t, 0, \tilde{u}(\cdot))$ l'uscita corrispondente. Si ha:

$$\tilde{\psi}_i(T) = \int_0^T w_{ij}(T-t)\tilde{u}_j(t) dt = \int_0^T |w_{ij}(s)| ds .$$

Poiché $\|\tilde{u}(\cdot)\|_\infty < 1$, si avrà $|\tilde{\psi}_i(T)| \leq \|\tilde{\psi}(T)\| \leq S_1$, e ciò comunque sia stato fissato $T > 0$. Dunque tutti gli elementi della matrice $\int_0^T \|W(s)\| ds$ sono limitati in $[0, +\infty)$ e da qui segue facilmente la (5.5). ■

Osservazione 5.1 È chiaro che (5.5) vale se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \|W(s)\| ds$$

converge. Per un sistema del tipo (5.1), la matrice $W(t) = Ce^{tA}B$ si chiama *matrice della risposta impulsiva* (la ragione di questo nome sarà spiegata in seguito). Il Lemma 5.1 si può allora enunciare dicendo che nel caso dei sistemi lineari, la stabilità BIBO uniforme implica la limitatezza della risposta impulsiva. ■

Osservazione 5.2 La proprietà di risposta impulsiva limitata è un passaggio inevitabile nella dimostrazione della successiva Proposizione 5.2. Tuttavia in generale, limitatezza della risposta impulsiva e stabilità BIBO non sono equivalenti. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

con $C = I$ ha risposta impulsiva limitata, ma non è BIBO stabile. ■

Lemma 5.2 Dato il sistema (5.1), supponiamo che la funzione $\psi(t) = Ce^{tA}x_0$ sia limitata per $t \geq 0$ qualunque sia $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Allora esiste $M > 0$ tale che $\|Ce^{tA}\| < M$ per $t \geq 0$.

Dimostrazione Indichiamo con $\zeta_{ij}(t)$ l'elemento generico della matrice Ce^{tA} e supponiamo che esista una coppia di indici i, j tali che $\zeta_{ij}(t)$ non è limitata per $t \geq 0$. Consideriamo il vettore j -esimo della base canonica, cioè il vettore e_j le cui componenti sono tutte nulle, tranne la j -esima che è uguale a 1. La i -esima componente della funzione $\psi(t) = Ce^{tA}e_j$ è uguale a $\zeta_{ij}(t)$ e si ha

$$|\zeta_{ij}(t)| \leq \|\psi(t)\|.$$

La funzione $\psi(t)$ sarebbe quindi non limitata per $t \geq 0$, contrariamente a quanto supposto. Dunque gli elementi della matrice Ce^{tA} sono tutti limitati, e da qui segue subito la tesi. ■

Proposizione 5.2 Se il sistema (5.1) è uniformemente BIBO-stabile allora è anche stabile con guadagno finito.

Dimostrazione Consideriamo prima l'uscita del sistema (5.1) corrispondente allo stato iniziale $x_0 = 0$ e a un ingresso ammissibile $u(\cdot)$ limitato. Per il Lemma 5.1, posto $L = \gamma_2$, si ha

$$\begin{aligned} \|y(t, 0, u(\cdot))\| &\leq \int_0^t \|W(t-s)u(s)\| ds \leq \int_0^t \|W(t-s)\| \|u(\cdot)\|_\infty ds \leq \\ &\leq \|u(\cdot)\|_\infty \int_0^t \|W(\sigma)\| d\sigma \leq \gamma_2 \|u(\cdot)\|_\infty \end{aligned}$$

per ogni $t \geq 0$. Consideriamo poi l'uscita del sistema (5.1) corrispondente a un qualunque stato iniziale x_0 e all'ingresso $u \equiv 0$. Per ipotesi, tale uscita risulta limitata e quindi, per il Lemma 5.2 posto $M = \gamma_1$ si ha

$$\|Ce^{tA}\| \leq \gamma_1$$

per ogni $t \geq 0$. Di qui segue

$$\|y(t, x_0, 0)\| \leq \gamma_1 \|x_0\|$$

per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$ e per ogni $t \geq 0$. Ricordando che per un sistema lineare

$$y(t, x_0, u(\cdot)) = y(t, x_0, 0) + y(t, 0, u(\cdot))$$

si perviene facilmente alla conclusione. ■

Osservazione 5.3 In base alle Proposizioni 5.1 e 5.2, per un sistema del tipo (5.1) la stabilità BIBO uniforme e la stabilità con guadagno finito sono proprietà equivalenti. Pertanto, da questo momento in poi, dicendo che un sistema lineare è *esternamente stabile* intenderemo che vale una (e quindi anche l'altra) delle proprietà espresse dalle Definizioni 5.1 e 5.2. ■

Infine, facciamo vedere che la stabilità esterna è invariante per cambiamenti di coordinate lineari in \mathbf{R}^n .

Proposizione 5.3 *Sia*

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}z \end{cases} \quad (5.6)$$

un sistema linearmente equivalente a (5.1). Il sistema (5.6) è esternamente stabile se e solo se il sistema (5.1) è esternamente stabile.

Dimostrazione Se i sistemi sono linearmente equivalenti, esiste una matrice P non singolare tale che $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}B$, $\tilde{C} = CP$. Supponiamo che (5.1) possieda la proprietà di stabilità con guadagno finito. Per la formula della variazione delle costanti, l'uscita del sistema (5.6) si scrive

$$y(t) = \tilde{C}e^{t\tilde{A}}z_0 + \int_0^t \tilde{C}e^{(t-\tau)\tilde{A}}\tilde{B}u(\tau) d\tau = Ce^{tA}Pz_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A}Bu(\tau) d\tau .$$

Essa coincide quindi con la risposta del sistema (5.1) relativa allo stato iniziale Pz_0 e allo stesso ingresso. Si ha

$$\|y(t)\| \leq \gamma_1\|Pz_0\| + \gamma_2\|u(\cdot)\|_\infty \leq \tilde{\gamma}_1\|z_0\| + \gamma_2\|u(\cdot)\|_\infty$$

dove $\tilde{\gamma}_1 = \|P\|\gamma_1$. Per dimostrare l'implicazione inversa, è sufficiente scambiare i ruoli dei sistemi. ■

5.2 Stabilità I/O

È naturale chiedersi se vi sia una relazione tra la stabilità esterna e la stabilità I/O dell'operatore \mathcal{R} associato al sistema (5.1) e di cui abbiamo parlato nel Capitolo 1.

Proposizione 5.4 *Se il sistema (5.1) è uniformemente BIBO-stabile, allora l'operatore ingresso-uscita \mathcal{R} associato è I/O stabile (rispetto agli spazi $\tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, \mathbf{R}^m)$ e $\mathcal{C}(0, +\infty, \mathbf{R}^p)$ dotati delle norme della convergenza uniforme).*

Dimostrazione Definiamo

$$\sigma_0(R) = \begin{cases} 0 & \text{se } R = 0 \\ \inf\{S : (5.3) \text{ vale}\} & \text{se } R > 0 . \end{cases}$$

È chiaro che $\sigma_0(R) \geq 0$ per ogni $R \geq 0$. Inoltre, se $R_1 < R_2$ si ha $\sigma_0(R_1) \leq \sigma_0(R_2)$. Infatti, in caso contrario, dovrebbero esistere x_0 e $u(\cdot)$ per cui

$$\|x_0\| < R_1, \|u(\cdot)\|_\infty < R_1 \text{ e } \sigma_0(R_2) < \|y(\cdot)\|_\infty \leq \sigma_0(R_1) .$$

Ma questo è impossibile perché

$$\|x_0\| < R_1, \|u(\cdot)\|_\infty < R_1 \implies \|x_0\| < R_2, \|u(\cdot)\|_\infty < R_2$$

da cui necessariamente segue $\|y(\cdot)\|_\infty \leq \sigma_0(R_2)$.

In generale, $\sigma_0(R)$ non sarà continua, ma è possibile sostituirla con una funzione $\sigma_1(R)$ continua e strettamente crescente, tale che $\sigma_0(R) \leq \sigma_1(R)$ per ogni $R \geq 0$. Ancorché intuitiva, questa è la parte più tecnica della dimostrazione: il lettore sarà certamente in grado di svolgerla per proprio conto.

Fissiamo ora x_0 una volta per tutte. Per ogni ingresso $u(\cdot)$, sia q il più grande intero non-negativo per cui $q \leq \|u(\cdot)\|_\infty$. Posto $R = q + 1 + \|x_0\|$ si ha

$$\|x_0\| < R, \|u(\cdot)\|_\infty < R \text{ e quindi } \|y(\cdot)\|_\infty < \sigma_1(R) \leq \sigma_1(\|u(\cdot)\|_\infty + 1 + \|x_0\|)$$

in quanto σ_1 è crescente e $q \leq \|u(\cdot)\|_\infty$.

Alla conclusione si arriva definendo $\alpha(r) = \sigma_1(r + 1 + \|x_0\|)$.

■

5.3 Stabilità interna

Cominciamo col ricordare che l'origine è asintoticamente stabile per il sistema non forzato (5.2) se e solo se gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa. In tal caso, si usa anche dire che A ha la *proprietà di Hurwitz*, o, più brevemente, che è *Hurwitz*. Mostriamo che, in generale, la stabilità interna implica quella esterna.

Teorema 5.1 *Supponiamo che la matrice A sia Hurwitz. Allora, il sistema (5.1) è esternamente stabile.*

Dimostrazione La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione B.5. Per certe costanti k_0, α, \bar{b} si ha infatti

$$\|x(t, x_0, u(\cdot))\| \leq k_0 \|x_0\| e^{\alpha t} + \bar{b} \|u(\cdot)\|_\infty$$

per $t \geq 0$. Se A è Hurwitz, α si può prendere negativa, e quindi $e^{\alpha t} < 1$. Per concludere, basta poi osservare che $\|y\| \leq \|C\| \cdot \|x\|$.

■

Purtroppo, l'inverso del Teorema 5.1 è falso, anche se il sistema è completamente osservabile.

Esempio 5.2 Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

(con funzione di uscita uguale all'identità) ha la proprietà di stabilità con guadagno finito, ma non è internamente stabile.

■

Si pone allora il problema di trovare condizioni aggiuntive, sotto le quali il Teorema 5.1 possa essere invertito, oppure di trovare una proprietà più debole della stabilità asintotica del sistema non forzato, che risulti necessaria e sufficiente per la stabilità BIBO del sistema (5.1). Risolveremo questo problema per gradi, affrontando prima il caso in cui la matrice C sia l'identità, e successivamente il caso generale.

5.4 Il caso $C = I$

Se $C = I$, il sistema si presenta nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = x \end{cases} \quad (5.7)$$

In tali condizioni, la stabilità BIBO si riduce alla stabilità BIBS e inoltre $W(t) = e^{tA}B$.

Proposizione 5.5 *Se il sistema (5.7) è uniformemente BIBO stabile, allora l'origine è un punto d'equilibrio stabile (in generale, non asintoticamente) per il sistema non forzato (5.2).*

Dimostrazione Evidentemente, la stabilità BIBO implica che il sistema non forzato (5.2) ha tutte le soluzioni limitate per $t \geq 0$. Ciò equivale a dire che l'origine è un punto d'equilibrio stabile (nel senso di Liapunov) per il sistema non forzato (5.2). ■

D'altra parte, la stabilità semplice (non asintotica) del sistema non forzato non è sufficiente per la stabilità BIBO del sistema (5.7) (si pensi al sistema scalare $\dot{x} = u$). Per caratterizzare la stabilità esterna del sistema (5.7) in termini di stabilità interna, dobbiamo quindi identificare una proprietà che sia intermedia tra la stabilità semplice e la stabilità asintotica del sistema non forzato.

Lemma 5.3 *Supponiamo che (5.7) abbia risposta impulsiva limitata, e sia $u(\cdot) : [0, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^m$ una funzione continua a tratti. Se esiste un numero $\bar{t} > 0$ tale che $u(t) \equiv 0$ per $t \geq \bar{t}$, allora*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, 0, u(\cdot)) = 0. \quad (5.8)$$

Dimostrazione Sia \bar{u} una costante tale che $\|u(t)\| \leq \bar{u}$ per $t \in [0, \bar{t}]$. Se $t > \bar{t}$,

$$x(t, 0, u(\cdot)) = \int_0^{\bar{t}} W(t-s)u(s) ds = \int_{t-\bar{t}}^t W(\sigma)u(t-\sigma) d\sigma$$

da cui

$$\|x(t, 0, u(\cdot))\| \leq \bar{u} \int_{t-\bar{t}}^t \|W(\sigma)\| d\sigma.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_0^{\infty} \|W(\sigma)\| d\sigma$ converge, l'integrale nell'ultima formula scritta può essere reso arbitrariamente piccolo per t sufficientemente grande. ■

Siamo adesso in grado di dimostrare un inverso parziale del Teorema 5.1 per i sistemi che si presentano nella forma (5.7).

Proposizione 5.6 *Supponiamo che il sistema (5.7) sia completamente controllabile, e che possieda inoltre la proprietà di stabilità esterna. Allora la matrice A è Hurwitz.*

Dimostrazione È sufficiente far vedere che l'origine è globalmente attrattiva per il sistema non forzato (5.2), e cioè che per ogni $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0, 0) = 0$.

Poiché (5.7) è completamente controllabile, fissato un istante $T_0 > 0$ esiste un ingresso $u_0 : [0, T_0] \rightarrow \mathbf{R}^m$ tale che $x(T_0, 0, u_0(\cdot)) = x_0$. Definiamo allora

$$u(t) = \begin{cases} u_0(t) & \text{se } t \in [0, T_0] \\ 0 & \text{se } t > T_0. \end{cases}$$

Per il Lemma 5.3, possiamo affermare che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, 0, u(\cdot)) = 0.$$

Poiché $x(t, 0, u(\cdot)) \equiv x(t, 0, u_0(\cdot))$ per $t \in [0, T_0]$, si ha $x(T_0, 0, u(\cdot)) = x_0$. Inoltre, per le proprietà dei sistemi invarianti nel tempo,

$$x(t, 0, u(\cdot)) = x(t - T_0, x_0, 0) \quad \text{per } t > T_0 .$$

Da ciò segue subito la conclusione. ■

Sotto l'ipotesi di completa controllabilità, e se la matrice di osservazione è uguale all'identità, la stabilità interna è quindi necessaria e sufficiente per la stabilità esterna. Il prossimo passo consiste nella determinazione di una condizione necessaria e sufficiente più precisa, sempre limitata ai sistemi del tipo (5.7) ma svincolata dall'ipotesi di completa controllabilità.

Ricordiamo che a meno di un cambiamento di coordinate lineare, si può supporre che il sistema (5.7) si presenti nella forma

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 \end{cases} \quad (5.9)$$

dove $z_1 \in \mathbf{R}^q$ e $z_2 \in \mathbf{R}^{n-q}$ (le notazioni sono quelle della Sezione 4.6.3) e la coppia di matrici A_{11} , B_1 definiscono un sistema in \mathbf{R}^q completamente controllabile. Ovviamente, le proprietà di stabilità interna ed esterna non si perdono né si acquistano cambiando la base di \mathbf{R}^n .

Teorema 5.2 *Il sistema (5.7) è uniformemente BIBO-stabile se e solo se valgono entrambe le condizioni seguenti:*

- (i) *la matrice A_{11} della parte controllabile ha tutti gli autovalori con parte reale negativa;*
- (ii) *la matrice A_{22} della parte non controllabile non ha autovalori con parte reale positiva e per ogni suo eventuale autovalore con parte reale nulla, le molteplicità algebrica e geometrica coincidono.*

Dimostrazione Se il sistema (5.9) è uniformemente BIBO stabile, lo stesso deve essere vero per il sottosistema

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + B_1u \quad (5.10)$$

che è completamente controllabile. La (i) segue allora applicando successivamente le Proposizioni 5.2 e 5.6. Gli autovalori di A_{22} sono un sottoinsieme dell'insieme degli autovalori di A . Allora, la (ii) segue subito dall'Osservazione 5.5.

Proviamo adesso il viceversa. Cominciamo col fissare un numero positivo R e consideriamo un punto $\bar{z} \in \mathbf{R}^n$ e un ingresso $u(t)$ tali che

$$\|\bar{z}\| < R, \quad \|u(\cdot)\|_\infty < R .$$

Indichiamo con $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ la soluzione del sistema, scritto nella forma (5.9), corrispondente alla condizione iniziale $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$ e all'ingresso $u(t)$. Osserviamo che

$$\|z(t)\| \leq \|z_1(t)\| + \|z_2(t)\|$$

e

$$\|\bar{z}_1\| \leq \|\bar{z}\|, \quad \|\bar{z}_2\| \leq \|\bar{z}\|$$

dove le norme sono prese, a seconda dei casi, in \mathbf{R}^n , in \mathbf{R}^q oppure in \mathbf{R}^{n-q} . Per l'ipotesi su A_{22} , esisterà una costante $\gamma > 0$ tale che

$$\|z_2(t)\| \leq \gamma \|\bar{z}_2\| < \gamma R$$

(Appendice B). Posto

$$v(t) = A_{12}z_2(t) + B_1u(t) ,$$

si ha allora

$$\|v(t)\| \leq \|A_{12}\|\gamma R + \|B_1\|R .$$

Sia $\tilde{R} = \max\{R, \|A_{12}\|\gamma R + \|B_1\|R\}$. Poiché A_{11} è Hurwitz, il sottosistema

$$\dot{z}_1 = A_{11}z_1 + v$$

è uniformemente BIBO stabile. Dunque esiste una costante \tilde{S} tale che se

$$\|v(t)\| < \tilde{R} , \quad \|\bar{z}_1\| < \tilde{R} \quad (5.11)$$

allora $\|z_1(t)\| < \tilde{S}$. Nel nostro caso, le (5.11) sono effettivamente verificate, in virtù delle scelte effettuate. Dunque,

$$\|z(t)\| \leq \|z_1(t)\| + \|z_2(t)\| \leq \tilde{S} + \gamma R .$$

La (5.3) risulta infine verificata con $S = \tilde{S} + \gamma R$.

■

5.5 Il caso generale

Torniamo adesso al caso generale (5.1). Stabiliamo, prima di tutto, una versione generalizzata della Proposizione 5.5.

Proposizione 5.7 *Supponiamo che il sistema (5.1) sia completamente osservabile e che sia inoltre uniformemente BIBO stabile. Allora l'origine è un punto d'equilibrio stabile (in generale, non asintoticamente) per il sistema non forzato (5.2).*

Dimostrazione Per l'ipotesi di stabilità esterna, qualunque sia $R > 0$ esiste $S > 0$ tale che se $\|x_0\| < R$ e $u \equiv 0$ si ha

$$\|Ce^{tA}x_0\| < S$$

per $t \geq 0$. Supponiamo che A possieda un autovalore reale $\lambda > 0$, e sia $v \neq 0$ un autovettore di λ tale che $\|v\| < R$. Si avrà

$$\|Ce^{tA}v\| = \|C(e^{\lambda t}v)\| = e^{\lambda t}\|Cv\| < S$$

per $t \geq 0$, il che è possibile solo se $Cv = 0$. Per le proprietà dell'esponenziale si ha inoltre

$$\frac{d}{dt}Ce^{tA}v = CAe^{tA}v .$$

D'altra parte, si ha anche

$$\frac{d}{dt}Ce^{tA}v = \frac{d}{dt}e^{\lambda t}Cv = \lambda e^{\lambda t}Cv .$$

Da $Cv = 0$ segue dunque $CAe^{tA}v = 0$ per $t \geq 0$, e in particolare, per $t = 0$, $CAv = 0$. Iterando il procedimento fino al calcolo delle derivate $(n-1)$ -esime, si arriva alla conclusione che

$$[C|CA|\dots|CA^{n-1}]v = 0$$

che è impossibile in quanto la condizione di completa osservabilità equivale a dire che la matrice $[C|CA|\dots|CA^{n-1}]$ ha rango massimo.

Supponiamo che A abbia un autovalore $\lambda = 0$ di molteplicità geometrica strettamente inferiore alla molteplicità algebrica. Esistono un autovettore v_0 e un autovettore generalizzato v_1 (entrambi non nulli) tali che

$$e^{tA}v_1 = tv_0 + v_1.$$

Non è restrittivo assumere $\|v_1\| < R$, così che $\|Ce^{tA}v_1\| < S$ per $t \geq 0$. Ma

$$\|Ce^{tA}v_1\| = \|tCv_0 + Cv_1\| \geq t\|Cv_0\| - \|Cv_1\|$$

e questa quantità può essere limitata per $t \geq 0$ solo se $Cv_0 = 0$. Ovviamente,

$$\frac{d}{dt}e^{tA}v_1 = \frac{d}{dt}(tv_0 + v_1) = v_0$$

cioè

$$\frac{d}{dt}Ce^{tA}v_1 = Cv_0 = 0.$$

D'altra parte, si ha anche

$$\frac{d}{dt}Ce^{tA}v_1 = CAe^{tA}v_1 = CA(tv_0 + v_1).$$

Quest'ultima può essere nulla solo se $CAv_0 = 0$. A questo punto la dimostrazione procede come nel caso precedente.

In maniera del tutto analoga, si può escludere che A possieda autovalori complessi con parte reale positiva o autovalori immaginari con molteplicità algebrica strettamente maggiore della molteplicità geometrica. ■

Lemma 5.4 *Supponiamo che il sistema (5.1) sia completamente osservabile. Se inoltre il sistema è esternamente stabile, allora il sistema (5.7), con le stesse matrici A e B e con matrice di osservazione uguale all'identità, è esternamente stabile.*

Dimostrazione In caso contrario, esisterebbe un $R > 0$ tale che per ogni $S > 0$ si potrebbero trovare uno stato iniziale x_0 , un ingresso ammissibile $u(\cdot) : [0, +\infty] \rightarrow \mathbf{R}^m$, e un istante $\tau > 0$ tali che

$$\|x_0\| < R, \quad \|u(\cdot)\|_\infty < R, \quad \text{ma} \quad \|x(\tau)\| \geq \sqrt{\frac{S}{\|E(1)\|}}$$

dove $E(t)$ è la matrice definita al paragrafo 4.5.3. In virtù dell'ipotesi di completa osservabilità possiamo essere certi che $\|E(1)\| \neq 0$ (Teorema 4.8). Torniamo adesso a considerare il sistema (5.1), per studiarne l'uscita $y(t)$ che corrisponde allo stesso stato iniziale x_0 e all'ingresso ammissibile

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{per } t \leq \tau \\ 0 & \text{per } t > \tau. \end{cases}$$

Naturalmente, $\|\tilde{u}(\cdot)\|_\infty < R$. Si ha

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{(t-\tau)A}x(\tau).$$

Prendendo le norme, e integrando tra τ e $\tau + 1$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+1} \|y(t)\| dt &= \int_{\tau}^{\tau+1} \|Ce^{(t-\tau)A}x(\tau)\| dt = \int_{\tau}^{\tau+1} x^t(\tau)e^{(t-\tau)A^t}C^tCe^{(t-\tau)A}x(\tau) dt = \\ &= x^t(\tau) \int_{\tau}^{\tau+1} e^{\sigma A^t}C^tCe^{\sigma A} d\sigma x(\tau) = x^t(\tau)E(1)x(\tau) > 0. \end{aligned}$$

D'altronde $\int_{\tau}^{\tau+1} \|y(t)\| dt \leq \max_{[\tau, \tau+1]} \|y(t)\| = \|y(\tilde{\tau})\|$ per qualche $\tilde{\tau} \geq \tau$. Mettendo insieme le due conclusioni, si ricava

$$\|y(\tilde{\tau})\| \geq \|E(1)\| \cdot \|x(\tau)\|^2 > S.$$

Questo significherebbe che (5.1) non è esternamente stabile, contrariamente all'ipotesi. ■

Grazie al lemma precedente, possiamo enunciare un inverso parziale del Teorema 5.1 per i sistemi del tipo (5.1), generalizzando così la Proposizione 5.6.

Proposizione 5.8 *Supponiamo che il sistema (5.1) sia completamente controllabile e completamente osservabile. Supponiamo inoltre che possieda la proprietà di stabilità esterna. Allora la matrice A è Hurwitz.*

Dimostrazione Per il Lemma 5.4, il sistema (5.7) è esternamente stabile. Inoltre, se il sistema (5.1) è completamente controllabile, anche il sistema (5.7) sarà completamente controllabile. Si perviene alla conclusione in virtù della Proposizione 5.6. ■

Pertanto, sotto le ipotesi di completa controllabilità e completa osservabilità, un sistema del tipo (5.1) è esternamente stabile se e solo se è internamente stabile. Con un ultimo sforzo, possiamo infine liberarci da ogni ipotesi restrittiva e formulare una condizione necessaria e sufficiente di carattere generale.

Facendo riferimento alla scomposizione di Kalman studiata nella Sezione 4.6.5, e alle notazioni colà introdotte, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u \\ \dot{z}_4 = A_{44}z_4 \end{cases} \quad (5.12)$$

con funzione di osservazione $y = C_2z_2 + C_4z_4$. Per costruzione esso risulta completamente osservabile.

Lemma 5.5 *Il sistema (5.1) è esternamente stabile se e solo se il sistema (5.12) è esternamente stabile.*

Dimostrazione Supponiamo prima che il sistema (5.12) possieda la proprietà di stabilità BIBO. Non è restrittivo assumere che il sistema (5.1) si presenti nella forma di Kalman (Proposizione 5.3) che riportiamo per comodità

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = A_{11}z_1 + A_{12}z_2 + A_{13}z_3 + A_{14}z_4 + B_1u \\ \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + A_{24}z_4 + B_2u \\ \dot{z}_3 = A_{33}z_3 + A_{34}z_4 \\ \dot{z}_4 = A_{44}z_4 \\ y = C_2z_2 + C_4z_4 . \end{cases}$$

Sia $R > 0$ e consideriamo il sistema (5.1): scegliamo uno stato iniziale $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4)$ e un ingresso ammissibile $u(\cdot)$ tali che

$$\|\bar{z}\| < R \quad \text{e} \quad \|u(\cdot)\|_\infty < R .$$

Il vettore (\bar{z}_2, \bar{z}_4) riunisce una parte delle componenti di \bar{z} , quindi si ha

$$\|(\bar{z}_2, \bar{z}_4)\| < R .$$

Per ipotesi, esiste allora S tale che $\|y(t)\| < S$ per ogni $t \geq 0$. Per concludere basta osservare che (5.12) e (5.1) hanno la stessa uscita.

Viceversa, supponiamo che (5.1) possieda la proprietà di stabilità BIBO. Introduciamo R e consideriamo il sistema (5.12). Scegliamo uno stato iniziale (\bar{z}_2, \bar{z}_4) e un ingresso ammissibile $u(\cdot)$ tali che

$$\|(\bar{z}_2, \bar{z}_4)\| < R \quad \text{e} \quad \|u(\cdot)\|_\infty < R .$$

Applichiamo lo stesso ingresso al sistema (5.1) scegliendo come condizione iniziale $\bar{z} = (0, \bar{z}_2, 0, \bar{z}_4)$. Chiaramente $\|\bar{z}\| = \|(\bar{z}_2, \bar{z}_4)\|$. Dunque esiste S tale che $\|y(t)\| < S$ per ogni $t \geq 0$. Ancora una volta, si conclude osservando che i due sistemi hanno la stessa uscita.

■

Lemma 5.6 *Il sistema (5.12) è esternamente stabile se e solo se*

- (i) *gli autovalori della matrice A_{22} hanno tutti parte reale strettamente negativa;*
- (ii) *gli autovalori della matrice A_{44} hanno tutti parte reale non-positiva, e per quegli eventuali autovalori con parte reale nulla, le molteplicità algebrica e geometrica coincidono*

Dimostrazione Valgano le condizioni (i) e (ii). La matrice A_{44} definisce un sistema non forzato per cui l'origine è stabile (non asintoticamente). In particolare, la componente z_4 del sistema (5.12) si mantiene limitata nella sua evoluzione. Interpretando $v = A_{24}z_4 + B_2u$ come nuovo ingresso, se $u(\cdot)$ è limitato anche $v(\cdot)$ è limitato. Poiché il sottosistema

$$\dot{z}_2 = A_{22}z_2 + v \tag{5.13}$$

è completamente controllabile, anche l'evoluzione di z_2 si mantiene limitata. Di qui si arriva facilmente alla conclusione.

Viceversa, supponiamo che il sistema possieda la proprietà di stabilità BIBO. Poiché il sistema è completamente osservabile, per la Proposizione 5.7, la matrice

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{pmatrix}$$

definisce un sistema non forzato per cui l'origine è stabile (non asintoticamente). Ciò implica in particolare la condizione (ii). La condizione (i) segue applicando la Proposizione 5.8 al sottosistema completamente controllabile e completamente osservabile

$$\begin{cases} \dot{z}_2 = A_{22}z_2 + B_1u \\ y = C_2z_2 \end{cases} \tag{5.14}$$

inizializzato a $(\bar{z}_2, 0)$.

■

Combinando questi due lemmi, si ottiene la condizione necessaria e sufficiente desiderata.

Teorema 5.3 *Un sistema della forma (5.1) è uniformemente BIBO-stabile se e solo se valgono le due seguenti condizioni:*

- (i) *gli autovalori della matrice A_{22} corrispondente alla parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema hanno tutti parte reale strettamente negativa;*
- (ii) *gli autovalori della matrice A_{44} corrispondente alla parte osservabile ma non controllabile del sistema hanno tutti parte reale non-positiva, e per quegli eventuali autovalori con parte reale nulla, le molteplicità algebrica e geometrica coincidono.*

Capitolo 6

Stabilizzabilità

Come accennato nel primo capitolo, il comportamento di un sistema può essere regolato, senza alterarne radicalmente la struttura, mediante la costruzione di opportuni dispositivi di controllo collegati in retroazione. Simili dispositivi possono essere di natura statica (e quindi essere rappresentabili per mezzo di una funzione) oppure richiedere un'elaborazione dinamica (e quindi essere a loro volta interpretabili come un sistema dinamico). La connessione in retroazione fa sì che il controllo possa essere esercitato in maniera automatica (cioè senza l'intervento permanente di un operatore umano). A tal fine, il dispositivo deve potersi avvalere di sensori che rilevino, istante per istante l'evoluzione delle variabili di stato.

Quando tutte le variabili di stato possono essere monitorate, e le informazioni che se ne ricavano possono essere utilizzate senza restrizioni dal dispositivo di controllo, si dice che siamo in presenza di una *retroazione dello stato*. Quando invece le informazioni sull'evoluzione dello stato sono disponibili solo parzialmente (perché per esempio vengono acquisite attraverso una funzione di osservazione), si dice che siamo in presenza di una *retroazione dell'uscita*.

6.1 Retroazioni statiche dello stato

Nel problema della stabilizzazione mediante retroazione statica dello stato la funzione di osservazione non gioca nessun ruolo. Pertanto, in questa sezione, possiamo limitarci a considerare un sistema dinamico della forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}^m. \quad (6.1)$$

Prima di tutto, cerchiamo di illustrare che cosa capita durante il ciclo di retroazione. Sia $v = v(t)$ un segnale che viene inviato al sistema attraverso il canale di ingresso u , e sia $x(t)$ l'evoluzione che ne risulta. La funzione di retroazione $k(x) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ genera un altro segnale $w(t) = k(x(t))$ che va a sommarsi al segnale originario. Il segnale che viene effettivamente ricevuto dal sistema è, in altre parole, $u = w(t) + v(t)$.

Una retroazione statica dello stato si dice *lineare* quando $k(x) = Fx$, dove F è una matrice $m \times n$. L'implementazione di una retroazione della forma

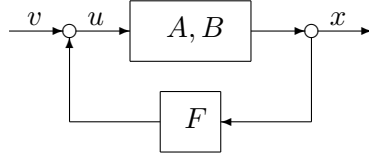
$$u = Fx + v \quad (6.2)$$

dove la variabile v rappresenta, come sopra, eventuali altri segnali immessi nel sistema attraverso

l'ingresso u , può essere interpretata come una trasformazione. Sostituendo (6.2) in (6.1), si ottiene infatti il nuovo sistema

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bv \quad (6.3)$$

che si chiama *sistema retroazionato* (in inglese, *closed-loop*).



Osserviamo subito che in virtù della particolare forma del controllo (6.2), il sistema trasformato (6.3) è ancora lineare, che la matrice B è rimasta invariata mentre la matrice A si è cambiata nella matrice $\tilde{A} = A + BF$. Osserviamo anche che la trasformazione definita dalla (6.2) è invertibile; infatti, se si parte dal sistema (6.3) e si applica la retroazione $v = -Fx + u$ si ritrova il sistema (6.1).

La relazione tra sistemi indotta dalla trasformazione (6.2) è un'equivalenza.

Definizione 6.1 *I due sistemi (6.1) e*

$$\dot{x} = \tilde{A}x + Bu$$

si dicono feedback equivalenti se esiste una matrice F tale che $\tilde{A} = A + BF$.

In questo ordine di idee, i problemi si pongono tipicamente nel modo seguente: data una certa proprietà e dato un sistema (6.1) che non la soddisfa, vogliamo sapere se esiste o meno una retroazione della forma (6.2) tale che la proprietà richiesta è posseduta dal sistema (6.3). In altre parole, vogliamo sapere se, costruendo opportunamente il ciclo di retroazione, è possibile modificare il comportamento qualitativo del sistema.

6.1.1 Controllabilità

Ci si può per esempio chiedere se in questo modo si può far acquisire ad un sistema la proprietà di controllabilità completa. La risposta è negativa. Vale infatti il

Teorema 6.1 *Qualunque sia F , gli spazi raggiungibili dall'origine $R_{(6.1)}$ e $R_{(6.3)}$ relativi rispettivamente ai sistemi (6.1) e (6.3) coincidono. In particolare,*

$$\text{rank} [B|AB|\dots|A^{n-1}B] = \text{rank} [B|(A + BF)B|\dots|(A + BF)^{n-1}B] .$$

Dimostrazione Per il Teorema 4.3

$$R_{(6.1)} = \text{span} \{b^1, \dots, b^m; Ab^1, \dots, Ab^m; \dots; A^{n-1}b^1, \dots, A^{n-1}b^m\} .$$

Cioè $v \in R_{(6.1)}$ se e solo se v è combinazione lineare di alcuni dei vettori indicati. Analogamente,

$$R_{(6.3)} = \text{span} \{b^1, \dots, b^m; (A + BF)b^1, \dots, (A + BF)b^m; \dots; (A + BF)^{n-1}b^1, \dots, (A + BF)^{n-1}b^m\} .$$

Osserviamo che $(A + BF)b^j = Ab^j + BFb^j$. Il vettore Ab^j appartiene ad $R_{(6.1)}$ e il vettore

$$BFb^j = [b^1 | \dots | b^m] F b^j$$

pure appartiene ad $R_{(6.1)}$ in quanto combinazione lineare dei b^1, \dots, b^m . Procedendo, si nota che

$$(A + BF)^2 b^j = (A + BF)(A + BF)b^j = A^2 b^j + ABFb^j + BFAb^j + BFBFb^j .$$

Il primo addendo sta in $R_{(6.1)}$ per definizione; il secondo perché è una combinazione lineare di Ab^1, \dots, Ab^m ; il terzo e il quarto perché combinazioni lineari di b^1, \dots, b^m . Non è difficile convincersi che lo stesso ragionamento si applica a ogni termine $(A + BF)^k b^j$.

In conclusione, $R_{(6.3)} \subseteq R_{(6.1)}$ perché tutti i vettori di $R_{(6.3)}$ sono combinazione lineare di vettori di $R_{(6.1)}$.

L'inclusione opposta si ottiene ricordando che il sistema (6.1) si può riottenere da (6.3) con l'applicazione della retroazione inversa $v = -Fx + u$. Si ripete quindi il ragionamento, scambiando i ruoli dei sistemi (6.1) e (6.3).

■

Potremmo riformulare il Teorema 6.1 dicendo che la proprietà di controllabilità completa è invariante sotto l'equivalenza feedback.

6.1.2 Stabilità

Nel capitolo precedente ci siamo occupati della stabilità esterna dei sistemi della forma (6.1). Come abbiamo visto, si tratta di una proprietà intrinsecamente correlata alla stabilità interna (detta anche proprietà di Hurwitz). Ciò spiega l'interesse ad elaborare modelli per cui la matrice A del sistema non forzato abbia tutti gli autovalori con parte reale negativa e anzi, nel caso che A non soddisfi a tale condizione, l'interesse ad introdurre modifiche nella struttura del sistema affinché la proprietà venga acquisita.

Al contrario della controllabilità, la proprietà di Hurwitz può, sotto certe condizioni, essere effettivamente acquisita mediante l'applicazione di una retroazione. Per rendersene conto, tratteremo in dettaglio il caso di un sistema ad ingresso scalare (per tali sistemi, si ha $m = 1$ e conseguentemente B è un vettore colonna). L'approccio che proponiamo si basa sul seguente Teorema.

Teorema 6.2 *Sia (4.1) un sistema completamente controllabile, con $m = 1$.*

Esiste un cambiamento di coordinate $x = P\zeta$ per cui il sistema si trasforma in

$$\dot{\zeta} = A_0 \zeta + u b_0 \tag{6.4}$$

dove A_0 è una matrice compagna

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dimostrazione Nell'Appendice B abbiamo visto che se per un certo vettore v i vettori

$$v, Av, \dots, A^{n-1}v$$

sono linearmente indipendenti, allora A è simile alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

dove i numeri a_1, \dots, a_n sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A , a meno del segno (trasposta della forma compagna). La matrice che determina il cambiamento di coordinate è quella formata dalle colonne $v, Av, \dots, \dots, A^{n-1}v$.

L'ipotesi di controllabilità del nostro sistema equivale appunto a dire che la matrice

$$G = [b|Ab|\dots|A^{n-1}b]$$

ha rango n . Dunque $G^{-1}AG = A_0^t$ ed è immediato verificare che

$$G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b \quad \text{cioè} \quad G^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ciò prova che il nostro sistema è linearmente equivalente a

$$\dot{w} = A_0^t w + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

D'altra parte la matrice $H = [b_0|A_0b_0|\dots|A_0^{n-1}b_0]$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}$$

e quindi è non singolare (gli asterischi stanno al posto di certi numeri che non occorre specificare). Ne segue, per le stesse ragioni di cui sopra, che $H^{-1}A_0H = A_0^t$. Inoltre, è chiaro che

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_0 \quad \text{ovvero} \quad H^{-1}b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Così anche il sistema (6.4) è linearmente equivalente a (6.5). Infine (6.4) e il sistema dato, essendo entrambi equivalenti a (6.5), sono equivalenti tra di loro.

■

In altre parole, il Teorema 6.2 afferma che ogni sistema controllabile a ingresso singolo è linearmente equivalente ad un sistema governato da un'equazione differenziale lineare¹.

Riscriviamo per comodità il sistema (6.4) come

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u. \end{cases} \quad (6.6)$$

Una n -pla $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ di numeri complessi non necessariamente distinti si dice *compatibile* se $\bar{\lambda}_i \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Assegnata una n -pla compatibile arbitraria, è facile costruire un polinomio monico a coefficienti reali

$$\lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n$$

le cui radici siano esattamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Applichiamo al sistema (6.6) la retroazione

$$u = (-b_n + a_n)x_1 + \dots + (-b_1 + a_1)x_n + v.$$

Ne risulta il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n = -b_n x_1 - \dots - b_1 x_n + v \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica ha esattamente le soluzioni $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Queste ultime coincidono con gli autovalori della matrice. Se si è avuto cura di scegliere tutti i λ_i con $\text{Re}\lambda_i < 0$, avremo dunque ottenuto, mediante retroazione, un sistema con matrice A Hurwitz.

Abbiamo anzi provato molto di più, e cioè che, mediante retroazione, (6.6) può essere trasformato in un sistema la cui matrice A ha autovalori arbitrariamente assegnabili.

Definizione 6.2 *Si dice che (6.1) è stabilizzabile se esiste una retroazione statica dello stato $u = Fx$ per cui la matrice $(A + BF)$ ha tutti gli autovalori con parte reale negativa.*

Si dice che (6.1) è superstabilizzabile se per ogni $\alpha > 0$ esiste una retroazione statica dello stato $u = Fx$ (con F funzione di α) per cui la matrice $(A + BF)$ ha autovalori tutti con parte reale $< -\alpha$.

Si dice che (6.1) ha la proprietà di assegnabilità dei poli se per ogni n -pla compatibile esiste una retroazione statica dello stato $u = Fx$ per cui gli autovalori di $A + BF$ sono esattamente $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Riassumiamo allora il ragionamento precedente nell'enunciato:

¹Se $m = 2 = \text{rank} B$, la forma canonica che generalizza la (6.4) è rappresentabile mediante matrici a blocchi

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

dove A_{11} e A_{22} sono in forma compagna, e b_{11} , b_{22} sono vettori di dimensione opportuna con tutte le componenti nulle, tranne l'ultima che è uguale ad 1.

In generale, non tutti gli elementi degli altri blocchi A_{12} , A_{21} , b_{12} e b_{21} sono nulli. Per ulteriori generalizzazioni si veda....

Teorema 6.3 *Ogni sistema a ingresso scalare completamente controllabile ha la proprietà di assegnabilità dei poli, ed è pertanto stabilizzabile e superstabilizzabile.*

Con i metodi della moderna teoria dei sistemi, il precedente risultato si generalizza ai sistemi a ingresso multiplo. Vale anzi il seguente risultato.

Teorema 6.4 *Per un sistema del tipo (6.1), le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (i) *controllabilità completa*
- (ii) *assegnabilità dei poli*
- (iii) *superstabilizzabilità.*

La stabilizzabilità è ovviamente implicata da ognuna delle tre, ma è di fatto una proprietà più debole. Per rendersene conto, basta pensare ad un sistema per cui A possieda già la proprietà di Hurwitz, e B sia uguale alla matrice nulla.

È allora interessante chiedersi quali siano le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilizzabilità. A tal fine, osserviamo che se un sistema non è completamente controllabile, possiamo preliminarmente effettuare un cambiamento di coordinate lineare in modo da dare al sistema la forma di Kalman

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{22}x_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

dove il sottosistema relativo alle coordinate x_1 è completamente controllabile.

Teorema 6.5 *Il sistema (6.7) è stabilizzabile se e solo se la matrice A_{22} è Hurwitz.*

Dimostrazione L'insieme degli autovalori di una matrice $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ è l'unione dell'insieme degli autovalori delle matrici A_{11} e A_{22} . L'azione di una retroazione non può modificare in alcun modo la matrice A_{22} . Dunque, se il sistema è stabilizzabile, è ovvio che A_{22} deve essere Hurwitz.

Viceversa, essendo il sottosistema relativo alle componenti x_1 completamente controllabile, esiste una opportuna retroazione $u = F_1x_1$ tale che la matrice $A_{11} + B_1F_1$ è Hurwitz. D'altra parte, la matrice A_{22} è Hurwitz ipotesi. Dunque è Hurwitz anche la matrice A .

■

Alla condizione necessaria e sufficiente di stabilizzabilità possono essere date altre forme; riportiamo, senza dimostrazione, due risultati di semplice applicazione (si notino in particolare analogie e differenze tra l'enunciato del Teorema 6.7 e il criterio di Hautus sulla controllabilità completa).

Teorema 6.6 *Sia V il sottospazio di \mathbf{C}^n generato da tutti gli autovettori (in senso proprio e in senso generalizzato) associati a tutti gli autovalori λ di A con parte reale positiva o nulla. Sia inoltre U il sottospazio di \mathbf{R}^n generato da tutti i vettori della forma $\operatorname{Re} v, \operatorname{Im} v$ con $v \in V$.*

Il sistema (6.1) è stabilizzabile se e solo se U è contenuto nello spazio raggiungibile \mathbf{R} .

Teorema 6.7 *Il sistema (6.1) è stabilizzabile se e solo se*

$$\operatorname{rank}(A - \lambda I \mid B) = n$$

per ogni numero complesso λ con parte reale positiva o nulla.

6.2 Retroazioni statiche dell'uscita

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato il problema della stabilizzabilità mediante retroazione statica dello stato: ovviamente questa strada non è praticabile se l'intero stato del sistema non è disponibile per poter essere elaborato e quindi re-immesso nel sistema attraverso il canale di ingresso. Una situazione del genere si presenta tipicamente quando si ha a che fare con un sistema dotato di una funzione di osservazione

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.8)$$

con $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$, $y \in \mathbf{R}^p$, e si cercano retroazioni della forma $u = Ky$. Il problema della stabilizzabilità mediante retroazione dell'uscita è più naturale dal punto di vista delle applicazioni, ma anche molto più difficile da investigare.

Per renderci conto delle maggiori difficoltà che il secondo approccio comporta da un punto di vista teorico, esaminiamo alcuni semplici esempi.

Esempio 6.1 *Il sistema bidimensionale*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad (6.9)$$

è completamente controllabile, quindi stabilizzabile mediante una retroazione della forma $u = k_1x_1 + k_2x_2$. A condizione che si possano scegliere liberamente (e indipendentemente l'uno dall'altro) i parametri k_1 e k_2 , il sistema è anzi superstabilizzabile.

Tuttavia, non è possibile stabilizzare il sistema se ci si limita ad una retroazione della forma $u = kx_1$. Infatti, applicando una tale retroazione, il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = kx_1 \end{cases}$$

i cui autovalori sono o entrambi sull'asse immaginario o entrambi sull'asse reale (e in quest'ultimo caso uno sarà positivo, l'altro negativo). In altre parole, la possibilità di assegnare arbitrariamente un solo parametro non garantisce i gradi di libertà necessari per risolvere il problema.

Come abbiamo già più volte suggerito, l'impossibilità di implementare una retroazione che utilizzi tutte le variabili di stato si verifica tipicamente quando il sistema può accedere al proprio stato solo attraverso una funzione di osservazione. Nel nostro esempio, la retroazione $u = kx_1$ si può interpretare come una retroazione statica dell'uscita, se si associa al sistema (6.9) la funzione di osservazione sarebbe $y = c^t x$ con $c = (1 \ 0)$. Si noti che il sistema, rispetto a questa funzione di osservazione, è completamente osservabile; e ciononostante, non può essere stabilizzato con una retroazione statica dell'uscita.

Esempio 6.2 *Consideriamo ancora il sistema (6.9), questa volta con funzione di uscita $y = x_1 + x_2$. Applicando la retroazione $u = -ky = -k(x_1 + x_2)$, con $k > 0$, si ottiene il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -kx_1 - kx_2 \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + k\lambda + k = 0$. Il sistema è quindi stabilizzabile, ma non superstabilizzabile. Infatti, le radici caratteristiche sono

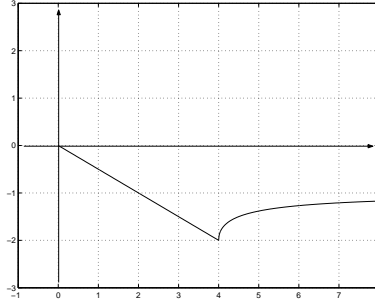


Figura 6.1: Grafico di $\text{Re}(\lambda_2(k))$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2} .$$

Se $0 < k < 4$ esse sono non reali. La loro parte reale decresce al crescere di k , e $\lim_{k \rightarrow 4^-} \text{Re} \lambda = -2$.

Se $k = 4$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Se $k > 4$, le radici caratteristiche sono reali. La più grande delle due

$$\lambda_2 = \frac{-k + \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$$

cresce al crescere di k , e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_2 = -1 .$$

In definitiva, $\lambda_2(k) \geq -2$ per ogni $k \geq 0$ (il grafico della parte reale di λ_2 in funzione di k è mostrato nella Figura 6.1).

Ovviamente, se un sistema è stabilizzabile con retroazione statica dell'uscita, lo è anche con retroazione statica dello stato. Quindi tutte le condizioni di stabilizzabilità esaminate nel paragrafo precedente rimangono valide, ma solo in quanto condizioni necessarie.

La seguente proposizione risolve completamente il problema limitatamente al caso bidimensionale.

Proposizione 6.1 Consideriamo il sistema bidimensionale completamente controllabile, in forma di controllabilità

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + u \end{cases} \quad (6.10)$$

con funzione di osservazione $y = b_0 x_1 + b_1 x_2$ ($b_1 \neq 0$). Allora:

- (i) Se $b = -b_0/b_1 < 0$, esiste $\tilde{k} \in \mathbf{R}$ tale che la retroazione statica dell'uscita $u = \tilde{k}y$ stabilizza il sistema;

(ii) Se $b = -b_0/b_1 \geq 0$, esistono valori di $\tilde{k} \in \mathbf{R}$ tale che la retroazione statica dell'uscita $u = \tilde{k}y$ stabilizza il sistema se e solo se

$$-ba_1 < a_2 .$$

Dimostrazione Poniamo per comodità $k = -b_1\tilde{k}$. Applicando la retroazione $u = \tilde{k}y = -k(-bx_1 + x_2)$, il sistema (6.10) diventa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (-a_2 + kb)x_1 + (-a_1 - k)x_2 \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + (a_1 + k)\lambda + (a_2 - kb) = 0 .$$

Per il criterio di Routh-Hurwitz, il sistema viene stabilizzato se e solo se k (o \tilde{k}) è scelto in modo che

$$a_1 + k > 0 \quad \text{e} \quad a_2 - kb > 0 .$$

Possiamo ora discutere i due casi. Se $b < 0$, la condizione di stabilità si riscrive

$$k > -a_1 \quad \text{e} \quad k > \frac{a_2}{b}$$

ed è certamente soddisfatta se k è abbastanza grande. Se invece $b \geq 0$ la condizione di stabilità diventa

$$k > -a_1 \quad \text{e} \quad k < \frac{a_2}{b} .$$

Valori di k per cui il sistema resta stabilizzato esisteranno dunque se e solo se $-ba_1 < a_2$. ■

Il caso $b_1 = 0$, non contemplato nella Proposizione 6.1 è lasciato per esercizio.

Per quanto riguarda il problema dell'assegnabilità dei poli mediante retroazione statica dell'uscita, riportiamo, senza dimostrazione, la seguente condizione necessaria.

Proposizione 6.2 *Sia dato il sistema (6.8) e sia data una n -pla compatibile $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Se esiste una retroazione $u = Ky = KCx$ tale che gli autovalori della matrice $A + BKC$ sono esattamente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora $mp \geq n$.*

6.3 Retroazioni dinamiche dell'uscita

Le difficoltà che si incontrano nel problema della stabilizzazione mediante retroazione statica dell'uscita possono essere aggirate ricorrendo ad una procedura di natura diversa, a patto che il sistema sia, in linea di principio, stabilizzabile mediante retroazione statica dello stato, e che sia soddisfatta un'ulteriore condizione tecnica di cui parleremo tra breve).

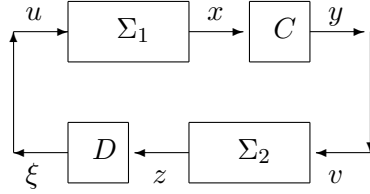
Definizione 6.3 *Si dice che il sistema (6.8) è stabilizzabile con retroazione dinamica dell'uscita se esiste un sistema*

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gv \\ \xi = Dz \end{cases} \quad (6.11)$$

con $z \in \mathbf{R}^p$, $v \in \mathbf{R}^m$, $\xi \in \mathbf{R}^m$ tale che il sistema composto, che si ottiene con le sostituzioni $u = \xi$ e $v = y$ (si veda la figura)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BDz \\ \dot{z} = Fz + GCx \end{cases}$$

abbia nell'origine $(x, z) = (0, 0) \in \mathbf{R}^{n+\nu}$ una posizione d'equilibrio asintoticamente stabile. Al sistema (6.11) si dà il nome di sistema compensatore, o di sistema controllore.



Esempio 6.3 Il sistema (6.9) con funzione di osservazione $y = x_1$, è dinamicamente stabilizzato per mezzo del compensatore

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 + v \\ \dot{z}_2 = -2z_1 - z_2 + v \\ \xi = -z_1 - z_2 \end{cases}$$

Connettendo i sistemi come sopra indicato, si ottiene infatti

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -z_1 - z_2 \\ \dot{z}_1 = x_1 - z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = x_1 - 2z_1 - z_2 \end{cases}$$

la cui equazione caratteristica è $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. La verifica che tutte le radici hanno parte reale negativa è lasciata per esercizio (usare il criterio di Routh-Hurwitz).

La procedura di carattere generale che permette di costruire, sotto ipotesi opportune, una retroazione dinamica dell'uscita in grado di stabilizzare un sistema del tipo (6.8) sarà descritta nelle prossime sottosezioni.

6.3.1 Costruzione di un osservatore asintotico

Definizione 6.4 Si dice che il sistema (6.8) ha la proprietà di rilevabilità (in inglese detectability) se esiste una matrice K di dimensioni appropriate tale che la matrice $L^t = A^t - C^t K^t$ sia Hurwitz.

Un sistema ha la proprietà di rilevabilità se e solo se il suo sistema duale ha la proprietà di stabilizzabilità. In particolare, ogni sistema completamente osservabile ha la proprietà di rilevabilità.

Proposizione 6.3 Supponiamo che il sistema dato (6.8) abbia la proprietà di rilevabilità. Per ogni ingresso ammissibile $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^m$ e per ogni coppia di vettori $x_0, z_0 \in \mathbf{R}^n$, indicate con $x(t)$ la soluzione del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

corrispondente all'ingresso $u(t)$ e allo stato iniziale x_0 , e con $z(t)$ la soluzione del sistema

$$\dot{z} = Lz + Ky + Bu \quad (6.12)$$

corrispondente all'ingresso $u(t)$ e allo stato iniziale z_0 , si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - z(t)) = 0 .$$

Dimostrazione Posto uguale ad $e(t) = x(t) - z(t)$ l'errore che si commette sostituendo lo stato osservato $z(t)$ allo stato effettivo $x(t)$, si ha:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = Ax + Bu - Lz - KCx - Bu = (L + KC)x - Lz - KCx = Le . \quad (6.13)$$

Poiché gli autovalori di L hanno tutti parte reale negativa (una matrice e la sua trasposta hanno sempre gli stessi autovalori), si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$ come desiderato. ■

Osservazione 6.1 *Il sistema (6.12) riceve in ingresso lo stesso ingresso del sistema dato, ma anche l'uscita del sistema dato.*

La Proposizione 6.3 afferma che indipendentemente da come i due sistemi sono inizializzati, a parità di ingresso le soluzioni di (6.12) approssimano asintoticamente quelle del sistema dato. Per questa ragione, il sistema (6.12) si dice anche un osservatore asintotico.

6.3.2 Costruzione di un compensatore dinamico

Supponiamo ora che il sistema (6.8) possieda, oltre alla proprietà di rilevabilità, anche la proprietà di stabilizzabilità. Allora possiamo costruire una matrice H tale che la matrice $(A + BH)$ sia Hurwitz.

Se l'intero stato del sistema fosse utilizzabile ai fini del controllo, potremmo applicare direttamente la retroazione $u = Hx$. Altrimenti, è naturale "tentare" con la legge di controllo $u = Hz$, dove la z è fornita dall'osservatore asintotico (6.12).

Effettuando la sostituzione $u = Hz$ in (6.8) e in (6.12) (e ricordando che $y = Cx$), si ottengono i due sistemi di equazioni differenziali

$$\dot{x} = Ax + BHx \quad (6.14)$$

$$\dot{z} = Lz + KCx + BHx = KCx + (A - KC + BH)z \quad (6.15)$$

Lemma 6.1 *Il sistema formato da (6.14) e (6.15) è asintoticamente stabile nell'origine.*

Dimostrazione Introduciamo, come prima, la variabile $e = x - z$. La (6.14) equivale alla

$$\dot{x} = (A + BH)x - BHe \quad (6.16)$$

mentre la (6.15) equivale alla

$$\dot{e} = Ax + BHx - Az + KCz - BHx - KCx = Ax - Ax + Ae + KCx - KCe - KCx = Le . \quad (6.17)$$

I sistemi (6.16) e (6.17) possono essere riguardati come un unico sistema lineare omogeneo, di matrice

$$\begin{pmatrix} A + BH & -BH \\ 0 & A - KC \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

L'insieme degli autovalori della (6.18) è l'unione degli insiemi degli autovalori delle matrici $A + BH$ e $A - KC$ le quali, per costruzione, sono Hurwitz. L'asserto è provato. ■

Teorema 6.8 *Se il sistema (6.8) è stabilizzabile con una retroazione statica dello stato, e se inoltre possiede la proprietà di rilevabilità, allora è stabilizzabile anche con una retroazione dinamica dell'uscita.*

Dimostrazione Il sistema formato da (6.14) e (6.15) si può interpretare come risultato dalla composizione del sistema dato (6.8) e del compensatore dinamico

$$\begin{cases} \dot{z} = (A - KC + BH)z + Kv \\ \xi = Hz. \end{cases}$$

Quello che abbiamo costruito è quindi effettivamente una retroazione dinamica dell'uscita: per ritrovare le notazioni della Definizione 6.3, è sufficiente porre $F = A - KC + BH$, $G = K$, $D = H$. Per completare il ragionamento basta invocare il Lemma precedente. ■

Il problema della costruzione di una retroazione dinamica dell'uscita in grado di stabilizzare il sistema (6.8) è stato in definitiva ricondotto alla costruzione di una retroazione statica dello stato $u = Hx$ in grado di stabilizzare il sistema dato (come se l'intero stato fosse disponibile) e alla costruzione di una retroazione statica dello stato $w = -K^t z$ in grado di stabilizzare il sistema duale

$$\dot{z} = A^t z + C^t w.$$

Questa conclusione è nota come *Principio di separazione*.

Sottolineiamo ancora una volta che per costruire H e K bisogna conoscere A , B e C , ma per effettuare "fisicamente" la connessione tra il sistema dato e il compensatore costruito, è sufficiente disporre dell'uscita y .

A prima vista, il Teorema 6.8 sembra suggerire che l'utilizzo della retroazione dinamica dell'uscita costituisca una tecnica più generale rispetto all'utilizzo della retroazione statica dello stato. In realtà, i due approcci sono equivalenti.

Teorema 6.9 *Sia dato il sistema (6.8), e supponiamo che sia stabilizzabile mediante una retroazione dinamica (6.11) dell'uscita. Allora, il sistema è stabilizzabile anche mediante una retroazione statica dello stato.*

Dimostrazione Supponiamo che esista una retroazione dinamica che stabilizza il sistema. Il sistema retroazionato si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Dunque il sistema in $\mathbf{R}^{n+\nu}$ definito dalle matrici

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

è stabilizzabile (con retroazione statica dello stato). Per il Teorema 6.7, deve allora essere

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A + \lambda I & 0 & \vdots & B & 0 \\ 0 & F + \lambda I & \vdots & 0 & G \end{pmatrix} = n + \nu$$

per ogni numero complesso λ con parte reale maggiore o uguale a zero. Di qui segue subito

$$\text{rank}(A + \lambda I \vdots B) = n$$

per ogni numero complesso λ con parte reale maggiore o uguale a zero.

■

Capitolo 7

Matrice di trasferimento

Data un'equazione differenziale lineare di ordine $n \geq 1$, a coefficienti costanti, è noto che se il termine forzante è di tipo sinusoidale, allora esiste almeno una soluzione particolare di tipo sinusoidale; se in aggiunta la posizione d'equilibrio del sistema non forzato è asintoticamente stabile, tale soluzione particolare rappresenta il comportamento a regime e quindi riveste un ruolo di speciale importanza. Nel “passaggio” attraverso il sistema, la frequenza di un segnale sinusoidale rimane invariata; vengono invece alterate fase e ampiezza.

Uno dei problemi classici, tra quelli che possiamo collocare alle origini della Teoria dei sistemi, consiste nel trovare una maniera semplice di determinare i parametri del sistema e del segnale in ingresso in modo che il segnale in uscita abbia ampiezza e fase prescritte. Questo tipo di problema va sotto il nome di *Analisi della risposta in frequenza*.

Ovviamente, si può aver ragione di questo problema passando attraverso la risoluzione esplicita dell'equazione differenziale, ma esiste un approccio più diretto e di più semplice applicazione che fa uso della trasformata di Laplace.

7.1 Analisi della risposta in frequenza

Consideriamo un modello SISO definito attraverso un'equazione differenziale ordinaria a coefficienti costanti lineare di ordine n

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = u(t) \quad (7.1)$$

per la quale si assegnano le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} . \quad (7.2)$$

La funzione $u(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, che supponiamo continua a tratti e a crescita esponenziale, rappresenta l'ingresso, la $x(t) : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ la variabile osservata. Alternativamente, la (7.1) si può scrivere sotto la forma di sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u(t) \\ y = x_1 . \end{cases} \quad (7.3)$$

Si noti che il sistema (7.3) è completamente controllabile e completamente osservabile. Supponiamo che l'equazione caratteristica

$$p_c(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

abbia tutte le radici con parte reale negativa, di modo che il sistema non forzato sia asintoticamente stabile. Applicando la trasformata di Laplace \mathcal{L} a entrambi i membri di (7.1) e tenendo conto delle condizioni (7.2) si ottiene, procedendo come nella Sezione C.3.1,

$$X(s) = \frac{P_0(s)}{p_c(s)} + \frac{U(s)}{p_c(s)} \quad (7.4)$$

dove il grado di P_0 è minore del grado di p_c . In particolare, se

$$u(t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t \quad (7.5)$$

si ha, per la funzione di uscita,

$$X(s) = \frac{P_0(s)}{p_c(s)} + \frac{1}{p_c(s)} \frac{p_1 s + p_2 \omega}{s^2 + \omega^2} .$$

Poiché, come abbiamo supposto, tutte le radici dell'equazione $p_c(\lambda) = 0$ si trovano nel semipiano negativo del piano complesso, si avrà $p_c(i\omega) \neq 0$; di conseguenza $p_c(s)$ non è divisibile per $s^2 + \omega^2$. Possiamo fattorizzare il secondo membro come

$$X(s) = \frac{P_0(s)}{p_c(s)} + \frac{P(s)}{p_c(s)} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}$$

dove $P(s)$ è un polinomio, e α, β costanti tali che

$$P(s)s^2 + \alpha s p_c(s) + P(s)\omega^2 + \beta p_c(s) = p_1 s + p_2 \omega . \quad (7.6)$$

Quest'ultima mostra in particolare che $\deg P < \deg p_c$. Le antitrasformate delle due funzioni razionali $P_0(s)/p_c(s)$ e $P(s)/p_c(s)$ sono costituite dunque dalla somma di termini del tipo $q_1(t)e^{\mu t} \cos \omega t$ e $q_2(t)e^{\mu t} \sin \omega t$ dove $q_1(t), q_2(t)$ sono polinomi e $\mu < 0$. Il contributo di questi due termini è dunque destinato ad esaurirsi nel "transitorio", e la risposta "a regime" dipende essenzialmente dal terzo addendo $(\alpha s + \beta)/(s^2 + \omega^2)$, la cui antitrasformata è data da

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right] = \alpha \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t = k \sin(\omega t + \theta)$$

dove si è posto $\alpha = k \sin \theta$ e $\beta = k\omega \cos \theta$, ovvero

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} \quad \text{e} \quad \theta = \arctan \frac{\alpha\omega}{\beta} .$$

Si ritrova così, per questa via, una conclusione ben nota, e cioè che la risposta a regime relativa ad un segnale sinusoidale del tipo (7.5) è ancora un segnale sinusoidale della stessa frequenza, ma la cui ampiezza k e il cui sfasamento θ rispetto al segnale in ingresso dipendono dalla frequenza stessa. Ricordiamo che il termine $P_0(s)/p_c(s)$ rappresenta la soluzione del sistema non forzato corrispondente alle stesse condizioni iniziali. Il termine $P(s)/p_c(s)$ ha quindi la funzione di compensare la differenza tra le condizioni iniziali assegnate, e le condizioni iniziali (in generale, diverse) cui corrisponde la soluzione a regime.

Vediamo infine come si possono calcolare α e β , e quindi k e θ . Mediante la sostituzione $s = i\omega$, dalla (7.6) si ricava

$$\beta + i\alpha\omega = \frac{\omega}{p_c(i\omega)}(p_2 + ip_1) ,$$

da cui $\beta = \operatorname{Re} [\frac{\omega}{p_c(i\omega)}(p_2 + ip_1)]$ e $\alpha = \operatorname{Im} [\frac{\omega}{p_c(i\omega)}(p_2 + ip_1)]$.

7.2 La matrice di trasferimento

Consideriamo adesso un sistema dinamico lineare, finito-dimensionale e invariante nel tempo, rappresentato in generale da equazioni della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx , \end{cases} \quad (7.7)$$

dove $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ e $y \in \mathbf{R}^p$, con n , m e p interi positivi qualunque. Naturalmente, l'uscita relativa allo stato iniziale x_0 si può ottenere, in funzione di $u(\cdot)$, ricorrendo alla formula della variazione delle costanti:

$$x(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + Ce^{tA}x_0 \quad e \quad y(t) = Cx(t) . \quad (7.8)$$

Vogliamo ora dare una rappresentazione della funzione di uscita del sistema (7.7) alternativa alla (7.8), facendo uso della trasformata di Laplace. A tal fine, supponiamo che $u(\cdot)$ e quindi anche $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ siano definite solo per $t \geq 0$ (equivalentemente, possiamo convenire che $u(\cdot)$, $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$ siano nulle per $t < 0$). Conveniamo di restringere l'insieme degli ingressi ammissibili alle funzioni di classe $\tilde{\mathcal{C}}(0, +\infty, \mathbf{R}^m)$ a crescita esponenziale. Con tale restrizione, in virtù della (7.8), anche $x(t)$ e $y(t)$ risulteranno a crescita esponenziale.

Si ponga $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Applicando alla prima equazione del sistema (7.7) la trasformata di Laplace e procedendo formalmente come nella Sezione C.3.2, si ha

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x_0 = \mathcal{L}[Ax(t) + Bu(t)] = AX(s) + BU(s)$$

da cui, posto

$$T(s) = C(sI - A)^{-1}B , \quad (7.9)$$

si ha

$$Y(s) = CX(s) = T(s)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0 \quad (7.10)$$

per ogni $s \in \mathbf{C}$ per cui $(sI - A)^{-1}$ esiste.

Osservazione 7.1 Ricapitolando, abbiamo a disposizione tre possibili modi di descrivere il comportamento di un sistema fisico: attraverso l'operatore ingresso-uscita definito nell'Introduzione, attraverso la matrice (7.9) e, qualora siano note, attraverso le sue equazioni di stato. Nella letteratura, la forma (7.7) (o, equivalentemente, la terna di matrici (A, B, C) che la definisce) viene anche detta una descrizione del sistema nel *dominio del tempo*. Quando invece si fa uso della (7.9), si dice che il sistema è rappresentato nel *dominio della frequenza*. In linea di principio, dovremmo aspettarci che ciascuna descrizione sia in grado di fornire tutte le informazioni rilevanti che riguardano il comportamento del sistema. In una certa misura, questa affermazione è vera, ma il suo senso deve essere ben precisato.

■

La matrice $T(s)$ definita dalla (7.9) si chiama *matrice di trasferimento*. Si noti che $T(s)$ non dipende dalle condizioni iniziali e quindi, per calcolarla, è lecito assumere $x_0 = 0$.

Per i sistemi SISO, per cui $p = m = 1$, la matrice di trasferimento si riduce ad un unico elemento. Si parla allora, più propriamente, di *funzione di trasferimento*. Confrontando la (7.10) con la (7.4), si ricava in particolare che, nel caso del sistema (7.3), $T(s) = 1/p_c(s)$.

Esempio 7.1 Il sistema (7.3) modella una catena di integratori. Come già osservato, si tratta di un sistema SISO completamente controllabile e completamente osservabile. Più in generale, consideriamo un sistema SISO costituito dall'equazione (7.1) alla quale associamo la funzione di osservazione

$$y = c_0x + c_1x' + \dots + c_kx^{(k)}$$

con $k < n$. Il sistema è ancora completamente controllabile, ma potrebbe essere non completamente osservabile per certi valori di c_0, c_1, \dots, c_k . Con semplici calcoli si trova

$$T(s) = \frac{c_0 + c_1s + \dots + c_k s^k}{p_c(s)} .$$

Si noti che il polinomio a numeratore e il polinomio a denominatore potrebbero avere dei fattori comuni.

■

Esempio 7.2 Si consideri il sistema SISO definito dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 3x_2 + u \\ y = x_1 - x_2 . \end{cases}$$

La parte differenziale del sistema equivale all'equazione scalare $x'' - 3x' + 2x = u$. La funzione di trasferimento è

$$T(s) = \frac{1-s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1-s}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{2-s} .$$

Gli autovalori sono 1 e 2, mentre si ha un unico polo uguale a 2. Questo esempio mette in evidenza il fatto che nel calcolo della funzione di trasferimento, può effettivamente intervenire una cancellazione tra fattori uguali che compaiono al numeratore e al denominatore. Osserviamo che il

sistema in oggetto è completamente controllabile ma non completamente osservabile. Osserviamo anche che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - u \\ y = x \end{cases}$$

ha la stessa funzione di trasferimento del sistema dato. ■

Esempio 7.3 Consideriamo il sistema SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ y = x_1 + x_2 . \end{cases}$$

Scritto il sistema in forma matriciale, si ottiene subito

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s - 1 \end{pmatrix} .$$

Questa matrice è invertibile per $s \notin \{0, 1\}$, e si ha

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s-1)} \begin{pmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} .$$

Con un ulteriore semplice calcolo si trova infine $T(s) = \frac{1}{s}$. Questa volta, il sistema dato è completamente osservabile, ma non completamente controllabile. La matrice di trasferimento è la stessa del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ y = x_1 . \end{cases}$$

■

Negli esempi precedenti, i sistemi considerati erano tutti di tipo SISO. Nei casi di maggiore generalità, è sempre possibile, almeno in linea di principio, ottenere un'espressione esplicita della matrice di trasferimento facendo uso della (7.9): la difficoltà principale consiste, naturalmente, nel calcolo dell'inversa¹ della matrice $(sI - A)$. Per i nostri scopi, è sufficiente la proposizione seguente².

Proposizione 7.1 *Sia s un qualunque numero complesso che non sia un autovalore di A . Allora, la matrice $(sI - A)$ è invertibile, e si ha*

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{p_c(s)} M(s) \tag{7.11}$$

dove $p_c(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$ è, a meno del segno, il polinomio caratteristico di A e $M(s)$ è una matrice i cui elementi sono polinomi di grado non superiore a $n - 1$.

¹L'inversa della matrice $(sI - A)$ è nota come *matrice risolvante* di A .

²Più precisamente, si può dimostrare la formula:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{p_c(s)} [(s^{n-1} + a_1 s^{n-2} \dots + a_{n-1})I + (s^{n-2} + a_1 s^{n-3} + \dots + a_{n-2})A + \dots + (s + a_1)A^{n-2} + A^{n-1}]$$

(si veda per esempio H.H. Rosenbrock, *State-space and multivariable Theory*, Nelson 1970, pag. 12.)

Dimostrazione Gli autovalori di A sono, per definizione tutti e soli i numeri complessi per cui $A - sI$ non è invertibile, ed è ovvio che $A - sI$ è invertibile se e solo se lo è $sI - A$. La (7.11) si deduce poi facilmente ricordando la ben nota costruzione dell'inversa basata sul calcolo dei complementi algebrici di una matrice. ■

Dato in generale un sistema della forma (7.7), passiamo ora in rassegna alcune importanti proprietà della sua matrice di trasferimento $T(s)$.

Proprietà 1

Ciascun elemento di $T(s)$ è una funzione razionale propria della variabile $s \in \mathbf{C}$, il cui denominatore è un polinomio di grado non superiore ad n .

La Proprietà 1 è una immediata conseguenza della Proposizione 7.1.

Proprietà 2

Sia σ_0 il massimo delle parti reali degli autovalori di A . Posto $W(\tau) = Ce^{\tau A}B$ si ha

$$T(s) = \mathcal{L}[W(t)] \quad (7.12)$$

per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $s > \sigma_0$.

La (7.12) segue facilmente dalla (C.32), Proposizione C.4. La matrice $W(t)$, già introdotta nel Capitolo 5, si chiama matrice della risposta impulsiva per la seguente ragione. Sia $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ il j -esimo vettore della base canonica di \mathbf{R}^m . Se, con $x_0 = 0$, applichiamo l'ingresso impulsivo $\delta(t)e_j$, dove $\delta(t)$ rappresenta la funzione di Dirac centrata nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= C \int_0^t e^{(t-\tau)A} B u(\tau) d\tau = C \int_0^t e^{(t-\tau)A} B \delta(\tau) e_j d\tau = \\ &= C e^{tA} B e_j = W(t) e_j = j\text{-esima colonna di } W(t). \end{aligned}$$

Dunque le colonne di $W(t)$ sono esattamente le uscite del sistema corrispondenti a $x_0 = 0$ e agli ingressi $\delta(t)e_1, \dots, \delta(t)e_m$.

La Proprietà 1 si sarebbe potuta dedurre anche dalla Proprietà 2 tenendo presente le regole di calcolo della trasformata di Laplace. Infatti, gli elementi di e^{tA} sono somme di termini del tipo $q_1(t)e^{\mu t} \cos \omega t$ e $q_2(t)e^{\mu t} \sin \omega t$, dove $q_1(t), q_2(t)$ sono polinomi e $\lambda = \mu + i\omega$ è un autovalore di A .

Si noti che $T(s)$ coincide con la trasformata di Laplace di $W(t)$ solo per $s > \sigma_0$ ma per suo proprio conto, in quanto funzione razionale, è definita su tutto il piano complesso, con l'esclusione di un numero finito di punti.

Osservazione 7.2 Applicando la trasformata di Laplace alla (7.8) e ricordando ancora la Proposizione C.4, si ritrova per altra via la (7.10), ma solo per $s > \sigma_0$. ■

Definizione 7.1 *Supponiamo che ciascun elemento di $T(s)$ sia stato ridotto ai minimi termini. I valori di s per cui almeno uno degli elementi di $T(s)$ non è definito si dicono poli del sistema.*

Proprietà 3

Sia

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases} \quad (7.13)$$

un sistema linearmente equivalente a (7.7) (nel senso specificato nella Sezione 3.1.2). Allora, (7.7) e (7.13) hanno la stessa matrice di trasferimento.

Infatti, se (7.7) e (7.13) sono linearmente equivalenti, vuol dire che esiste una matrice non singolare P tale che $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}B$, e $\tilde{C} = CP$. Per calcolare la matrice di trasferimento del sistema (7.13) applichiamo la solita procedura, considerando prima la parte differenziale. È lecito, come sappiamo, supporre che il sistema sia inizializzato a zero. Si ha

$$s\tilde{X}(s) = \tilde{A}\tilde{X}(s) + \tilde{B}U(s) = P^{-1}AP\tilde{X}(s) + P^{-1}BU(s)$$

da cui

$$(sI - P^{-1}AP)\tilde{X}(s) = P^{-1}(sI - A)P\tilde{X}(s) = P^{-1}BU(s) .$$

Moltiplicando a sinistra per P si ricava dunque

$$\tilde{X}(s) = P^{-1}(sI - A)^{-1}BU(s) .$$

Infine, si ottiene

$$Y(s) = \tilde{C}\tilde{X}(s) = CPP^{-1}(sI - A)^{-1}BU(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) .$$

Proprietà 4

Se s_0 è un polo di $T(s)$ di molteplicità μ , allora s_0 è un autovalore di A di molteplicità algebrica maggiore o uguale a μ .

La Proprietà 4 discende direttamente dalla Proposizione 7.1. Come abbiamo visto negli Esempi 5.2 e 5.3, può invece accadere che A abbia autovalori s_0 che non sono poli di $T(s)$.

Proprietà 5

$T(s)$ dipende solo dalla parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema (7.7).

Per giustificare quest'ultima affermazione, ricordiamo la decomposizione del Paragrafo 3.6, cui il sistema può essere ricondotto per mezzo di un'equivalenza lineare. Ricordiamo anche che se la matrice A ha una struttura triangolare a blocchi, l'esponenziale e^{tA} presenta una struttura analoga. Si calcola allora facilmente che $W(t) = Ce^{tA}B = C_2e^{tA_{22}}B_2$ (le notazioni sono quelle del Paragrafo 3.6).

Osservazione 7.3 Dalle Proprietà 4 e 5 si evince che se s_0 è un polo di $T(s)$ di molteplicità μ , allora s_0 è un autovalore di molteplicità algebrica maggiore o uguale a μ della matrice A_{22} della parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema.

■

7.3 Il problema della realizzazione

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come si determina la matrice di trasferimento di un sistema, a partire dalla rappresentazione (7.7). Occupiamoci adesso del problema inverso. Chiediamoci cioè come si possa risalire ad una rappresentazione (7.7), quando il sistema venga assegnato per mezzo della sua matrice di trasferimento.

Definizione 7.2 *Sia $T(s)$ una matrice con p righe ed m colonne, i cui elementi sono funzioni razionali proprie della variabile $s \in \mathbf{C}$. Una terna di matrici (A, B, C) di dimensioni rispettivamente $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ si dice una realizzazione n -dimensionale di $T(s)$ se $T(s)$ è la funzione di trasferimento del sistema (7.7) definito per mezzo di tali matrici A, B, C .*

Ripensando a quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente, ci si rende subito conto delle difficoltà insite nel problema di costruire una realizzazione. Tanto per cominciare, è intuitivo che assegnando un sistema per mezzo delle equazioni (7.7), le quali fanno esplicito uso delle variabili di stato, si dà un'informazione più ricca che non assegnando lo stesso sistema per mezzo della matrice di trasferimento, la quale fa passare direttamente dalle variabili di ingresso a quelle di uscita.

Ricordiamo inoltre gli Esempi 5.2 e 5.3; essi mostrano che sistemi con diversa rappresentazione nel dominio del tempo possono avere la stessa funzione di trasferimento. Ciò significa che in generale, il problema della realizzazione non ha soluzione unica. D'altra parte, ciò non è sorprendente, se si tiene conto della Proprietà 4 secondo la quale la matrice di trasferimento dipende soltanto dalla parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema. Gli Esempi 5.2 e 5.3 suggeriscono anche come la presenza di parti non completamente controllabili o non completamente osservabili possa dar luogo alla cancellazione di fattori comuni presenti al numeratore e al denominatore di qualche elemento della matrice di trasferimento e che, di conseguenza, in queste condizioni, possano essere resi invisibili all'osservatore esterno certe modalità di evoluzione dello stato.

Per distinguere tra diverse realizzazioni di una stessa $T(s)$, sono utili le seguenti definizioni.

Definizione 7.3 *Sia $T(s)$ una matrice con p righe ed m colonne, i cui elementi sono funzioni razionali proprie della variabile $s \in \mathbf{C}$, che si suppongono ridotte ai minimi termini.*

Una realizzazione (A, B, C) di $T(s)$ si dice minima se il numero intero n (dimensione dello spazio degli stati) è il più piccolo possibile.

Una realizzazione (A, B, C) si dice canonica se il sistema (7.7) definito per mezzo di A, B, C è completamente controllabile e completamente osservabile.

Teorema 7.1 *Sia $T(s)$ una matrice con p righe ed m colonne, i cui elementi sono funzioni razionali proprie della variabile $s \in \mathbf{C}$, che si suppongono ridotte ai minimi termini. Una realizzazione di $T(s)$ è minima se e solo se è canonica.*

Dimostrazione Se la realizzazione (A, B, C) è minima, allora deve essere completamente controllabile e completamente osservabile. Questo è facile da dimostrare. Infatti, in caso contrario, per la Proprietà 5 la parte completamente controllabile e completamente osservabile del sistema definito dalla terna (A, B, C) costituirebbe un'altra realizzazione di $T(s)$, con dimensione dello spazio degli stati strettamente minore.

Prima di provare il viceversa, ricordiamo che un sistema della forma (7.7) è:

- (1) completamente controllabile se e solo se la matrice

$$\Gamma(T) = \int_0^T e^{-\sigma A} B B^t e^{-\sigma A^t} d\sigma$$

è non singolare per qualche (e quindi per ogni) $T > 0$;

(2) completamente osservabile se e solo se la matrice

$$E(T) = \int_0^T e^{\sigma A^t} C^t C e^{\sigma A} d\sigma$$

è non singolare per qualche (e quindi per ogni) $T > 0$.

Procediamo per assurdo, supponendo che esista un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ y = \tilde{C}x \end{cases}$$

dove \tilde{A} è una matrice quadrata di dimensioni $\nu \times \nu$ con $\nu < n$, e tale che

$$T(s) = \mathcal{L}[C e^{tA} B] = \mathcal{L}[\tilde{C} e^{t\tilde{A}} \tilde{B}] .$$

Per l'univocità di \mathcal{L}^{-1} , si dovrà avere $C e^{tA} B = \tilde{C} e^{t\tilde{A}} \tilde{B}$ per ogni $t \geq 0$, e quindi anche per ogni $t \in \mathbf{R}$. Siano ora τ, σ due numeri reali qualunque. Si ha:

$$C e^{\tau A} e^{-\sigma A} B = C e^{(\tau-\sigma)A} B = \tilde{C} e^{(\tau-\sigma)\tilde{A}} \tilde{B} = \tilde{C} e^{\tau\tilde{A}} e^{-\sigma\tilde{A}} \tilde{B} .$$

Moltiplicando a sinistra per $e^{\tau A^t} C^t$ e a destra per $B^t e^{-\sigma A^t}$ si ottiene

$$e^{\tau A^t} C^t C e^{\tau A} e^{-\sigma A} B B^t e^{-\sigma A^t} = e^{\tau A^t} C^t \tilde{C} e^{\tau\tilde{A}} e^{-\sigma\tilde{A}} \tilde{B} B^t e^{-\sigma A^t}$$

qualunque siano τ e σ . Integriamo adesso entrambi membri sul quadrato $0 \leq \tau \leq T$, $0 \leq \sigma \leq T$. Possiamo scrivere il risultato come

$$E(T) \cdot \Gamma(T) = \tilde{E}(T) \cdot \tilde{\Gamma}(T) \quad (7.14)$$

dove $\tilde{E}(T) = \int_0^T e^{\tau A^t} C^t \tilde{C} e^{\tau\tilde{A}} d\tau$ e $\tilde{\Gamma}(T) = \int_0^T e^{-\sigma\tilde{A}} \tilde{B} B^t e^{-\sigma A^t} d\sigma$.

La matrice $E(T) \cdot \Gamma(T)$ è per ipotesi il prodotto di due matrici non singolari, quindi deve avere rango massimo, cioè uguale ad n . D'altra parte, la matrice $\tilde{E}(T)$ ha solo ν colonne, così come la matrice $\tilde{\Gamma}(T)$ ha solo ν righe. Quindi il loro prodotto avrà, al massimo, rango $\nu < n$. L'identità (7.14) è quindi assurda, e l'asserto è provato. ■

Il problema di determinare una realizzazione non ha soluzione unica neppure se ci si limita alle realizzazioni minime. La ragione si spiega facilmente in virtù della Proprietà 5: infatti, qualunque sia il procedimento scelto per costruire una realizzazione, un passo essenziale dovrà necessariamente consistere nell'individuazione di uno spazio vettoriale che funga da spazio degli stati: per poter scrivere la (7.7) bisognerà poi scegliere un sistema di coordinate. Chiaramente, tale scelta è del tutto arbitraria: a sistemi di coordinate diversi corrisponderanno realizzazioni formalmente diverse (sebbene della stessa dimensione). Vale tuttavia il seguente risultato, per la cui dimostrazione si rimanda a uno dei seguenti testi:

S. Barnett, *Introduction to Mathematical Control Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1975

R.W. Brockett, *Finite dimensional linear systems*, New York, Wiley, 1970

E.B. Lee, L. Markus *Foundations of optimal control theory* New York, Wiley, 1967.

Proposizione 7.2 *Se (A, B, C) (con dimensione dello spazio degli stati uguale ad n) e $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ (con dimensione dello spazio degli stati uguale ad \tilde{n}) sono due realizzazioni canoniche di una stessa matrice di trasferimento $T(s)$, allora $n = \tilde{n}$, e inoltre i sistemi definiti dalle terne (A, B, C) e $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ sono linearmente equivalenti.*

I risultati enunciati fino a questo momento danno informazioni di tipo qualitativo, ma non abbiamo ancora detto come si possano effettivamente costruire realizzazioni di una matrice $T(s)$ con p righe e m colonne, i cui elementi siano funzioni razionali di una variabile complessa. Il problema ha una facile soluzione nel caso in cui $m = p = 1$. Scriviamo $T(s)$ come

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi privi di fattori comuni, di grado rispettivamente k e n , con $k < n$. Sia più precisamente

$$T(s) = \frac{c_0 + c_1s + \dots + c_k s^k}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} . \quad (7.15)$$

Si verifica facilmente che una realizzazione di $T(s)$ è data dal sistema SISO

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u(t) \\ y = c_0 x_1 + c_1 x_2 + \dots + c_k x_k . \end{cases} \quad (7.16)$$

Proposizione 7.3 *Nelle condizioni sopra esposte, il sistema (7.16) rappresenta una realizzazione minima della funzione (7.15).*

Dimostrazione La matrice A della realizzazione (7.16) è in forma compagna e la matrice B si riduce alla colonna

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

La verifica della completa controllabilità è quindi immediata. Se la realizzazione (7.16) non fosse anche completamente osservabile, passando alla parte osservabile si otterrebbe una realizzazione con dimensione dello spazio degli stati $\tilde{n} < n$. Per la Proprietà 1, il grado del polinomio $D(s)$ dovrebbe essere non superiore a \tilde{n} . Questo è assurdo, perché avevamo supposto $T(s)$ ridotta ai minimi termini. ■

Esempio 7.4 Consideriamo l'equazione del secondo ordine

$$\begin{cases} x'' + a_1 x' + a_2 x = u(t) \\ y = x' \end{cases}$$

equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + u(t) \\ y = x_2 . \end{cases}$$

Il sistema è completamente controllabile qualunque siano $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, ed è completamente osservabile se e solo se $a_2 \neq 0$. Supponendo per semplicità che inizialmente il sistema si trovi nella posizione di riposo $x_1 = x_2 = 0$, applicando la trasformata di Laplace si trova

$$Y(s) = \frac{sU(s)}{s^2 + a_1s + a_2} .$$

Quest'ultima si riduce a

$$Y(s) = \frac{U(s)}{s + a_1}$$

se $a_2 = 0$. In altre parole, se il sistema non è completamente osservabile allora può essere "realizzato" come un sistema uni-dimensionale. ■

Esempio 7.5 Consideriamo un sistema per cui l'insieme degli ingressi ammissibili è ristretto alle funzioni $u(t)$ di classe C^k sull'intervallo $[0, +\infty)$. L'evoluzione del sistema sia governata da un'equazione lineare di ordine n

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx = c_0u^{(k)} + \dots + c_ku \quad (7.17)$$

dove $a_1, \dots, a_n, c_0, \dots, c_k$ sono numeri reali, con $n > k$. Inoltre, si assume che l'uscita osservabile coincida con lo stato x . Tale modello, proprio a causa della presenza delle derivate dell'ingresso, a prima vista non sembra rientrare nello schema (7.7).

Applicando l'operatore \mathcal{L} alla (7.17) si ottiene, a condizione che $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$ e che anche $u(0) = u'(0) = \dots = u^{(k)}(0) = 0$,

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)X(s) = (c_0s^k + \dots + c_k)U(s)$$

cioè

$$Y(s) = X(s) = \frac{c_0s^k + \dots + c_k}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}U(s)$$

dove, in accordo con l'ipotesi che $m = p = 1$, la matrice di trasferimento si riduce ad una funzione scalare

$$T(s) = \frac{c_0s^k + \dots + c_k}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n} . \quad (7.18)$$

Si tratta di una funzione razionale propria (eventualmente non ridotta ai minimi termini) il cui denominatore coincide col polinomio caratteristico $p_c(s)$ dell'equazione omogenea associata alla (7.17).

Il sistema (7.17) può quindi essere “realizzato” mediante un’equazione del tipo (7.16). Nella modellizzazione dei sistemi fisici, casi in cui bisogna far comparire esplicitamente la derivata dell’ingresso sono abbastanza frequenti. ■

Per i sistemi MIMO, il problema della costruzione effettiva di una realizzazione è più complesso. Si può infatti pensare di generalizzare la costruzione appena descritta per il caso SISO, ma il sistema che si ottiene potrebbe risultare questa volta non completamente osservabile. Se si vuole una realizzazione minima, sarà quindi necessario effettuare poi un cambiamento di coordinate in modo da identificare la parte completamente controllabile e completamente osservabile. Per maggiori dettagli, rimandiamo ai testi già citati.

Terminiamo questo paragrafo con una proposizione di cui avremo bisogno tra breve; essa costituisce un inverso parziale della Proprietà 4.

Proposizione 7.4 *Sia dato un sistema (7.7), con $m = p = 1$ (sistema SISO). Se il sistema è completamente controllabile e completamente osservabile, e se λ è un autovalore di A di molteplicità algebrica μ , allora λ è un polo di $T(s)$ di molteplicità μ .*

Dimostrazione Per la Proprietà 1, la funzione di trasferimento, una volta ridotta ai minimi termini, si presenta come

$$T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

e il grado del polinomio $D(s)$ è non superiore a n . Se il grado di $D(s)$ fosse strettamente minore di n , allora $T(s)$ ammetterebbe realizzazioni di dimensione minore (strettamente) di n , e ciò contraddirebbe l’ipotesi di canonicità. Dunque il grado di $D(s)$ deve essere esattamente uguale a n . Ne segue che $T(s)$ ha esattamente n poli (contando le eventuali molteplicità). Indichiamo con s_1, \dots, s_k i poli distinti di $T(s)$, e con μ_1, \dots, μ_k le loro molteplicità, cosicché $\mu_1 + \dots + \mu_k = n$. Per la Proprietà 4, ciascun s_i è un autovalore di A , di molteplicità algebrica maggiore o uguale a μ_i . Ma gli autovalori di A non possono essere (sempre contando le molteplicità) più di n . Dunque, se ci fossero autovalori di A diversi da s_1, \dots, s_k oppure se qualcuno degli s_i avesse, in quanto autovalore di A , molteplicità strettamente maggiore di μ_i , si arriverebbe ad un assurdo. ■

7.4 Diagramma di Nyquist

Continuando a limitare l’esposizione ai sistemi SISO, illustriamo adesso un criterio di natura grafica che si applica alla funzione di trasferimento e che permette di riconoscere quando un dato sistema ha la proprietà di stabilità BIBO.

Osserviamo preliminarmente che, in virtù della Proposizione 7.4 e della Proposizione 5.5, per un sistema del tipo SISO completamente controllabile e completamente osservabile le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i poli della funzione di trasferimento hanno tutti parte reale negativa
- il sistema è uniformemente BIBO-stabile.

Osservazione 7.4 Senza l'ipotesi che il sistema sia completamente controllabile e completamente osservabile, l'equivalenza tra queste asserzioni potrebbe venire a cadere. Per esempio, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

non è uniformemente BIBO-stabile, ma la sua funzione di trasferimento $T(s) = 1/(s+1)$ ha un unico polo, negativo.

■

Ricordiamo poi che se $T(s)$ è una funzione razionale, per *zero* di $T(s)$ si intende ogni numero $s_0 \in \mathbf{C}$ tale che $T(s_0) = 0$. Se $T(s)$ è la funzione di trasferimento di un sistema, gli zeri di $T(s)$ hanno un significato fisico, come illustra l'esempio seguente.

Esempio 7.6 Consideriamo il sistema definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x'' + a_1x' + a_2x = u(t) \\ y = cx - x' \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$ e $x'(0) = x'_0$. Supponiamo che c sia stato scelto in modo che $c^2 + a_1c + a_2 \neq 0$. Si verifica facilmente che per un tale c , il sistema risulta, oltre che completamente controllabile, anche completamente osservabile. Applicando la trasformata di Laplace alla parte differenziale e operando nel solito modo, si ottiene

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_2}U(s) + \frac{sx_0 + [a_1x_0 + x'_0]}{s^2 + a_1s + a_2}.$$

Tenendo poi conto della funzione di osservazione, si ha

$$Y(s) = cX(s) - [sX(s) - x_0] = \frac{c-s}{s^2 + a_1s + a_2}U(s) + \frac{(c-s)[sx_0 + (a_1x_0 + x'_0)]}{s^2 + a_1s + a_2} + x_0. \quad (7.19)$$

Di qui si deduce la forma della funzione di trasferimento

$$T(s) = \frac{c-s}{s^2 + a_1s + a_2}.$$

Se scegliamo $u(t) = e^{ct}$, si ha $U(s) = 1/(s-c)$; nel primo addendo della (7.19) si ha una semplificazione, ed eseguendo i calcoli si trova

$$Y(s) = \frac{(cx_0 - x'_0)s + (1 + a_2x_0 + ca_1x_0 + cx'_0)}{s^2 + a_1s + a_2}.$$

Poiché $c^2 + a_1c + a_2 \neq 0$, è lecito prendere $x'_0 = cx_0$ e $x_0 = -1/(c^2 + a_1c + a_2)$. Il risultato finale di queste scelte è che $Y(s) = 0$.

In conclusione, abbiamo mostrato che se c è uno zero della funzione di trasferimento, allora esiste una funzione di ingresso e uno stato iniziale del sistema in corrispondenza dei quali l'uscita è identicamente nulla.

Questa conclusione vale in generale, anche se la sua verifica è tutt'altro che banale. Dal punto di vista pratico, questa conclusione è importante. Essa suggerisce che, almeno in linea di principio, gli zeri di un sistema possono essere determinati sperimentalmente, sottoponendo il sistema a ingressi di tipo particolare e facendo variare i parametri e le condizioni iniziali finché non si ottenga uscita nulla.

■

Sia ora $T(s)$ una funzione razionale propria della variabile $s \in \mathbf{C}$. Indichiamo con $w = T(s) \in \mathbf{C}$ la variabile dipendente. I numeri complessi s possono essere immaginati come punti di un piano, nel quale sia stato fissato un sistema di riferimento cartesiano di coordinate $(\operatorname{Re} s, \operatorname{Im} s)$. Analogamente, i numeri complessi w saranno immaginati in un piano riferito alle coordinate $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$.

Una funzione continua $s = \gamma(t)$ da \mathbf{R} in \mathbf{C} può quindi essere interpretata come una curva piana, così come la sua immagine attraverso T , $w = T(\gamma(t)) = \delta(t)$.

Se $s = \gamma(t)$ è semplice e chiusa, il suo sostegno circonda una regione (aperta) limitata, che indicheremo con $\Gamma \subset \mathbf{C}$. Naturalmente, se $s = \gamma(t)$ è semplice e chiusa, anche $\delta(t)$ sarà chiusa, ma non è detto che sia semplice.

Esempio 7.7 Sia $T(s) = 1/(s-1)(s-2)$. La Figura 7.1 mostra la curva δ immagine secondo T della circonferenza

$$\begin{cases} \operatorname{Re} s = 2 + 2 \cos t \\ \operatorname{Im} s = 2 \sin t \end{cases}$$

■

Esempio 7.8 Sia $T(s) = 1/(s-1)^2$. Il tracciato della curva δ immagine secondo T della circonferenza

$$\begin{cases} \operatorname{Re} s = 1 + \cos t \\ \operatorname{Im} s = \sin t \end{cases}$$

(Figura 7.2) dà l'illusione di una curva semplice chiusa: in realtà, tale curva viene percorsa due volte.

■

Sia data la curva $s = \gamma(t)$ semplice e chiusa. Indichiamo con Z il numero degli zeri di $T(s)$ appartenenti a Γ e con P il numero dei poli di $T(s)$ appartenenti a Γ . Supponiamo inoltre che sul sostegno di γ (cioè sul contorno di Γ) non vi siano né zeri né poli di $T(s)$. Il seguente enunciato è un risultato classico della teoria delle funzioni complesse di variabile complessa.

Principio dell'argomento *Sia N il numero di volte che la curva $\delta(t)$ gira attorno all'origine in senso antiorario, mentre il sostegno di γ viene percorso una volta in senso antiorario. Allora, $N = Z - P$.*

Definizione 7.4 *Il Diagramma di Nyquist di una funzione razionale propria $T(s)$ è il sostegno della curva $w = T(\gamma(t)) = \delta(t)$, quando $\gamma(t) = -it$ ($t \in \mathbf{R}$).*

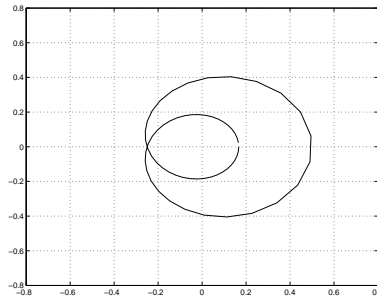


Figura 7.1: Curva δ dell'Esempio 7.7.

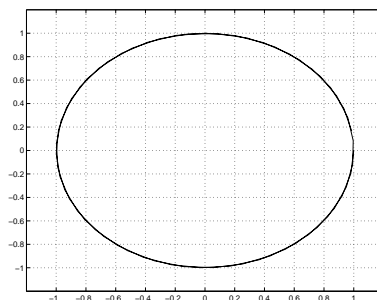


Figura 7.2: Curva δ dell'Esempio 7.8.

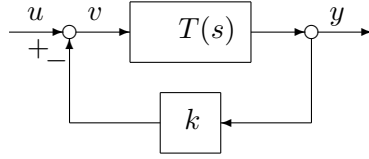
La curva $\gamma(t) = -it$ da cui viene generato il diagramma di Nyquist non è chiusa, ma si può pensare di “chiuderla” aggiungendo il punto all'infinito di \mathbf{C} o, equivalentemente, il semicerchio di raggio infinito che “delimita” il semipiano destro di \mathbf{C} . L'immagine δ di γ fatta attraverso T appare comunque come una curva chiusa: infatti, essendo T propria, il punto all'infinito viene trasformato nell'origine. Si noti che, per costruzione, $\delta(t) = (\operatorname{Re} T(-it), \operatorname{Im} T(-it))$.

Sia $T(s)$ una funzione razionale propria per cui non vi sono né zeri né poli giacenti sull'asse immaginario. Tracciando il diagramma di Nyquist e supponendo di conoscere il numero Z , è ora possibile verificare se esistono o meno poli di $T(s)$ nel semipiano destro di \mathbf{C} (con un opportuno accorgimento, è possibile estendere questo criterio anche al caso in cui vi siano poli o zeri di $T(s)$ puramente immaginari).

7.5 Stabilizzabilità BIBO

Sempre con riferimento ad un sistema SISO, vediamo adesso come il criterio di Nyquist può essere utile nella determinazione di retroazioni statiche dell'uscita atte a rendere uniformemente BIBO-stabile un sistema dato.

Indicando, come al solito, con $u \in \mathbf{R}$ la variabile in ingresso e con $y \in \mathbf{R}$ la variabile in uscita, cominciamo a vedere come cambia la funzione di trasferimento quando all'ingresso esterno u viene sottratta una retroazione del tipo ky (il coefficiente k viene abitualmente chiamato *guadagno*; la scelta del segno “meno” è puramente convenzionale).



Sia $T(s)$ la funzione di trasferimento rappresentativa di un sistema dato, che supponiamo completamente controllabile e completamente osservabile. Poniamo $v = u - ky$. Facendo riferimento alla figura, si ha

$$Y(s) = T(s)V(s) = T(s)(U(s) - kY(s))$$

da cui

$$Y(s) + kT(s)Y(s) = T(s)U(s) .$$

Pertanto, per ogni $s \in C$ per cui $1 + kT(s) \neq 0$,

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{T(s)}{1 + kT(s)}U(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{T(s)}{\frac{1}{k} + T(s)}U(s)$$

avendo indicato con $G(s)$ la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

Supponiamo anche per semplicità che $G(s)$ non abbia nessun polo sull'asse immaginario, e introduciamo l'ulteriore notazione

$$H(s) = \frac{1}{k} + T(s) .$$

Il nostro scopo, che è quello di capire se una certa scelta del coefficiente k è tale da rendere uniformemente BIBO-stabile il sistema retroazionato, sarà raggiunto se riusciamo a far vedere che $G(s)$ non ha poli con parte reale positiva.

Lemma 7.1 *I poli di $G(s)$ coincidono con gli zeri di $H(s)$.*

Dimostrazione Scriviamo $T(s) = N(s)/D(s)$, dove $N(s)$ e $D(s)$ sono polinomi. Si ha

$$H(s) = \frac{1}{k} + \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + kN(s)}{kD(s)} .$$

Pertanto, s_0 è uno zero di $H(s)$ se e solo se $D(s_0) + kN(s_0) = 0$. D'altra parte

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot \frac{1}{1 + k \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{N(s)}{D(s) + kN(s)} .$$

Pertanto, s_0 è un polo di $G(s)$ se e solo se $D(s_0) + kN(s_0) = 0$.

■

Inoltre, è immediato osservare che i poli di $H(s)$ coincidono con i poli di $T(s)$. Il principio dell'argomento, applicato alla funzione razionale $H(s)$, ci dice quindi che:

numero di poli di G con parte reale positiva = numero di poli di T con parte reale positiva + N

dove N indica il numero di giri che la curva $H(-it)$ compie in senso antiorario attorno all'origine quando t varia da $-\infty$ a $+\infty$.

D'altra parte, è chiaro che $-N$ rappresenta il numero di giri che la curva $T(-it)$ compie in senso orario attorno al punto del piano complesso di coordinate $(-\frac{1}{k}, 0)$, quando t varia da $-\infty$ a $+\infty$.

Possiamo allora trarre la seguente conclusione.

Proposizione 7.5 *La retroazione statica dell'uscita $-ky$ stabilizza in senso BIBO il sistema definito dalla funzione di trasferimento $T(s)$ se il numero di giri che il diagramma di Nyquist di T compie in senso orario attorno al punto $(-\frac{1}{k}, 0)$, quando t varia da $-\infty$ a $+\infty$ è uguale al numero dei poli "instabili" del sistema dato.*

Nelle applicazioni pratiche, si tratterà il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento del sistema dato, e poi si andrà a vedere se esiste k che soddisfa la condizione richiesta.

Appendici

A. Richiami di algebra lineare

La Teoria dei sistemi di equazioni differenziali lineari, così come la Teoria dei sistemi di controllo lineari, si basa pesantemente sull'Algebra lineare. Riteniamo pertanto opportuno richiamare in questa appendice le nozioni e i risultati di Algebra lineare utilizzati in questo corso, e che per altro dovrebbero già essere noti allo studente.

A.1 Spazi vettoriali

Sia $K = \mathbf{R}$ oppure \mathbf{C} . Uno *spazio vettoriale* V su K è un insieme di elementi per i quali sono definite un'operazione di somma, che associa ad ogni coppia $v_1, v_2 \in V$ un elemento $v_1 + v_2 \in V$ e un'operazione di prodotto per scalari, che associa a ogni coppia $k \in K, v \in V$ un elemento $kv \in V$. Tali operazioni rispettano le usuali proprietà algebriche: in particolare esiste un elemento $0 \in V$ tale che $v + 0 = v$ e $k \cdot 0 = 0$ per ogni v e k .

Gli elementi di V si chiamano *vettori* (talvolta, anche se impropriamente, *punti*); l'elemento 0 si chiama *vettore nullo* (o anche *origine*).

Un sottospazio W di V è un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ tale che $\forall w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ e $\forall w \in W, \forall k \in K \Rightarrow kw \in W$. Ovviamente ogni sottospazio W di V contiene l'origine.

Esempi di spazi vettoriali su \mathbf{R} sono \mathbf{R}^n , l'insieme $M(n, m)$ di tutte le matrici reali con n righe e m colonne, l'insieme $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ di tutte le funzioni continue $x(t) : I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Un esempio di spazio vettoriale su \mathbf{C} è \mathbf{C}^n .

Se $q < n$, l'insieme $\{x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbf{R}^n : x_{q+1} = \dots = x_n = 0\}$ è un sottospazio di \mathbf{R}^n . Se a_1, \dots, a_n sono numeri fissati, l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$$

è un sottospazio di \mathbf{R}^n . L'insieme $C^1(I, \mathbf{R}^n)$ delle funzioni dotate di derivata continua su I è un sottospazio di $C^0(I, \mathbf{R}^n)$. Se si identifica \mathbf{R}^n con l'insieme di tutti i vettori $z \in \mathbf{C}^n$ della forma $z = x + i0$ con $x \in \mathbf{R}^n$, allora \mathbf{R}^n non è un sottospazio di \mathbf{C}^n .

Sia $W \subseteq V$ un sottospazio (non è escluso che $W = V$). Un sottoinsieme $A \subset V$ si dice un *sistema di generatori* di W se ogni $v \in W$ si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di elementi di A , ovvero $v = \sum_{i=1}^n k_i v_i$, per certi $v_i \in A$ e $k_i \in K$ ($i = 1, \dots, n$).

Sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ un sottoinsieme finito di V . Si dice che gli elementi di B sono *linearmente dipendenti* se esistono scalari $a_1, \dots, a_n \in K$ non tutti nulli tali che

$$\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0 .$$

Per esempio, due vettori v_1 e v_2 non nulli sono linearmente dipendenti se e solo se $\exists k \in K : v_1 = kv_2$.

Un sottoinsieme $A \subset V$ si dice formato da vettori *linearmente indipendenti* se non esiste nessun sottoinsieme finito di A i cui elementi siano linearmente dipendenti.

Un sottoinsieme $A \subset V$ che sia costituito da vettori linearmente indipendenti e che sia anche un sistema di generatori di V , si dice una *base*. Se esiste una base formata da un numero finito n di elementi, si dice che V ha *dimensione finita* e si scrive $\dim V = n$. Una base di \mathbf{R}^n è per esempio costituita dalle n -ple di numeri

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

che è spesso uso scrivere come colonne. Tale base si chiama la base canonica di \mathbf{R}^n .

Sia V uno spazio di dimensione finita, e sia $\Xi = \{v_1, \dots, v_n\}$ una sua base. Per ogni $v \in V$, restano univocamente determinati n scalari $x_1, \dots, x_n \in K$ tali che $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Tali scalari si dicono *le componenti* di v nella base Ξ . Si scrive anche

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

I vettori $x_i v_i \in V$ si dicono anche *i componenti* di v ; il vettore v viene quindi decomposto in modo unico mediante vettori paralleli ai vettori della base. Si noti che se $v \in V$, l'insieme $\{w : w = kv \text{ per } k \in K\}$ è un sottospazio unidimensionale di V .

Più in generale, dato un numero finito di sottospazi V_1, \dots, V_q di V , si dice che questi costituiscono una decomposizione in *somma diretta* di V se $\forall v \in V$ e $\forall i = 1, \dots, q$ resta univocamente determinato un elemento $w_i \in V_i$ in modo che $\sum_{i=1}^q w_i = v$. Si scrive anche $v = \bigoplus_{i=1, \dots, q} w_i$. Il componente w_i di v relativo a V_i si dice anche la *proiezione* di v su V_i .

In questo corso opereremo soprattutto negli spazi \mathbf{R}^n e \mathbf{C}^n , ed useremo quindi il termine “vettore” come sinonimo di “ n -pla di numeri”. Come già osservato, gli elementi di \mathbf{R}^n e di \mathbf{C}^n si scrivono spesso come colonne. Noi tuttavia considereremo questo come un uso a cui uniformarsi quando possibile, ma non come una regola fissa. Talvolta infatti, per ragioni tipografiche o di esposizione (e quando ciò non dia adito ad ambiguità di interpretazione), può essere conveniente scrivere tali elementi come righe.

A.2 Applicazioni lineari

Un'applicazione L di uno spazio vettoriale V in uno spazio vettoriale W si dice *lineare* se $\forall v_1, v_2, \forall k_1, k_2 \in K$ si ha $L(k_1 v_1 + k_2 v_2) = k_1 L v_1 + k_2 L v_2$.

Le applicazioni lineari di V in sè si dicono anche *endomorfismi*.

Siano ora V e W di dimensione finita, diciamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Fissate rispettivamente una base di V e una di W , esiste una matrice A_L con n colonne e m righe tale che $\forall v \in V$, le componenti di Lv si ottengono eseguendo il prodotto righe-colonne tra A_L e la colonna costituita

dalle componenti di v . Viceversa data una matrice A con n righe e m colonne, e fissate delle basi per V e W , resta univocamente determinata un'applicazione lineare L di V in W .

L'applicazione identica di V in sé è associata alla *matrice identica*, ossia alla matrice quadrata i cui elementi sono tutti nulli tranne quelli della diagonale principale che sono tutti uguali a 1. La matrice identica si indica, usualmente, con la lettera I .

Se L è un'applicazione lineare di V in W , l'insieme

$$\ker L = \{v \in V : Lv = 0\}$$

si chiama *nucleo* di L ed è un sottospazio di V , mentre l'insieme

$$\operatorname{im} L = \{w \in W : w = Lv \text{ per qualche } v \in V\}$$

si chiama l'*immagine* di L ed è un sottospazio di W . In generale,

$$\dim \ker L + \dim \operatorname{im} L = \dim V .$$

Se V_1, \dots, V_q costituiscono una decomposizione in somma diretta di V allora per ogni i , l'applicazione π_i che associa a ogni v la sua proiezione $w_i \in V_i$ è un endomorfismo di V . Endomorfismi di questo tipo si dicono *operatori di proiezione*.

Se $\Xi = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\Xi' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ sono due basi di V , uno stesso vettore v sarà rappresentato da certe componenti x_1, \dots, x_n nella base Ξ , e da certe componenti x'_1, \dots, x'_n nella base Ξ' . La relazione che lega le componenti di uno stesso vettore in basi diverse non dipende dal vettore ma solo dalle basi scelte. Essa è rappresentata per mezzo di una matrice non singolare P . Più precisamente, fissate le basi Ξ e Ξ' esiste una matrice P con $\det P \neq 0$ tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

qualunque sia il vettore $v \in V$. Tale matrice P è quella le cui colonne sono costituite, ordinatamente, dalle componenti dei vettori della base Ξ' nella base Ξ . Posto infatti $v'_i = p_{1i}v_1 + \dots + p_{ni}v_n$ e $v = x'_1v'_1 + \dots + x'_nv'_n$, si ha

$$v = x'_1(p_{11}v_1 + \dots + p_{n1}v_n) + \dots + x'_n(p_{1n}v_1 + \dots + p_{nn}v_n) = \tag{A.1}$$

$$= (p_{11}x'_1 + \dots + p_{1n}x'_n)v_1 + \dots + (p_{n1}x'_1 + \dots + p_{nn}x'_n)v_n = \tag{A.2}$$

$$= x_1v_1 + \dots + x_nv_n . \tag{A.3}$$

La matrice P si dice la matrice del *cambiamento di base*.

Sia ora L un'applicazione lineare di V in W , e sia A_L la matrice che rappresenta L rispetto a certe basi fissate di V e W . Eseguiamo cambiamenti di base in V e W , rispettivamente associati a matrici non singolari P e Q . Allora la matrice che rappresenta L nelle nuove basi sarà $Q^{-1}A_LP$.

Sia in particolare L un endomorfismo di V . Date due basi Ξ e Ξ' di V , il passaggio da Ξ a Ξ' sarà associato ad una matrice P , mentre il passaggio inverso sarà associato a P^{-1} . Se A_L è la matrice che rappresenta L come operatore di V (riferito alla base Ξ) in V (sempre riferito, ovviamente, a Ξ), allora la matrice che rappresenta L come operatore di V in sé con riferimento alla base Ξ' è $P^{-1}A_LP$.

A.3 Matrici

Si ricorda che due matrici quadrate A e B si dicono *simili* quando esiste una matrice non singolare P tale che $B = P^{-1}AP$. La similitudine è una relazione di equivalenza.

Si ricordi la definizione di spazio vettoriale normato e di spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Si ricordi in particolare che se V è dotato di prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, allora la relazione

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

definisce una norma e vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| .$$

In \mathbf{R}^n tipicamente, se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{e} \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} .$$

Se A è una matrice di elementi $\{a_{i,j}\}$ ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$), si definisce la norma di A come

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{i,j}^2} .$$

Con riferimento alle basi canoniche, una matrice

$$A = \{a_{i,j}\}$$

($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) definisce un'applicazione lineare di \mathbf{R}^m in \mathbf{R}^n . Per ogni $v \in \mathbf{R}^m$ si ha allora

$$\|Av\| \leq \|A\| \cdot \|v\| .$$

In questo corso adotteremo inoltre il simbolo A^t per indicare la trasposta della matrice A . Il prodotto scalare tra i vettori v e w di \mathbf{R}^n si può anche calcolare eseguendo il prodotto righe-colonne

$$\langle v, w \rangle = v^t w .$$

A.4 Autovalori, autovettori, forma di Jordan

Sia ora A una matrice quadrata $n \times n$, a elementi reali. Rispetto alle basi canoniche, A può essere interpretata come un endomorfismo di \mathbf{C}^n .

Ricordiamo che $\lambda \in \mathbf{C}$ è un *autovalore* di A se esiste $v \in \mathbf{C}^n$ tale che $v \neq 0$ e

$$(A - \lambda I)v = 0 . \tag{A.4}$$

Ogni $v \neq 0$ per cui vale la (A.4) si dice un *autovettore* (in senso stretto) di A relativo a λ . L'espressione $p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ rappresenta un polinomio di grado n . Esso prende il nome

di *polinomio caratteristico* di A , e l'equazione algebrica che si ottiene annullando il polinomio caratteristico

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (\text{A.5})$$

prende il nome di *equazione caratteristica*. È possibile dimostrare che $p_c(A) = 0$ (Teorema di Cayley-Hamilton). Da ciò segue in particolare che ogni potenza A^k con $k \geq n$ si può rappresentare come combinazione lineare delle matrici $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$.

Un'altra ovvia conseguenza del Teorema di Cayley-Hamilton è che l'insieme dei polinomi che ammettono A come "zero" (quando interpretati come polinomi in una indeterminata matriciale) non è vuoto. Tra tutti questi polinomi, quello di grado minimo si chiama il *polinomio minimo* di A : si prova che il polinomio minimo è unico (a meno di una costante moltiplicativa). Il grado del polinomio minimo è minore o uguale ad n .

Come noto, gli autovalori di A sono tutte e solo le soluzioni dell'equazione caratteristica (A.5). Ad ogni autovalore λ resta quindi associata una *molteplicità algebrica* μ , in modo che se indichiamo con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di A , $k \leq n$ e $\mu_1 + \dots + \mu_k = n$.

Per ogni autovalore λ_i di A , il numero di soluzioni linearmente indipendenti della (A.4) si indica con ν_i e si chiama la *molteplicità geometrica* di λ_i . Si ha che $1 \leq \nu_i \leq \mu_i$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Se per ogni i si ha $\nu_i = \mu_i$ (cioè se l'endomorfismo associato ad A è semplice), esiste una *base propria* per A , vale a dire una base di \mathbf{C}^n tutta formata da autovettori di A . In tal caso A risulta *diagonalizzabile*, cioè simile alla matrice a blocchi

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_k \end{pmatrix}$$

ove per ogni i , $C_i = \lambda_i I$ è una matrice diagonale $\mu_i \times \mu_i$.

La matrice P che opera la trasformazione di A nella sua forma diagonale è quella le cui colonne sono formate dalle componenti rispetto alla base canonica dei vettori di una base propria di A scritti in un ordine opportuno.

Se invece per qualche i si ha $\nu_i < \mu_i$, allora si dimostra che esistono k sottospazi V_1, \dots, V_k di \mathbf{C}^n tali che $\dim V_i = \mu_i$ per $i = 1, \dots, k$ e $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1, \dots, k} V_i$. Si prova inoltre che qualunque sia $i = 1, \dots, k$, il sottospazio V_i è invariante per A , ovvero

$$\forall v \in V_i \implies Av \in V_i .$$

Ciascun sottospazio V_i si dice lo *spazio proprio* associato all'autovalore λ_i . Esso è costituito da tutti gli *autovettori in senso generalizzato* relativi a λ_i , ossia da tutte le soluzioni del sistema

$$(A - \lambda I)^{\mu_i} v = 0 . \quad (\text{A.6})$$

In particolare, se v è un autovettore in senso stretto relativo a λ_i , allora è anche un autovettore in senso generalizzato. Vale anzi la seguente proposizione.

Proposizione A.1 *Un vettore $v \in \mathbf{C}^n$ è soluzione della (A.6) se e solo se esistono un intero positivo $l \leq \mu_i$ e $l - 1$ vettori $v_1, \dots, v_{l-1} \in \mathbf{C}^n$ tali che*

$$\begin{cases} (A - \lambda_i I)v_1 = 0 \\ (A - \lambda_i I)v_2 = v_1 \\ (A - \lambda_i I)v_3 = v_2 \\ \dots\dots\dots \\ (A - \lambda_i I)v_{l-1} = v_{l-2} \\ (A - \lambda_i I)v = v_{l-1} . \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Dimostrazione Sia v soluzione della (A.6), e sia l il più piccolo intero positivo (necessariamente minore o uguale di μ_i) per cui

$$(A - \lambda_i I)^l v = 0 .$$

Se $l = 1$, allora $v = v_1$ e v è un autovettore in senso stretto. Altrimenti si ponga

$$\begin{aligned} v_1 &= (A - \lambda_i I)^{l-1} v \\ v_2 &= (A - \lambda_i I)^{l-2} v \\ &\dots\dots \\ v_{l-1} &= (A - \lambda_i I)^{l-(l-1)} v = (A - \lambda_i I)v . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

I vettori v_1, \dots, v_{l-1} sono quelli cercati. Infatti, moltiplicando per $(A - \lambda_i I)$ ambo i membri di ciascuna delle relazioni precedenti si ricava subito

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)v_1 &= (A - \lambda_i I)^l v = 0 \\ (A - \lambda_i I)v_2 &= (A - \lambda_i I)^{l-1} v = v_1 \\ &\dots\dots \quad \dots\dots \\ (A - \lambda_i I)v_{l-1} &= (A - \lambda_i I)^2 v = v_{l-2} . \end{aligned}$$

L'ultima delle (A.7) non è poi altro che l'ultima delle (A.8).

Viceversa, se v è ottenuto mediante le (A.7) si ha

$$\begin{aligned} (A - \lambda_i I)^2 v &= (A - \lambda_i I)v_{l-1} = v_{l-2} \\ (A - \lambda_i I)^3 v &= (A - \lambda_i I)v_{l-2} = v_{l-3} \\ &\dots\dots \quad \dots\dots \\ (A - \lambda_i I)^{l-1} v &= (A - \lambda_i I)v_2 = v_1 \\ (A - \lambda_i I)^l v &= (A - \lambda_i I)v_1 . \end{aligned}$$

L'asserto segue in quanto $(A - \lambda_i I)v_1 = 0$ e $l \leq \mu_i$.

■

Le relazioni (A.7) possono essere interpretate dicendo che ogni autovettore generalizzato può essere ottenuto costruendo una “catena” che inizia con un autovettore in senso stretto. Non è difficile verificare che tutti gli autovettori generalizzati appartenenti ad una catena v_1, \dots, v_{l-1}, v sono tra loro linearmente indipendenti. Se fosse infatti $v_2 = av_1$ allora si avrebbe anche

$$v_1 = (A - \lambda_i I)v_2 = (A - \lambda_i I)av_1 = a(A - \lambda_i I)v_1 .$$

Ma $(A - \lambda_i I)v_1 = 0$ e quindi si avrebbe $v_1 = 0$, il che è impossibile perché un autovettore in senso stretto non può essere nullo.

Se fosse $v_3 = av_1 + bv_2$ si avrebbe anche

$$\begin{aligned} v_2 = (A - \lambda_i I)v_3 &= (A - \lambda_i I)(av_1 + bv_2) = \\ &= a(A - \lambda_i I)v_1 + b(A - \lambda_i I)v_2 = \\ &= b(A - \lambda_i I)v_2 . \end{aligned}$$

Ma $(A - \lambda_i I)v_2 = v_1$ e quindi si dovrebbe avere $v_2 = bv_1$ il che, come abbiamo visto, implica $v_1 = 0$. Si può completare il ragionamento per induzione.

Si dimostra che, utilizzando le relazioni (A.7) a partire da un'opportuna scelta di ν_i autovettori in senso stretto relativi a λ_i e linearmente indipendenti, si ottiene un numero di autovettori generalizzati sufficiente a completare una base di V_i , e cioè esattamente $\mu_i - \nu_i$ vettori linearmente indipendenti. Si noti che se $\nu_i = 1$, allora i vettori mancanti saranno necessariamente generati da un unico (a meno di costanti moltiplicative) autovettore in senso stretto. Ma se $\nu_i \geq 2$, può darsi che i vettori mancanti siano generati da un unico autovettore in senso stretto, ma può anche darsi che vi siano due o più catene indipendenti con diversi generatori. Questi ultimi non possono essere in generale scelti arbitrariamente tra gli autovettori in senso stretto di A , ma devono essere determinati in maniera opportuna. Quando si verificano queste situazioni, e specialmente se la dimensione dello spazio è elevata, la ricerca degli autovettori atti a generare le varie catene può essere tutt'altro che banale. Sorvolando sulle procedure che possono essere impiegate a tale scopo (lo studente troverà tuttavia una breve discussione in proposito nel paragrafo successivo), per il momento ci basta osservare che ripetendo la costruzione per ogni $i = 1, \dots, k$, si perviene in definitiva ad una base di \mathbf{C}^n , formata da autovettori in senso stretto e da autovettori in senso generalizzato: a tale base daremo ancora il nome di *base propria* relativa ad A .

Un'immagine "suggestiva" di una base propria si può ottenere rappresentando i vettori che la compongono con dei simboli convenzionali, per esempio degli asterischi. Gli asterischi disposti orizzontalmente al livello più basso rappresentano gli autovettori in senso stretto relativi ai vari autovalori, mentre quelli disposti verticalmente rappresentano gli autovettori generalizzati, eventualmente generati dagli autovettori in senso stretto.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & * \\ & & & & & & * \\ * & & & & & & * \\ * & * & & * & & * & \dots \\ * & * & * & * & \dots & * & \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\nu_1 \text{ autovettori relativi a } \lambda_1} & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\nu_2 \text{ autovettori relativi a } \lambda_2} & \end{array} \tag{A.9}$$

Si noti che mentre le catene di autovettori generalizzati si visualizzano immaginando lo schema precedente "sezionato" verticalmente, le sezioni orizzontali mettono invece in evidenza i "livelli" di generazione degli autovettori. Tali livelli possono essere anche definiti formalmente, sulla base dell'osservazione che ogni autovettore generalizzato v risolve, per un certo esponente l , un sistema del tipo $(A - \lambda I)^l v = 0$ ma non il sistema $(A - \lambda I)^{l-1} v = 0$.

È possibile dimostrare che ogni matrice A è simile ad una matrice diagonale a blocchi della forma

$$J = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{k,\nu_k} \end{pmatrix}$$

dove i blocchi $C_{i,j}$ sono a loro volta matrici quadrate della forma

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

In ogni blocco compare solo un autovalore, ma lo stesso autovalore può comparire in più blocchi. Più precisamente, per ogni autovalore λ_i vi sono esattamente ν_i blocchi, ciascuno dei quali associato ad un autovettore in senso stretto. La dimensione di ogni blocco è uguale alla lunghezza della catena degli autovettori generalizzati originata dall'autovettore in questione. Il numero di volte che λ_i compare sulla diagonale principale di J è uguale a μ_i .

È interessante notare la corrispondenza tra la forma della matrice J e quella dello schema (A.9).

La matrice J prende il nome di *forma canonica di Jordan* della matrice A . La matrice P per cui $J = P^{-1}AP$ coincide con la matrice che rappresenta il cambiamento dalla base canonica di \mathbf{R}^n ad una base propria relativa ad A . Le sue colonne sono formate dalle componenti (rispetto alla base canonica) degli autovettori (in senso stretto e generalizzato) di A scritti in un ordine opportuno.

Fra tutte le matrici simili ad A , la forma canonica di Jordan J presenta notevoli vantaggi. Essa infatti permette di visualizzare immediatamente le principali quantità che rimangono invarianti rispetto alla relazione di similitudine, e cioè gli autovalori e i numeri che rappresentano le loro molteplicità algebriche e geometriche.

A.5 Procedure per la costruzione di una base propria

Sia λ_0 un autovalore fissato di A , e sia μ la sua molteplicità algebrica. Sia $M = A - \lambda_0 I$ e sia r_1 il rango di M . Se vogliamo determinare gli autovettori (in senso stretto) di A relativi a λ_0 , dobbiamo risolvere il sistema omogeneo

$$Mv = 0. \quad (\text{A.10})$$

Questo sistema ci fornisce $r_1 < n$ relazioni indipendenti tra le componenti di v . In altre parole, la soluzione generale di (A.10) contiene $n - r_1$ parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1}$. Per indicare tale soluzione, scriveremo pertanto $v = v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1})$.

Per determinare poi il primo livello di autovettori generalizzati relativi a λ_0 , in virtù della Proposizione 1 dobbiamo risolvere il sistema omogeneo

$$M^2 w = 0$$

o, equivalentemente, il sistema non omogeneo

$$Mw = v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1}). \quad (\text{A.11})$$

Quest'ultimo sarà risolubile solo se $v(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1})$ appartiene all'immagine di M : imponendo questa condizione si ottengono delle relazioni che legano $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1}$. Si riduce così il numero di questi parametri che possono essere scelti liberamente. D'altra parte, il sistema (A.10) è sotto-determinato: nel risolverlo si dovrà pertanto introdurre un certo numero di nuovi parametri che,

insieme a quella parte degli $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r_1}$ che sono rimasti liberi, compariranno nell'espressione della soluzione generale di (A.11).

Si ripete il procedimento al massimo $\mu - 1$ volte, e quindi si assegnano dei valori numerici ai parametri che, alla fine, sono rimasti liberi. In una certa misura, ciò può essere fatto in modo arbitrario: l'unica condizione da rispettare è quella, ovvia, di indipendenza lineare. La teoria garantisce che è effettivamente possibile assegnare i parametri in modo da ottenere un insieme di μ vettori linearmente indipendenti che costituiscano una base di V .

La procedura descritta è in un certo senso la più naturale, ma è anche notevolmente scomoda e complicata, specialmente se la dimensione è elevata, a causa della grande quantità di parametri da gestire. Può essere allora utile disporre di un approccio alternativo.

Supponiamo di aver identificato lo spazio proprio V associato a λ_0 , risolvendo il sistema (A.6). Si ricordi che la dimensione di V coincide con la molteplicità algebrica μ . Inoltre, V coincide col nucleo di M^μ .

Sia $h \leq \mu$ l'esponente della più piccola potenza di M tale che

$$\ker M^h = \ker M^\mu = V$$

(semplici esempi mostrano che h può essere strettamente minore di μ : si verifica che la somma di tali esponenti estesa a tutti gli autovalori di A è uguale al grado del polinomio minimo). Non è difficile rendersi conto che

$$\ker M \subset \ker M^2 \subset \dots \subset \ker M^h = V$$

e che, per ogni $i = 2, \dots, h$,

$$M(\ker M^i) \subseteq M^{i-1}.$$

Inoltre, posto $r_i = \text{rank } M^i$, è possibile dimostrare che

$$r_1 > r_2 > \dots > r_h = n - \mu. \quad (\text{A.12})$$

Poiché $\dim \ker M^i = n - r_i$, le (A.12) equivalgono a

$$\dim \ker M < \dim \ker M^2 < \dots < \mu.$$

È anche possibile dimostrare che

$$n - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq r_2 - r_3 \geq \dots \geq r_{h-1} - r_h \geq 0.$$

Ricordando ancora che $\dim \ker M^i = n - r_i$, è facile convincersi che i numeri $r_{i-1} - r_i$ rappresentano i "salti di dimensione" tra i nuclei di potenze successive di M , per cui si ha

$$\begin{aligned} \dim \ker M &\geq \dim \ker M^2 - \dim \ker M \geq \\ &\dim \ker M^3 - \dim \ker M^2 \geq \dots \geq \dim V - \dim \ker M^{h-1}. \end{aligned}$$

Il metodo che stiamo per descrivere sommariamente consente di determinare una base di V partendo dagli autovettori generalizzati che si trovano al livello più alto, procedendo cioè in senso inverso rispetto al metodo visto in precedenza, nel quale le catene di autovettori venivano ricostruite a partire dagli autovettori in senso stretto che si trovano al livello più basso.

Si comincia con lo scegliere, in modo arbitrario, $\mu - n + r_{h-1}$ vettori linearmente indipendenti $u_1, \dots, u_{\mu-n+r_{h-1}}$ appartenenti a V , ma non al $\ker M^{h-1}$. Poiché $\dim \ker M^{h-1} + r_{h-1} = n$, questi vettori costituiscono una base di uno spazio complementare al $\ker M^{h-1}$ rispetto a V . Le immagini $Mu_1, \dots, Mu_{\mu-n+r_{h-1}}$ di questi vettori appartengono al nucleo di M^{h-2} . Si noti che in virtù delle (10), il salto dimensionale tra $\ker M^{h-2}$ e $\ker M^{h-1}$ è maggiore o uguale al numero dei vettori ottenuti. Il risultato che valida tutto il procedimento, e di cui tralascieremo la dimostrazione, è che i vettori $Mu_1, \dots, Mu_{\mu-n+r_{h-1}}$ sono linearmente indipendenti (tra loro e, ovviamente, anche dai vettori $u_1, \dots, u_{\mu-n+r_{h-1}}$ da cui eravamo partiti).

Si hanno ora due casi. Se $r_{h-2} - r_{h-1} = \mu - n + r_{h-1}$, i vettori

$$Mu_1, \dots, Mu_{\mu-n+r_{h-1}}$$

sono in numero tale da colmare il salto dimensionale tra $\ker M^{h-2}$ e $\ker M^{h-1}$. Si può allora iterare il procedimento, considerando le immagini in $\ker M^{h-3}$ mediante M dei vettori $Mu_1, \dots, Mu_{\mu-n+r_{h-1}}$, e cioè i vettori

$$M^2u_1, \dots, M^2u_{\mu-n+r_{h-1}} .$$

Altrimenti, prima di andare avanti, si devono aggiungere tanti vettori linearmente indipendenti, e per il resto arbitrari, quanti ne sono necessari per coprire il salto dimensionale.

Gli autovettori in senso stretto, che si trovano alla base delle varie catene di autovettori generalizzati, si trovano all'ultima iterazione del procedimento.

A titolo d'esempio, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per la quale si ha un unico autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica $\mu = n = 4$. Si calcola facilmente che gli autovalori in senso stretto sono tutti della forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.13}$$

al variare di α_1, α_2 in \mathbf{R} . Si tratta dunque di determinare due autovettori generalizzati, che possono essere generati da due autovettori in senso stretto indipendenti, e quindi appartenere entrambi al primo livello, oppure essere generati dallo stesso autovettore in senso stretto, e quindi appartenere a livelli diversi. Imponendo la risolubilità del sistema

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si trova che α_2 deve essere uguale a $\alpha_1/2$. La soluzione generale ha la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1/2 \\ \alpha_4 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

A questo punto è chiaro che mettendo insieme vettori della forma (A.13) e (A.14) non si otterrà mai una base di \mathbf{R}^4 . Infatti l'ultima componente risulta in ogni caso nulla. Bisogna quindi iterare un'altra volta il procedimento. Per la risolubilità del sistema

$$(A - I)v = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_1/2 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si trova questa volta la condizione $\alpha_1 = 2\alpha_3 - 4\alpha_4$. Tenendo conto di tutte le relazioni trovate, una catena di autovettori potrebbe essere ottenuta, per esempio, in corrispondenza dei valori $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_3 = 1$. Si ha così l'autovalore in senso stretto

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e gli autovettori generalizzati

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ai quali si aggiunge per completare la base un autovettore in senso stretto linearmente indipendente, per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se vogliamo procedere con il secondo metodo, bisogna prima di tutto calcolarsi le potenze

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I)^3 = 0.$$

La sequenza decrescente dei ranghi è 2, 1, 0, 0. La dimensione di $\ker(A - I)$ è 2 (come sapevamo già), e gli scarti dimensionali tra $\ker(A - I)$, $\ker(A - I)^2$ e $\ker(A - I)^3$ sono entrambi pari a 1 (si noti in particolare che la potenza di $A - I$ il cui nucleo coincide con l'intero spazio è minore della molteplicità algebrica).

Iniziamo la costruzione scegliendo un vettore non appartenente al nucleo di $(A - I)^2$ (cioè tale che $(A - I)^2 \neq 0$), per esempio

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcola poi

$$w = (A - I)u = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$v = (A - I)w = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, v risulta un autovettore in senso stretto. Per concludere la costruzione, è sufficiente prendere un secondo autovettore in senso stretto linearmente indipendente, per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A.6 Prodotto cartesiano di spazi vettoriali

Dati due spazi vettoriali V , W su K , è possibile dare una struttura di spazio vettoriale al loro prodotto cartesiano. Più precisamente, è immediato dimostrare le seguenti proposizioni.

Proposizione A.2 *Sia $V \times W$ il prodotto cartesiano di due spazi vettoriali. Rispetto alle operazioni di somma e prodotto per scalari, così definite:*

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \quad v_1, v_2 \in V, w_1, w_2 \in W$$

$$a(v, w) = (av, aw) \quad a \in K, v \in V, w \in W$$

l'insieme $V \times W$ è uno spazio vettoriale su K .

Proposizione A.3 *Supponiamo che V e W siano di dimensione finita, e siano*

$$\{e_1, \dots, e_n\}, \quad \{f_1, \dots, f_m\}$$

due basi, rispettivamente per V e per W . Allora, anche $V \times W$ ha dimensione finita e gli $n + m$ vettori $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_m)\}$ ne costituiscono una base.

La definizione data si può generalizzare quando si hanno n spazi vettoriali V_1, \dots, V_n e si considera il prodotto cartesiano $V_1 \times \dots \times V_n$.

Sia ora U un altro spazio vettoriale su K . Vediamo come si possa far corrispondere ad applicazioni lineari di V, W in U un'applicazione, sempre a valori in U , definita sullo spazio vettoriale $V \times W$.

Proposizione A.4 *Siano $L : V \rightarrow U, M : W \rightarrow U$ due applicazioni lineari. L'applicazione $\Lambda : V \times W \rightarrow U$ definita da*

$$\Lambda(v, w) = L(v) + M(w)$$

è lineare.

Dimostrazione

a) Si ha, per la linearità di L e M ,

$$\begin{aligned} \Lambda[(v_1, w_1) + (v_2, w_2)] &= \Lambda(v_1 + v_2, w_1 + w_2) = \\ &= L(v_1 + v_2) + M(w_1 + w_2) = \\ &= \Lambda(v_1, w_1) + \Lambda(v_2, w_2) . \end{aligned}$$

b) Sempre per la linearità di L e M ,

$$\Lambda[a(v, w)] = \Lambda(av, aw) = L(av) + M(aw) = a\Lambda(v, w) .$$

■

A.7 Sottospazi e ortogonalità

Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sia W un sottospazio di V e sia infine u un vettore di V . Si dice che u è *ortogonale* a W se per ogni $w \in W$,

$$\langle u, w \rangle = 0 .$$

È immediato provare che vale la:

Proposizione A.5 *L'insieme U dei vettori u di V ortogonali a W è un sottospazio di V .*

Il sottospazio U dei vettori ortogonali ad un sottospazio W di V si dice *sottospazio ortogonale* a W e si indica con W^\perp .

Poiché per ogni $w \in W$ e per ogni $u \in W^\perp$ risulta $\langle w, u \rangle = 0$, si ha che $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Si ricorda che un sottoinsieme $A \subset V$ si dice costituito da vettori *ortonormali* se per ogni $v \in A$ si ha $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = 1$ e inoltre $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni coppia $v, w \in A$ con $v \neq w$.

È chiaro che se i vettori di A sono ortonormali allora sono anche linearmente indipendenti. Dunque, se $\dim V = n$, un insieme ortonormale conterrà al più n elementi. Una base di V costituita da vettori ortonormali si dice anche una *base ortonormale*.

Proposizione A.6 *Sia V di dimensione finita, diciamo $\dim V = n$. Se $\dim W = m$, allora W^\perp ha dimensione $n - m$.*

Dimostrazione Sia $\{f_1, \dots, f_m\}$ una base qualunque per W . $u \in W^\perp$ se e solo se

$$\langle u, f_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (\text{A.15})$$

Sia ora Ξ una base per V , ortonormale rispetto al prodotto scalare ivi definito. Si verifica facilmente che se rispetto ad una tale base u e w hanno componenti (u_1, \dots, u_n) e (w_1, \dots, w_n) , allora

$$\langle u, w \rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n.$$

Di conseguenza le (A.15) si riducono ad un sistema omogeneo di m equazioni indipendenti in n incognite, le cui soluzioni costituiscono un sottospazio vettoriale di dimensione $n - m$. Pertanto $\dim W^\perp = n - m$. ■

Corollario A.1 *Se V ha dimensione finita, e W è un suo sottospazio, allora $(W^\perp)^\perp = W$.*

Dimostrazione Abbiamo visto che, in generale, $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Sia $\dim V = n, \dim W = m$. Applicando due volte la Proposizione 5, si ha

$$\dim (W^\perp)^\perp = n - (n - m) = m.$$

Dunque $W = (W^\perp)^\perp$. ■

Corollario A.2 *Sia V di dimensione finita, e siano W_1, W_2 due suoi sottospazi. Si ha:*

$$W_1 = W_2 \iff W_1^\perp = W_2^\perp.$$

Dimostrazione Per l'implicazione (\Leftarrow) basta passare al sottospazio ortogonale di entrambi i membri e applicare il Corollario 1. L'altra implicazione è ovvia. ■

B. Sistemi di equazioni differenziali lineari

Cominciamo a concentrare la nostra attenzione sui sistemi dinamici lineari. Per avviarne lo studio in maniera sistematica, in questo capitolo ci limiteremo ai sistemi lineari finito-dimensionali, invarianti nel tempo, e non forzati. Questi sono definiti da un sistema di equazioni del tipo

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (\text{B.1})$$

Nella tradizione matematica, (B.1) si chiama un sistema di equazioni differenziali lineari omogeneo a coefficienti costanti. In forma esplicita, (B.1) si scrive

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n. \end{cases}$$

B.1 Richiami

Cominciamo col ricordare alcuni fatti importanti a proposito dei sistemi di equazioni del tipo (B.1).

Fatto 1. Per ogni stato iniziale x_0 assegnato esiste una e una sola soluzione $x = \varphi(t)$ della (B.1) tale che $\varphi(0) = x_0$; inoltre, $\varphi(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Fatto 2. Se $v \in \mathbf{R}^n$ ($v \neq 0$) è un autovettore di A relativo all'autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$, allora $\varphi(t) = e^{\lambda t}v$ è la soluzione corrispondente allo stato iniziale v .

Fatto 3. Se $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$ sono soluzioni di (B.1) e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$, allora anche $\alpha_1\varphi_1(\cdot) + \alpha_2\varphi_2(\cdot)$ è soluzione di (B.1).

Fatto 4. Date k soluzioni $\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_k(\cdot)$ di (B.1), queste costituiscono un sottoinsieme linearmente indipendente in $\mathcal{C}(-\infty, +\infty, \mathbf{R}^n)$ se e solo se i vettori $\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)$ costituiscono, per ogni $t \in \mathbf{R}$, un sottoinsieme linearmente indipendente in \mathbf{R}^n .

Fatto 5. L'insieme di tutte le soluzioni di (B.1) forma un sottospazio \mathcal{S} di $\mathcal{C}(-\infty, +\infty, \mathbf{R}^n)$: la dimensione di \mathcal{S} è finita e, più precisamente, uguale ad n . Ad \mathcal{S} si dà il nome di integrale generale del sistema (B.1).

Il sistema di equazioni (B.1) ha senso anche se si ammette che x possa prendere valori nello spazio n -dimensionale complesso \mathbf{C}^n , e che gli elementi di A siano complessi: a parte le ovvie

modifiche, rimane vero tutto quanto abbiamo detto fino a questo momento³. Valgono le seguenti ulteriori proprietà.

Fatto 6. Se gli elementi di A sono reali, e se $z(\cdot)$ è una soluzione non reale di (B.1), allora anche la sua coniugata $\bar{z}(\cdot)$ è una soluzione di (B.1).

Fatto 7. Se gli elementi di A sono reali, e se $z(\cdot)$ è una soluzione non reale di (B.1), allora $z(\cdot)$ e $\bar{z}(\cdot)$ sono linearmente indipendenti; inoltre,

$$\varphi_1(\cdot) = \frac{z(\cdot) + \bar{z}(\cdot)}{2} \quad \text{e} \quad \varphi_2(\cdot) = \frac{z(\cdot) - \bar{z}(\cdot)}{2i} \quad (\text{B.2})$$

sono due soluzioni reali della (B.1) linearmente indipendenti.

In particolare, se $z(t) = e^{\lambda t}v$ con $\lambda = \alpha + i\beta$ e $v = u + iw$ si ha, con semplici calcoli,

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}[(\cos \beta t)u - (\sin \beta t)w] \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}[(\cos \beta t)w + (\sin \beta t)u].$$

Da tutto ciò, risulta chiaro che l'integrale generale della (B.1) può essere scritto come combinazione lineare

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) \quad (\text{B.3})$$

dove le c_1, \dots, c_n sono delle costanti arbitrarie, e $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono n soluzioni qualunque, purché linearmente indipendenti. Se A è reale, non è restrittivo, assumere che $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ siano a valori reali: pertanto, la formula (B.3) descriverà l'insieme di tutte le soluzioni reali se le costanti si scelgono in campo reale, oppure l'insieme di tutte le soluzioni complesse se le costanti si scelgono in campo complesso.

Un insieme costituito da n soluzioni linearmente indipendenti del sistema (B.1) si chiama anche un *sistema fondamentale di soluzioni*. Ad ogni sistema fondamentale di soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, si associa una *matrice fondamentale*

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Osserviamo che se $\Phi(t)$ è una matrice fondamentale e Q una matrice costante non singolare, allora anche $\Phi(t)Q$ è una matrice fondamentale. In particolare, vi è un'unica matrice fondamentale tale che $\Phi(0) = I$. Essa viene detta anche *matrice fondamentale principale*.

Introduciamo il vettore costante $c = (c_1, \dots, c_n)^t$. Se $\Phi(t)$ è una qualunque matrice fondamentale, la (B.3) si scrive anche

$$\varphi(t) = \Phi(t)c \quad (\text{B.4})$$

La soluzione particolare che soddisfa alle condizioni iniziali $\varphi(t_0) = x_0$ si ricava risolvendo il sistema algebrico

$$\Phi(t_0)c = x_0$$

³L'opportunità di estendere la ricerca delle soluzioni al campo complesso anche nel caso in cui gli elementi di A siano reali, è suggerita dal Fatto 2: eventuali autovalori non reali di A danno infatti luogo a soluzioni che sarebbe difficile individuare rimanendo nel campo reale.

rispetto all'incognita vettoriale c . Se $t_0 = 0$ e $\Phi(t)$ è la matrice fondamentale principale, allora si ha semplicemente $c = x_0$.

B.2 La matrice esponenziale

Sia $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ lo spazio vettoriale di dimensione finita formato da tutte le matrici quadrate di ordine $n \times n$ a elementi complessi. Se $M = (m_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$, definiamo

$$\|M\| = \sqrt{\sum_{i,j} |m_{i,j}|^2}.$$

In questo modo, $\mathcal{M}(\mathbf{C})$ diventa uno spazio normato. Si può dimostrare che la serie

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!},$$

converge qualunque sia $M \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$; la sua somma si indica col simbolo e^M e si chiama *matrice esponenziale*.

Riportiamo una lista delle principali proprietà della matrice esponenziale:

- se gli elementi di M sono reali, allora anche gli elementi di e^M sono reali;
- $e^0 = I$, ove 0 indica la matrice i cui elementi sono tutti nulli;
- $e^{N+M} = e^M e^N$, a condizione che $MN = NM$;
- gli autovalori di e^M sono tutti e solo i numeri complessi della forma e^λ , dove λ è un autovalore di M ;
- $e^M M = M e^M$;
- $\det e^M = e^{\text{tr} M}$, ed è quindi diverso da zero ($\text{tr} M$ indica la traccia di M);
- se P è una matrice non singolare, $e^{P^{-1}MP} = P^{-1}e^M P$.

Torniamo adesso al sistema (B.1). La matrice esponenziale calcolata a partire dalla matrice tA è costituita da elementi che sono funzioni derivabili rispetto alla variabile $t \in \mathbf{R}$.

Proposizione B.1 *Qualunque sia $A \in \mathcal{M}(\mathbf{C})$ si ha, per ogni $t \in \mathbf{R}$,*

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}.$$

La matrice esponenziale fornisce dunque un formalismo utile a rappresentare le soluzioni del sistema (B.1). Infatti, se $x = \varphi(t)$ è la soluzione di (B.1) tale che $\varphi(t_0) = x_0$, allora, per l'unicità delle soluzioni e le proprietà dell'esponenziale, si avrà

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$$

e, se $t_0 = 0$, ancor più semplicemente

$$\varphi(t) = e^{tA}x_0 \quad (\text{B.5})$$

qualunque sia $t \in \mathbf{R}$. In altre parole, determinare la matrice esponenziale equivale a determinare una matrice fondamentale del sistema (anzi, la matrice fondamentale principale).

Vediamo adesso come si può calcolare esplicitamente la matrice esponenziale⁴. Cominciamo da alcuni casi particolari.

B.3 A diagonale

Sia

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri reali o complessi non necessariamente distinti.

Osservazione B.1 Per una matrice siffatta, λ è un autovalore se e solo se $\lambda = \lambda_i$ per qualche $i = 1, \dots, n$, e la molteplicità algebrica di λ è uguale al numero di volte che λ compare ripetuto nella n -pla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Gli autovettori corrispondenti a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ si possono prendere coincidenti, ordinatamente, con i vettori della base canonica

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Un sistema fondamentale di soluzioni del sistema (B.1) potrà essere quindi scritto della forma

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}v_1, \dots, \varphi_n(t) = e^{\lambda_n t}v_n.$$

Il sistema (B.1) definito da una tale A si dice *disaccoppiato*, in quanto l'evoluzione di ciascuna componente x_i del vettore x dipende da x_i ma non dipende da nessuna x_j con $j \neq i$. Un sistema di questo tipo può anche essere risolto direttamente, integrando separatamente le singole equazioni. Il sistema fondamentale di soluzioni a cui si perviene per questa via è ovviamente lo stesso di prima. Sempre al medesimo risultato si può infine arrivare costruendo la matrice esponenziale. Infatti, è immediato verificare che

$$A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

per ogni k intero positivo, per cui

$$e^{tA} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}).$$

⁴Alcuni concetti e risultati di algebra lineare, di cui faremo uso a questo scopo, sono riportati in Appendice per comodità dello studente

B.4 A nilpotente

Se A è nilpotente, vuol dire che esiste un intero q positivo tale che $A^k = 0$ per ogni $k \geq q$. Dunque la serie che definisce la matrice esponenziale si riduce ad un polinomio e può essere calcolata elementarmente. Una tipica matrice nilpotente (per cui $q = n$) è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Il sistema corrispondente

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dots \\ \dot{x}_n = 0 \end{cases}$$

può anche essere risolto procedendo in “cascata” (dal basso verso l’alto). I due approcci portano, ovviamente, allo stesso risultato. Un sistema fondamentale di soluzioni può essere scritto nella forma

$$\varphi_1(t) = v_1, \quad \varphi_2(t) = tv_1 + v_2, \quad \dots, \quad \varphi_n(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}v_1 + \dots + tv_{n-1} + v_n \quad (\text{B.8})$$

dove i vettori v_1, \dots, v_n sono, come in (B.6), quelli della base canonica. D’altra parte, il calcolo diretto della matrice esponenziale, supponendo sempre A nella forma (B.7), mostra che

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione B.2 *Si noti che zero è l’unico autovalore della matrice (B.7); lo spazio proprio corrispondente ha dimensione uno. Inoltre, $Av_1 = 0$ (vale a dire che v_1 è un autovettore di A), $Av_2 = v_1$, $Av_3 = v_2$ e via di seguito.*

La formula dell’integrale generale del sistema definito da una matrice del tipo (B.7) si può scrivere come

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = d_1 + td_2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}d_n$$

dove

$$d_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad d_n = \begin{pmatrix} c_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che $Ad_1 = d_2, Ad_2 = d_3, \dots, Ad_n = 0$.

Osservazione B.3 *Combinando i due casi particolari considerati fino a questo momento, siamo in grado di calcolare la matrice esponenziale per ogni matrice A della forma $\lambda I_n + T$ dove λ è un qualunque numero reale, I_n è la matrice identica di dimensioni $n \times n$, e T è nilpotente. In particolare, se T ha la forma (B.7), allora*

$$e^{t(\lambda I_n + T)} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

B.5 A diagonale a blocchi

Se M è diagonale a blocchi, cioè

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_k \end{pmatrix} = \text{diag}(M_1, \dots, M_k),$$

allora anche la sua matrice esponenziale è diagonale a blocchi

$$e^M = \text{diag}(e^{M_1}, \dots, e^{M_k}).$$

B.6 Equivalenza lineare

Per procedere al calcolo della matrice esponenziale nel caso più generale, conviene introdurre il concetto di equivalenza lineare.

Immaginiamo il sistema (B.1) come il modello matematico di un processo che si svolge in uno spazio vettoriale reale V di dimensione n nel quale sia stata fissata una base. L' n -pla $x = (x_1, \dots, x_n)^t$ di numeri reali rappresenta, in tale base, le componenti dello stato del sistema.

Supponiamo adesso di prendere un'altra base di V , e di indicare con $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ le componenti dello stato in questa seconda base.

È noto che esiste una matrice non singolare P tale che, per ogni elemento di V ,

$$x = Py.$$

Vediamo come cambia l'equazione (B.1), quando si rappresentano gli stati del sistema rispetto alla seconda base. Si ha

$$\dot{y} = P^{-1}\dot{x} = P^{-1}APy = By. \quad (\text{B.10})$$

Si ottiene dunque ancora un sistema lineare, definito da una matrice simile alla data.

Viceversa, due sistemi del tipo (B.1) definiti da matrici simili possono sempre essere pensati come uno stesso sistema fisico rappresentato in diversi sistemi di coordinate.

Definizione B.1 *Due sistemi*

$$\dot{x} = Ax \quad \text{e} \quad \dot{y} = By, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^n$$

si dicono linearmente equivalenti se A e B sono simili, cioè se $B = P^{-1}AP$ per qualche P non singolare.

Quella definita è una relazione di equivalenza. È chiaro che ogni soluzione $x(t)$ del primo sistema è della forma $x(t) = Py(t)$ dove $y(t)$ è una soluzione del secondo e viceversa. Si vede facilmente del resto che

$$e^{tB} = P^{-1}e^{tA}P \quad (\text{o, equivalentemente, } e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}). \quad (\text{B.11})$$

Dal punto di vista della rappresentazione delle soluzioni, possiamo quindi lavorare su un qualunque sistema linearmente equivalente al dato, tenendo poi conto della (B.11) per ricondursi alle coordinate originali.

La nozione di equivalenza lineare, così come quella di similitudine tra matrici, si generalizza immediatamente al caso in cui $x \in \mathbf{C}^n$. Se A e B sono matrici simili, A è reale e B contiene elementi complessi, allora la matrice P che opera il cambiamento di base conterrà necessariamente elementi complessi.

B.7 A diagonalizzabile

È noto che una matrice A di dimensioni $n \times n$ è diagonalizzabile (cioè simile a una matrice diagonale) se e solo se esistono n vettori v_1, \dots, v_n linearmente indipendenti ciascuno dei quali è un autovettore di A . Si dice che i vettori v_1, \dots, v_n costituiscono una *base propria* di A . In particolare, A è diagonalizzabile se ci sono n autovalori distinti.

Indicata con P la matrice le cui colonne sono, ordinatamente, v_1, \dots, v_n , si ha

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$$

dove λ_1 è l'autovalore di A relativo a v_1 , λ_2 è l'autovalore di A relativo a v_2 e così via (non è richiesto che i numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ siano distinti).

Per calcolare e^{tA} possiamo prima diagonalizzare A mediante il cambiamento di coordinate determinato da P , quindi calcolare e^{tD} , e infine ritornare alle coordinate originali, facendo uso della (B.11).

Osservazione B.4 *Se A è reale ma possiede autovalori complessi, allora P e D avranno elementi complessi così come e^{tD} ; tuttavia, si ricordi che, per costruzione, gli elementi di e^{tA} devono essere reali.*

Si noti che $\Phi(t) = Pe^{tD}$ è una matrice fondamentale, per calcolare la quale non è richiesta l'inversione di P ; tuttavia, in generale gli elementi di Pe^{tD} non sono reali, neanche se A è reale.

In definitiva, per determinare esplicitamente gli elementi che formano la matrice e^{tA} e quindi l'integrale generale della (B.1) nel caso diagonalizzabile è sufficiente conoscere gli autovalori di A e i relativi autovettori.

Esempio B.1 Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di A sono $+i$, con autovettore $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, e $-i$, con autovettore $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. Due soluzioni (complesse) linearmente indipendenti sono

$$\varphi_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \varphi_2(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Come si vede, esse sono coniugate. Prendendo parte reale e parte complessa si ottengono due soluzioni reali linearmente indipendenti

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Alternativamente, possiamo applicare il procedimento di diagonalizzazione sopra descritto. A tal fine, dobbiamo calcolare l'inversa della matrice

$$P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è data da

$$P^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Si calcola facilmente

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

e

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Infine,

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

In questo caso, la matrice esponenziale si sarebbe potuta calcolare anche direttamente sulla base della definizione stessa: si verifica infatti senza difficoltà che $A^4 = I_2$.

B.8 Forma di Jordan

In questo paragrafo, se A è una qualunque matrice $n \times n$, indicheremo con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($1 \leq k \leq n$) i suoi autovalori distinti. Per ogni autovalore λ_i di A , con μ_i e ν_i indicheremo rispettivamente la molteplicità algebrica e quella geometrica di λ_i ($1 \leq \nu_i \leq \mu_i$). Scriveremo inoltre $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$.

Se A possiede autovalori con molteplicità algebrica maggiore di uno e con molteplicità geometrica diversa dalla molteplicità algebrica, allora A non è diagonalizzabile. In altre parole, il numero di autovettori linearmente indipendenti è insufficiente a formare una base dello spazio. Per aggirare l'ostacolo, bisogna ricorrere agli autovettori generalizzati. Vale il seguente teorema.

Teorema B.1 *Ogni matrice A di dimensioni $n \times n$ è simile ad una matrice diagonale a blocchi della forma*

$$J = \begin{pmatrix} C_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_{1,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_{k,\nu_k} \end{pmatrix}$$

dove i blocchi $C_{i,j}$ sono a loro volta matrici quadrate della forma

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

In ogni blocco compare solo un autovalore, ma lo stesso autovalore può comparire in più blocchi. Più precisamente, per ogni autovalore λ_i vi sono esattamente ν_i blocchi, ciascuno dei quali associato ad un autovettore in senso stretto. La dimensione del blocco generico $C_{i,j}$ è uguale alla lunghezza della catena degli autovettori generalizzati originata dall'autovettore λ_i . Il numero di volte che λ_i compare sulla diagonale principale di J è uguale a μ_i .

La matrice J si chiama *forma di Jordan* di A . Dal nostro punto di vista, è importante osservare che ogni blocco di J è della forma $\lambda_i I + T$, dove I è la matrice identica (di dimensione appropriata), e T è nilpotente del tipo (B.7). Questo significa, tenendo anche conto di quanto osservato nel Paragrafo B.5, che la strategia illustrata nel caso di una matrice diagonalizzabile può essere estesa alla situazione presente: si trasforma il sistema dato (B.1) nel sistema

$$\dot{y} = Jy \tag{B.12}$$

mediante un opportuno cambiamento di coordinate, si trovano le soluzioni di (B.12) direttamente, oppure calcolando e^{tJ} , e quindi si torna alle coordinate originali. Resta solo il problema di identificare la matrice P che determina la similitudine tra A e J . A tal fine, come già accennato, si deve determinare per ogni autovalore λ_i , un numero di autovettori e di autovettori generalizzati linearmente indipendenti pari a μ_i . Tali vettori devono essere ordinati in modo da rispettare sia l'ordine di indicizzazione degli autovalori sia, per ogni autovalore e ogni autovettore a questo relativo, l'ordine con cui gli autovettori generalizzati appartenenti alla stessa catena vengono generati.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \lambda_1 & & & \lambda_2 \\
 \overbrace{v_{1,1,0} \quad v_{1,1,1} \quad \dots \quad v_{1,2,0} \quad v_{1,2,1} \quad \dots \quad v_{1,3,0} \quad v_{1,3,1} \quad \dots} & & & & & & \overbrace{v_{2,1,0} \quad v_{2,1,1} \quad \dots} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 \text{prima catena} & \text{seconda catena} & \text{terza catena} & & & & \text{prima catena}
 \end{array}$$

L'insieme di tutti questi vettori costituisce una base dello spazio, che prende sempre il nome di *base propria*. La colonne della matrice P si costruiscono mettendo uno accanto all'altro i vettori della base propria; con riferimento allo schema precedente,

$$P = [v_{1,1,0} \quad v_{1,1,1} \quad \dots \quad v_{1,2,0} \quad v_{1,2,1} \quad \dots \quad v_{1,3,0} \quad v_{1,3,1} \quad \dots \quad v_{2,1,0} \quad v_{2,1,1} \quad \dots].$$

Se si permutano gli indici degli autovalori oppure, per ogni autovalore, l'ordine degli autovettori (fermo restando, per ogni autovettore, l'ordine di generazione di eventuali autovettori generalizzati), si ottiene un'altra base propria e un'altra forma di Jordan. In questo senso la forma di Jordan non è unica.

Una volta costruita una base propria, a condizione di rispettare gli ordini dei vari tipi di indice come sopra indicato, la forma di Jordan è automaticamente determinata, e quindi non c'è in realtà nessun bisogno di effettuare materialmente il cambiamento di coordinate. Per risalire a e^{tA} (nelle coordinate originali), è tuttavia indispensabile calcolare P^{-1} . Anche in questo caso, il calcolo di P^{-1} può essere risparmiato se ci si accontenta della matrice fondamentale (in generale complessa) $P e^{tJ}$.

Ricordando in particolare la (B.9), e la procedura illustrata nel Paragrafo 3.1 (Fatto 7), possiamo riassumere le conclusioni a cui siamo giunti nella proposizione seguente.

Proposizione B.2 *L'elemento generico $\varphi_{r,s}(t)$ della matrice e^{tA} ($r, s = 1, \dots, n$) si presenta nella forma*

$$\varphi_{r,s}(t) = \sum_{i=1}^k (\pi_{r,s})_i(t) e^{\lambda_i t}$$

dove ogni termine $(\pi_{r,s})_i(t)$ è un polinomio (a coefficienti complessi, in generale) di grado inferiore alla molteplicità algebrica di λ_i , e λ_i è un autovalore di A ($i = 1, \dots, k$).

Se A è una matrice reale, l'elemento generico $\varphi_{r,s}(t)$ della matrice e^{tA} può essere messo nella forma

$$\varphi_{r,s}(t) = \sum_{i=1}^k e^{\alpha_i t} [(p_{r,s})_i(t) \cos \beta_i t + (q_{r,s})_i(t) \sin \beta_i t] \quad (\text{B.13})$$

dove $(p_{r,s})_i$ e $(q_{r,s})_i$ sono polinomi a coefficienti reali di grado inferiore alla molteplicità algebrica di λ_i (nella formula precedente sono naturalmente compresi gli autovalori reali, per i quali $\beta_i = 0$).

B.9 Stima asintotica delle soluzioni

Come applicazione delle conclusioni a cui siamo giunti sulla struttura di e^{tA} , vogliamo ora dare una stima asintotica delle soluzioni della (B.1) (per $t \rightarrow +\infty$), che ci sarà molto utile nel seguito.

Lemma B.1 Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni intero $m \in \mathbf{N}$ esiste una costante $k > 0$ tale che $t^m < ke^{\varepsilon t}$, per ogni $t \geq 0$.

Dimostrazione Per induzione. Se $m = 1$ si prende $k = \frac{1}{\varepsilon}$. Infatti posto

$$f(t) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon} - t$$

si ha, $f(0) = \frac{1}{\varepsilon}$ e $f'(t) = e^{\varepsilon t} - 1 > 0$ per $t > 0$. Supponiamo che il risultato valga per $m - 1$, con $k = \bar{k}$. La funzione

$$f(t) = ke^{\varepsilon t} - t^m$$

è tale che

$$f(0) = k \quad e \quad f'(t) = k\varepsilon e^{\varepsilon t} - mt^{m-1} = m \left(\frac{k\varepsilon}{m} e^{\varepsilon t} - t^{m-1} \right) > 0$$

per $t > 0$, a patto di scegliere $k = \frac{m\bar{k}}{\varepsilon}$. ■

Sia α_0 il massimo delle parti reali α_i degli autovalori λ_i della matrice A ($i = 1, \dots, k$) e sia α un numero reale più grande di α_0 :

$$\alpha > \alpha_0 \geq \alpha_i \quad \text{per ogni } (i = 1, \dots, k).$$

Poichè $|\sin \beta_i t| \leq 1$ e $|\cos \beta_i t| \leq 1$ per ogni $i = 1, \dots, k$, partendo dalla (B.13) e facendo ripetutamente uso della disuguaglianza triangolare si ha, per $t \geq 0$,

$$|\varphi_{r,s}(t)| \leq \sum_{i=1}^k e^{\alpha_i t} (|(p_{r,s})_i(t)| + |(q_{r,s})_i(t)|) \leq \sum_{i=1}^k (Q_{r,s})_i(t) e^{\alpha_i t}$$

dove $(Q_{r,s})_i$ è un polinomio i cui coefficienti sono numeri positivi (o nulli), che si ottengono maggiorando i valori assoluti dei coefficienti dei polinomi $(p_{r,s})_i(t)$ e $(q_{r,s})_i(t)$. Anche se non è essenziale per quanto segue, osserviamo che il grado di $(Q_{r,s})_i$ è inferiore alla molteplicità algebrica di λ_i .

Sia $0 < \varepsilon < \alpha - \alpha_0$. Per il Lemma B.1, vi sono costanti $k_{r,s}$ tali che $|\varphi_{r,s}(t)| \leq k_{r,s} e^{(\alpha_0 + \varepsilon)t} \leq k_{r,s} e^{\alpha t}$ per tutti i $t \geq 0$. Dunque $\|e^{tA}\| = \sqrt{\sum_{r,s} \varphi_{r,s}^2(t)} \leq \sqrt{\sum_{r,s} k_{r,s}^2} e^{\alpha t}$ e, in definitiva,

$$\|e^{tA}\| \leq k_0 e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

dove k_0 è una nuova costante. Si noti che se tutti gli autovalori con parte reale esattamente uguale a α_0 hanno la molteplicità algebrica coincidente con quella geometrica, allora la precedente disuguaglianza vale con α_0 al posto di α . Infatti, se λ_i è un autovalore tale che $\alpha_i = \operatorname{Re} \lambda_i = \alpha_0$, i corrispondenti polinomi $(p_{r,s})_i(t)$ e $(q_{r,s})_i(t)$ si riducono a costanti. Dunque il termine $(Q_{r,s})_i(t) e^{\alpha_i t}$ può essere maggiorato direttamente, a meno di un'opportuna costante, con $e^{\alpha_0 t}$, senza bisogno di utilizzare il Lemma 1. Per quegli autovalori λ_i per cui $\alpha_i = \operatorname{Re} \lambda_i < \alpha_0$, si può ricorrere al Lemma 1 con $\varepsilon = \alpha_0 - \alpha_i$. I corrispondenti termini $(Q_{r,s})_i(t) e^{\alpha_i t}$ potranno quindi essere maggiorati, sempre a meno di una costante, con $e^{\alpha_i t} e^{\varepsilon t} = e^{\alpha_0 t}$. Riassumiamo queste conclusioni nella seguente proposizione.

Proposizione B.3 *Sia A una matrice a coefficienti reali. Per ogni $\alpha > \alpha_0$, esiste $k_0 > 0$ tale che*

$$\|e^{tA}\| \leq k_0 e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0. \tag{B.14}$$

Se tutti gli autovalori di A con parte reale uguale ad α_0 hanno la molteplicità algebrica coincidente con la molteplicità geometrica, allora nella (B.14) si può prendere $\alpha = \alpha_0$.

Dalla (B.14) segue

$$\|e^{tA}c\| \leq k_0 \|c\| e^{\alpha t}, \quad t \geq 0 \tag{B.15}$$

per ogni vettore c di costanti arbitrarie.

B.10 Equazioni scalari di ordine $n > 1$

L'equazione differenziale scalare

$$\xi^{(n)} + a_1 \xi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \xi' + a_n \xi = 0 \tag{B.16}$$

può essere trattata come caso particolare della (B.1). Posto infatti

$$\xi = x_1, \quad \xi' = x_2, \quad \dots, \quad \xi^{(n-1)} = x_n$$

si ha

$$\begin{aligned} x_1' &= \xi' = x_2 \\ x_2' &= \xi'' = x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n' &= \xi^{(n)} = -a_1 x_n - \dots - a_n x_1 \end{aligned}$$

e, in forma vettoriale,

$$\dot{x} = Cx$$

dove si è posto $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{B.17}$$

Matrici C di questa forma si chiamano *matrici compagne* (companion). Così come la forma di Jordan, anch'esse consentono di visualizzare immediatamente un importante oggetto invariante. Si verifica infatti facilmente per induzione che se C è una matrice compagna come in (B.17) allora il suo polinomio caratteristico è

$$p_c(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n].$$

Con un procedimento formale, indicato con D l'operatore di derivazione, la (B.16) si può anche scrivere come

$$L(D)\xi = (D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_n)\xi = 0$$

ove $(-1)^n L(D) = p_c(D)$ si interpreta come un operatore differenziale lineare. Questa notazione offre talvolta dei vantaggi, anche perché operatori differenziali di tale forma si compongono facilmente tra loro.

Data una qualunque matrice A , e individuati i coefficienti a_1, \dots, a_n del suo polinomio caratteristico, possiamo associare ad A una matrice C in forma compagna, in modo che A e C abbiano lo stesso polinomio caratteristico, e quindi gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche.

In generale, non è però detto che A e C siano simili. Per esempio, la matrice identità ha polinomio caratteristico $p_c(\lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \lambda^i$ ma non è simile alla matrice compagna associata: la matrice identità è simile solo a se stessa.

La forma compagna dunque non è una forma canonica rispetto alla relazione di similitudine. In altre parole, non tutti i sistemi di equazioni in \mathbf{R}^n equivalgono ad una equazione scalare di ordine n .

Ha interesse in sé, ma anche in vista di applicazioni future, dare delle condizioni affinché una data matrice A e la matrice C in forma compagna associata ad A siano simili.

Teorema B.2 *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Le proprietà seguenti sono equivalenti:*

- (i) A è simile ad una matrice compagna;
- (ii) $\text{rank}(A - \lambda I) = n - 1$ per ogni autovalore λ di A ;
- (iii) la molteplicità geometrica di ogni autovalore di A è uguale a 1;
- (iv) il polinomio caratteristico di A coincide col suo polinomio minimo;
- (v) esiste un vettore $v \neq 0$ tale che gli n vettori

$$v, Av, A^2v, \dots, A^{n-1}v$$

sono linearmente indipendenti.

La dimostrazione completa del Teorema B.2 si trova per esempio in LaSalle J., *The stability and control of discrete process*, Spinger Verlag, 1986. Si presti principalmente attenzione all'equivalenza tra (i) e (v), di cui avremo bisogno nel seguito. Un vettore v con la proprietà enunciata al punto (v) viene detto un *vettore ciclico* per A .

La proprietà (iii) del Teorema B.2 implica in particolare che per ogni autovalore di M vi è un unico autovettore in senso proprio e quindi un'unica catena di eventuali autovettori generalizzati. Ne segue allora che l'integrale generale dell'equazione (B.16) si ottiene come combinazione lineare delle funzioni

$$\begin{aligned}
 & e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{\mu_1-1} e^{\lambda_1 t} \\
 & \dots\dots\dots \\
 & e^{\lambda_k t}, t e^{\lambda_k t}, \dots, t^{\mu_k-1} e^{\lambda_k t}
 \end{aligned}$$

essendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici distinte dell'equazione caratteristica

$$p_c(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{B.18}$$

e μ_1, \dots, μ_k le loro molteplicità algebriche. È appena il caso di osservare che la (B.18) si può scrivere direttamente dalla (B.16) senza bisogno di trasformare l'equazione nel sistema equivalente, sostituendo formalmente λ a ξ ed interpretando gli ordini di derivazione come potenze.

B.11 Sistemi non omogenei

Un sistema di equazioni differenziali lineari non omogeneo ha la forma

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{B.19}$$

ove $b(t)$ è una funzione continua $I \rightarrow \mathbf{R}^n$, e I è un intervallo di \mathbf{R} (per i nostri scopi, i casi significativi sono $I = \mathbf{R}$ oppure $I = [0, +\infty)$).

Esempio B.2 Un'equazione scalare non omogenea di ordine n

$$\xi^{(n)} + a_1 \xi^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \xi' + a_n \xi = g(t) \tag{B.20}$$

si può mettere nella forma (B.19) con A in forma compagna, e

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Elenchiamo alcuni fatti che ci interessano.

Fatto 1. Per ogni istante iniziale $t_0 \in I$ e ogni stato iniziale $x_0 \in \mathbf{R}^n$ esiste una e una sola soluzione $x = \psi(t)$ della (B.19) tale che $\psi(t_0) = x_0$; inoltre, $\psi(t)$ è definita per ogni $t \in I$.

Fatto 2. Se $\psi_1(t), \psi_2(t)$ sono soluzioni di (B.19) definite su I , allora $\psi_1(t) - \psi_2(t)$ sono soluzioni del cosiddetto sistema lineare omogeneo associato

$$\dot{x} = Ax. \tag{B.21}$$

Fatto 3. Se $\varphi(t)$ è una qualunque soluzione del sistema omogeneo associato (B.21) e se $\psi_0(t)$ è una soluzione del sistema non omogeneo (B.19), allora $\psi(t) + \psi_0(t)$ è una soluzione del sistema non omogeneo (B.19).

Fatto 4. (Principio di sovrapposizione) Se $\psi_1(t)$ è una soluzione del sistema (B.19) con $b(t) = b_1(t)$ e $\psi_2(t)$ è una soluzione del sistema (B.19) con $b(t) = b_2(t)$, allora $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ è una soluzione del sistema (B.19) con $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$.

Discende dai Fatti 2 e 3 che per determinare l'insieme di tutte le soluzioni di (B.19), al quale si dà ancora il nome di *integrale generale*, bisogna conoscere:

- (a) una matrice fondamentale $\Phi(t)$ della (B.21);
- (b) almeno una soluzione particolare della (B.19) stessa.

L'integrale generale sarà allora dato dalla formula

$$x = \psi(t) = \Phi(t)c + \psi_0(t) \quad (\text{B.22})$$

dove c è un vettore di costanti arbitrarie. La soluzione particolare corrispondente a una data condizione iniziale (t_0, x_0) si ottiene risolvendo il sistema algebrico

$$x_0 - \psi_0(t_0) = \Phi(t_0)c.$$

Se $t_0 = 0$, $\Phi(t) = e^{tA}$ e $\psi_0(0) = 0$, allora $c = x_0$.

Per quanto riguarda il punto (b), abbiamo il seguente risultato di carattere generale.

Proposizione B.4 La funzione $\psi_0(t) = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}b(s) ds$ fornisce la soluzione della (B.19) tale che $\psi_0(t_0) = 0$.

Grazie a questi risultati, possiamo riscrivere la (B.22) come

$$\psi(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t_0-s)A} b(s) ds \right) \quad (\text{B.23})$$

che prende il nome di *formula di Lagrange* (o *formula della variazione delle costanti*).

Una volta determinata e^{tA} , la difficoltà della (B.23), sta tutta nel calcolo dell'integrale, e quindi dipende da $b(t)$.

Equazioni come la (B.19) intervengono spesso nelle applicazioni, sia quelle studiate dalla fisica classica (in cui $b(t)$ si presenta come un termine forzante assegnato), sia quelle considerate nella teoria dei sistemi (in cui $b(t)$ si interpreta come un ingresso).

In ogni caso, è ragionevole supporre che $b(t)$ rappresenti un segnale prodotto da un esosistema. Gli esosistemi sono spesso semplici dispositivi lineari privi di termini forzanti. È quindi ragionevole dar importanza al caso in cui

$$b(t) = \sum_{h=1}^H P_h(t) e^{\gamma_h t}$$

dove ogni $P_h(t)$ è un polinomio e $\gamma_h \in \mathbf{C}$. In questi casi, come noto, il calcolo dell'integrale che compare nella (B.23) può essere evitato grazie al principio di sovrapposizione e a certe regole che permettono di ottenere direttamente una soluzione particolare.

Possiamo limitarci al caso in cui $b(t) = P(t)e^{\gamma t}$, con $P(t)$ polinomio a coefficienti vettoriali. Dobbiamo distinguere due casi.

Caso 1: γ non coincide con alcun autovalore di A . Esiste allora una soluzione particolare di (B.19) con la seguente struttura: $\psi_0(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ essendo Q un polinomio a coefficienti vettoriali dello stesso grado di P .

Caso 2: γ è un autovalore di A , di molteplicità algebrica $\mu \geq 1$. Esiste allora una soluzione particolare di (B.19) con la seguente struttura: $\psi_0(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ essendo Q un polinomio a coefficienti vettoriali, di grado $\deg Q = \deg P + \mu$ (in questo caso si dice che il sistema è in *risonanza*).

In entrambi i casi, i coefficienti di Q vanno determinati di volta in volta, imponendo l'identità $\dot{\psi}_0(t) = A\psi_0(t) + P(t)e^{\gamma t}$. Si noti che, in generale, con questo metodo si ottiene una soluzione particolare che non coincide con quella suggerita dalla Proposizione B.4 e della quale non è possibile assegnare il valore iniziale.

Insistiamo sul fatto che le regole esposte valgono anche se γ è complesso. Grazie a questa osservazione e in virtù delle formule

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

il procedimento descritto si estende a termini forzanti del tipo $b(t) = P(t) \cos \omega t$ oppure $b(t) = P(t) \sin \omega t$ (essendo sempre P un polinomio).

Osservazione B.5 Per un'equazione scalare del tipo (B.20), con $c(t) = p(t)e^{\gamma t}$, dove ora $p(t)$ è un polinomio a valori scalari, se siamo in caso di risonanza si può cercare una soluzione particolare con la struttura $\psi_0(t) = t^\mu q(t)e^{\gamma t}$, dove q è un polinomi dello stesso grado di $p(t)$.

Quando $t_0 = 0$, la (B.23) può anche essere scritta come

$$\psi(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s) ds,$$

che mostra come la soluzione sia la somma di due parti: la prima dipende solo dallo stato iniziale, la seconda dal termine forzante. Facendo uso della (B.14), possiamo dare una stima asintotica delle soluzioni anche per le equazioni non omogenee. Infatti, per ogni t e ogni $s \in [0, t]$ si ha

$$\|e^{(t-s)A}b(s)\| \leq k_0 \|b(s)\| e^{(t-s)\alpha}.$$

Supponiamo che $b(\cdot)$ sia limitata sull'intervallo $[0, +\infty)$, e sia

$$b_0 = \sup_{\sigma \geq 0} \|b(\sigma)\|.$$

Tornando alla (B.23) si ha

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\| &\leq k_0 \|x_0\| e^{\alpha t} + b_0 k_0 \int_0^t e^{(t-s)\alpha} ds \\ &= k_0 \|x_0\| e^{\alpha t} - \frac{b_0 k_0}{\alpha} \left[e^{(t-s)\alpha} \right]_0^t \\ &= k_0 \|x_0\| e^{\alpha t} + \frac{b_0 k_0}{\alpha} \left[e^{\alpha t} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Sia ora $\alpha < 0$; si ha $e^{\alpha t} \leq 1$ per $t > 0$ e inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha t} = 0$. Posto $\gamma = \frac{k_0}{|\alpha|}$ la disuguaglianza precedente si riduce a

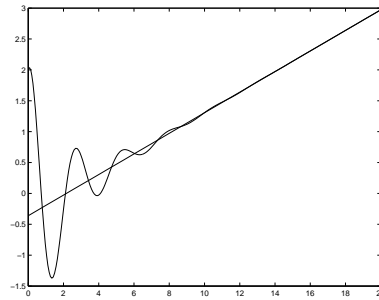


Figura B.3: Soluzione a regime e fase di transitorio.

$$\|\psi(t)\| \leq k_0 \|x_0\| e^{\alpha t} + \gamma \cdot b_0, \quad t \geq 0,$$

dalla quale discende immediatamente la proposizione seguente.

Proposizione B.5 *Se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale negativa e se $b(t)$ è una funzione limitata, allora tutte le soluzioni $x(t)$ della (B.19) sono limitate per $t \geq 0$.*

Continuiamo a supporre α negativo. Ricorrendo ancora alla (B.14) si deduce poi che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tA} x_0\| = 0$$

qualunque sia x_0 . Ciò significa che nella (B.23), per t sufficientemente grande, il termine $e^{tA} x_0$ si può trascurare e la soluzione “diventa” indipendente dallo stato iniziale. L’evoluzione temporale del sistema si usa pertanto dividere in due stadi: il *transitorio* (transient) in cui l’evoluzione risente visibilmente dell’influenza dello stato iniziale, e il *regime* (steady-state) in cui l’influenza dello stato iniziale è esaurita, e l’evoluzione dipende essenzialmente dal termine forzante.

Ovviamente questa distinzione non è rigorosa, in quanto $e^{tA} x_0$ non sarà mai esattamente zero per quanto grande si prenda t . Essa dipende dai margini di errore consentiti dagli strumenti di misura e dall’accuratezza richiesta, ma è tuttavia molto comoda ed espressiva, almeno sul piano euristico.

Esempio B.3 *Consideriamo l’equazione differenziale*

$$\ddot{\xi} + \dot{\xi} + 6\xi = t - 2.$$

Le radici caratteristiche dell’omogenea associata sono complesse coniugate, con parte reale negativa. Una soluzione particolare può essere presa della forma $\psi_0(t) = \frac{t}{6} - \frac{13}{36}$; essa rappresenta la soluzione di regime, e il suo grafico è tracciato nella Figura B.3. Nella stessa figura appare anche il grafico di una soluzione corrispondente a condizioni iniziali diverse. La fase di transitorio è quella in cui la differenza tra le due soluzioni è apprezzabile.

B.12 Un esempio: l'equazione di ordine 2

Alcune delle nozioni presentate in questo capitolo possono essere esemplificate mediante il caso particolarmente importante dell'equazione lineare di ordine 2

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = u(t) \quad (\text{B.24})$$

La (B.24) costituisce un modello per una grande varietà di problemi di natura applicata. L'esempio con cui abbiamo concluso il paragrafo precedente vi rientra come caso particolare.

Distinguiamo le varie forme che può prendere l'integrale generale, a seconda che l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (\text{B.25})$$

abbia soluzioni reali distinte o coincidenti, ovvero soluzioni complesse non reali. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (B.24)

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \quad (\text{B.26})$$

sarà dato da:

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{B.27})$$

se la (B.25) ha due soluzioni reali distinte λ_1, λ_2 ; da

$$(c_1 + tc_2)e^{\lambda t} \quad (\text{B.28})$$

se la (B.25) ha due soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; e da⁵

$$(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)e^{\alpha t} \quad (\text{B.29})$$

se la (B.25) ha radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Il comportamento delle soluzioni per $t \rightarrow +\infty$ dipende dal segno di λ_1 e λ_2 [rispettivamente, λ e α] nel caso (B.27) [rispettivamente, nei casi (B.28) e (B.29)].

In particolare, se $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ [rispettivamente, $\lambda < 0, \alpha < 0$] l'energia iniziale posseduta dal sistema (e stabilita per mezzo delle condizioni iniziali) viene dissipata:

- con andamento “monotono” nei casi (B.27) e (B.28), dopo eventuali “picchi” iniziali la cui presenza dipende dalla scelta di c_1 e c_2 :
- con andamento oscillatorio nel caso (B.29).

⁵Un modo semplice e diretto per ottenere la (B.29) consiste nel partire dalla forma

$$k_1 e^{\lambda t} + k_2 e^{\bar{\lambda} t}$$

che è analoga alla (B.27), ricordare che $e^{\alpha \pm i\beta} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm i \sin \beta t)$ e porre

$$c_1 = k_1 + k_2 \quad c_2 = -i(k_1 - k_2);$$

in particolare, c_1 e c_2 risultano reali se si sceglie $k_2 = \bar{k}_1$.

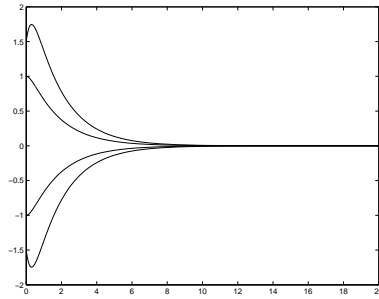


Figura B.4: Smorzamento nel caso di autovalori reali.

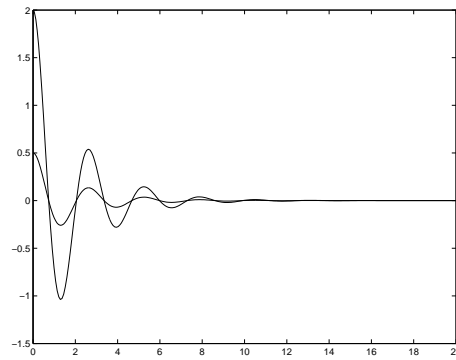


Figura B.5: Smorzamento nel caso di autovalori complessi.

Sofferamoci sul caso (B.29). Se $a = 0$ si ha anche $\alpha = 0$. Le soluzioni sono allora caratterizzate da oscillazioni la cui *frequenza* dipende da b (precisamente $\beta = \sqrt{-b}$) e la cui *ampiezza* dipende invece dalle condizioni iniziali e rimane costante. In questo caso si ha cioè conservazione dell'energia. Supponendo di essere sempre nel caso (B.29), applichiamo ora una sollecitazione del tipo

$$u(t) = p_1 \cos \omega t + p_2 \sin \omega t .$$

È noto che se $i\omega$ non è soluzione dell'equazione caratteristica (B.25), allora la (B.24) ha una soluzione del tipo

$$\varphi(t) = q_1 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t \tag{B.30}$$

e quindi un integrale generale del tipo

$$(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)e^{\alpha t} + q_1 \cos \omega t + q_2 \sin \omega t. \tag{B.31}$$

I coefficienti q_1 e q_2 nella (B.30) dipendono da p_1, p_2 e ω (oltre che da a e b) e possono essere trovati per sostituzione diretta ⁶. Conviene riscrivere la (B.30) in altro modo.

Posto $\rho = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, è chiaro che esiste un angolo γ tale che

$$q_1 = \rho \cos \gamma , \quad q_2 = \rho \sin \gamma .$$

Si ha così

$$\varphi(t) = \rho \cos(\omega t + \gamma) . \tag{B.32}$$

La grandezza γ si dice anche *fase* dell'oscillazione. Si noti che le condizioni iniziali contribuiscono a determinare le costanti c_1 e c_2 nella (B.31), ma non le grandezze q_1, q_2 (equivalentemente, ρ, γ) caratteristiche della (B.30).

Se $\alpha < 0$ (il che esclude che $i\omega$ possa risolvere l'equazione caratteristica), dopo un certo lasso di tempo il primo termine della (29) diventa trascurabile rispetto al secondo. Si evidenziano cioè quelle che nel paragrafo precedente abbiamo chiamato *fase transitoria* e *fase di regime*. Possiamo allora affermare che se $\alpha < 0$, a regime il segnale in uscita è un segnale che ha la stessa frequenza del segnale in ingresso. Nel "passaggio" attraverso il sistema, possono invece venire modificate la fase e l'ampiezza.

Il passaggio alla fase di regime risulterà tanto più rapido ed efficace quanto più grande risulta $-\alpha$.

Se $a = 0$ e se $\omega^2 = b$ allora $i\omega$ è soluzione dell'equazione caratteristica (B.25). L'integrale generale prende la forma

$$(c_1 + tq_1) \cos \omega t + (c_2 + tq_2) \sin \omega t . \tag{B.33}$$

Il segnale in uscita presenta dunque oscillazioni di ampiezza tendente a $+\infty$. Questo fenomeno prende il nome di *risonanza*.

Un metodo molto conveniente dal punto di vista pratico per la determinazione delle costanti caratteristiche della soluzione di regime (ampiezza e fase) in funzione delle costanti caratteristiche del termine forzante si basa sulla trasformata di Laplace: si tratta di un oggetto di studio tradizionale che può essere trovato sui più comuni manuali.

⁶Attenzione che $p_i = 0$ ($i = 1, 2$) non implica in generale $q_i = 0$.

C. Trasformata di Laplace

C.1 Definizione e proprietà

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione continua a tratti.

Definizione C.1 Si dice che f ha la proprietà di crescita esponenziale se esistono due costanti reali $M > 0$ e α tali che

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t} \quad \forall t \in [0, +\infty) . \quad (\text{C.1})$$

Ad ogni funzione continua a tratti con crescita esponenziale possiamo associare un numero σ_0 , definito come l'estremo inferiore dei numeri α tali che esiste un M per cui vale la (C.1). Chiameremo questo numero l'*ordine* di f . Dimostriamo una prima proprietà delle funzioni a crescita esponenziale.

Lemma C.1 Sia f una funzione a crescita esponenziale, e sia s un numero complesso qualunque tale che $\text{Re } s > \sigma_0$. Allora,

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) e^{-s\xi} = 0 .$$

Dimostrazione Se $H(\xi)$ è una funzione complessa di variabile reale, dire che $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} H(\xi) = 0$ significa dire che

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{Re } H(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \text{Im } H(\xi) = 0 .$$

Ma per ogni $z \in \mathbf{C}$, si ha

$$|\text{Re } z| \leq |z| \quad \text{e} \quad |\text{Im } z| \leq |z| .$$

Dunque è sufficiente provare che

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |f(\xi) e^{-s\xi}| = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} |f(\xi)| e^{-\xi \text{Re } s} = 0 .$$

Sia α un numero reale tale che $\sigma_0 < \alpha < \text{Re } s$. Si ha

$$|f(\xi)| e^{-\xi \text{Re } s} \leq M e^{\xi(\alpha - \text{Re } s)}$$

e l'asserto segue in quanto $\alpha - \text{Re } s < 0$.

■

La trasformata di Laplace è un'operazione che permette di associare ad ogni f continua a tratti con crescita esponenziale una funzione $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$.

Lemma C.2 *Sia f una funzione continua a tratti, con crescita esponenziale, di ordine σ_0 . Per ogni numero complesso s tale che $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

converge assolutamente.

Dimostrazione Dire che l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} H(t)dt$ di una funzione $H : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ converge assolutamente significa dire che convergono i due integrali

$$\int_0^{+\infty} |\operatorname{Re} H(t)| dt \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} |\operatorname{Im} H(t)| dt . \quad (\text{C.2})$$

Come abbiamo già osservato nella dimostrazione del Lemma C.1, è allora sufficiente far vedere che converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} |H(t)| dt .$$

Nel nostro caso,

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)||e^{-st}| = |f(t)|e^{-t\operatorname{Re} s} \leq Me^{t(\alpha - \operatorname{Re} s)} .$$

Per la definizione di σ_0 , α può essere scelto in modo che $\sigma_0 < \alpha < \operatorname{Re} s$ e dunque $\alpha - \operatorname{Re} s < 0$. I due integrali in (C.2) convergono allora per il criterio del confronto.

Si noti che posto $s = \sigma + i\omega$, si ha

$$\int_0^{+\infty} |\operatorname{Re}(f(t)e^{-st})| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-t\sigma} \cos(-\omega t)| dt$$

e

$$\int_0^{+\infty} |\operatorname{Im}(f(t)e^{-st})| dt = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-t\sigma} \sin(-\omega t)| dt .$$

■

Siamo ora pronti a dare la seguente definizione.

Definizione C.2 *Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 . Si chiama trasformata di Laplace di f la funzione complessa*

$$s \rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{C.3})$$

definita per $s \in \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \sigma_0\}$.

È opportuno osservare che le condizioni sotto le quali ci siamo messi possono essere indebolite: tutto quello di cui abbiamo bisogno è infatti la convergenza (assoluta) dell'integrale improprio su una regione non vuota del piano complesso. Si noti anche che F potrebbe coincidere con la restrizione al semipiano $\{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z > \sigma_0\}$ di una funzione $\tilde{F} : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ dotata di un dominio più grande. Infine, osserviamo che la (C.3) non perde significato se f è una funzione complessa di variabile reale.

L'operatore definito dalla (C.3) si indica spesso con la lettera \mathcal{L} . È anche comune l'uso di denotare con una stessa lettera (rispettivamente minuscola e maiuscola) la funzione da trasformare e la sua trasformata. Dunque, scriveremo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Passiamo ora in rassegna alcune proprietà della trasformata di Laplace.

Proprietà 1 (Linearità)

Siano f e g due funzioni definite in $[0, +\infty)$, continue a tratti, a crescita esponenziale, di ordine rispettivamente σ_1 e σ_2 . Allora, qualunque siano $a, b \in \mathbf{R}$ la funzione $af + bg$ è a crescita esponenziale, di ordine $\sigma_0 = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. Vale inoltre l'identità

$$aF(s) + bG(s) = \mathcal{L}[af(t) + bg(t)] \quad (\text{C.4})$$

per $\text{Re } s > \sigma_0$, dove $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

Dimostrazione La verifica che $af + bg$ è a crescita esponenziale è immediata, osservando che per ottenere la maggiorazione desiderata bisogna prendere un valore di α superiore sia a σ_1 che a σ_2 . La (C.4) segue poi subito dalle proprietà degli integrali. ■

Proprietà 2 (Cambiamento di scala)

Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\text{Re } s > \sigma_0$. Allora, qualunque sia $a > 0$, la funzione $g(t) = f(at)$ è a crescita esponenziale, di ordine $a\sigma_0$, e

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{per } \text{Re } s > a\sigma_0. \quad (\text{C.5})$$

Dimostrazione Dalla (C.1) si ha subito $|f(at)| \leq Me^{\alpha at} = Me^{\beta t}$ per $\beta = \alpha a > a\sigma_0$.

Posto poi $\tau = at$,

$$\int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-r\tau} d\tau = \frac{1}{a} F(r) \quad \text{purché } \text{Re } r > \sigma_0,$$

dove si è posto $r = \frac{s}{a}$. Ma $\text{Re } r = \text{Re } \frac{s}{a} = \frac{1}{a} \text{Re } s$, e dunque richiedere $\text{Re } r > \sigma_0$ equivale a richiedere $\text{Re } s > a\sigma_0$. ■

Proprietà 3 (Traslazione a destra)

Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\text{Re } s > \sigma_0$. Sia inoltre

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq t \leq c \\ f(t-c) & \text{per } t > c \end{cases},$$

ove $c > 0$. Allora g è una funzione a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e $\mathcal{L}[g(t)] = e^{-cs}F(s)$ per $\text{Re } s > \sigma_0$.

Dimostrazione La verifica che g è a crescita esponenziale è semplice ed è lasciata al lettore. Per la definizione di g si ha poi

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt = \int_c^{+\infty} f(t-c)e^{-st} dt .$$

Posto allora $\tau = t - c$ si ha

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-s(\tau+c)} d\tau = e^{-cs} F(s).$$

■

Proprietà 4 (Moltiplicazione per t^n)

Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha allora che $t^n f(t)$ è una funzione a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e che

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}, \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0 . \quad (\text{C.6})$$

Dimostrazione Che $t^n f(t)$ abbia crescita esponenziale, segue dal Lemma B.1 (Appendice B). La (C.6) si prova per induzione. Il caso $n = 0$ è infatti vero per definizione. Supposta vera la (C.6) per $n = k$, il caso $n = k + 1$ si ottiene derivando⁷ entrambi i membri rispetto ad s .

■

Proprietà 5 (Moltiplicazione per e^{at})

Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Sia inoltre $a \in \mathbf{R}$. Allora, la funzione $e^{at} f(t)$ è a crescita esponenziale, di ordine $\sigma_0 + a$, e

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a) \quad \operatorname{Re} s > \sigma_0 + a \quad (\text{C.7})$$

(similmente se $a \in \mathbf{C}$, con $\operatorname{Re} s > \sigma_0 + \operatorname{Re} a$).

Dimostrazione La verifica che $e^{at} f(t)$ è a crescita esponenziale non presta difficoltà. Si ha poi

$$\int_0^{+\infty} e^{at} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t(s-a)} dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tr} dt = F(r), \quad \operatorname{Re} r > \sigma_0$$

avendo posto $r = s - a$. Ma $\operatorname{Re} r = \operatorname{Re} s - \operatorname{Re} a$ e così $\operatorname{Re} r > \sigma_0$ equivale a $\operatorname{Re} s > \sigma_0 + \operatorname{Re} a$.

■

Le prossime proprietà sono molto importanti, in quanto ci dicono come si comporta l'operatore \mathcal{L} rispetto alle operazioni del calcolo differenziale e integrale.

Proprietà 6

Supponiamo che f sia una funzione continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 . Supponiamo inoltre che la sua derivata f' esista e sia continua a tratti in $[0, +\infty)$. Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, allora la trasformata di Laplace di f' esiste, e si ha

⁷Qui e anche in seguito, il punto cruciale della dimostrazione consiste nello "scambio" tra operazioni tipiche dell'Analisi Matematica: limiti, derivate, integrali. Affinché simili passaggi siano leciti, occorre che siano verificate certe proprietà di uniformità, facilmente deducibili se si opera con funzioni continue (o, a seconda dei casi, derivabili con continuità) e su domini compatti. Non approfondiamo ulteriormente questo argomento: osserviamo comunque che lavorando con variabili complesse e su intervalli non limitati vi sono delle difficoltà tecniche in più che, nelle nostre ipotesi, possono essere superate.

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + sF(s) \quad \text{per } \operatorname{Re} s > \sigma_0 . \quad (\text{C.8})$$

Dimostrazione Vogliamo calcolare

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^\xi f'(t)e^{-st} dt .$$

Procediamo per parti:

$$\int_0^\xi f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^\xi + s \int_0^\xi f(t)e^{-st} dt = f(\xi)e^{-s\xi} - f(0) + s \int_0^\xi f(t)e^{-st} dt .$$

Si conclude passando al limite per $\xi \rightarrow +\infty$, e tenendo conto del Lemma C.1. ■

Proprietà 7

Sia f una funzione definita in $[0, +\infty)$, continua a tratti, a crescita esponenziale, di ordine σ_0 , e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_0$. Allora, ogni primitiva di f è a crescita esponenziale, di ordine uguale a $\max\{\sigma_0, 0\}$ e si ha

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\rho) d\rho \right] = \frac{F(s)}{s} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > \max\{\sigma_0, 0\} . \quad (\text{C.9})$$

Dimostrazione La prima affermazione è lasciata per esercizio. Per quanto riguarda la (C.9), si usa ancora l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \left(\int_0^t f(\rho) d\rho \right) e^{-st} dt &= \int_0^\xi h(t)e^{-st} dt = \\ &= \frac{h(t)e^{-st}}{-s} \Big|_0^\xi + \frac{1}{s} \int_0^\xi h'(t)e^{-st} dt = \frac{h(\xi)e^{-s\xi}}{-s} - \frac{h(0)}{-s} + \frac{1}{s} \int_0^\xi f(t)e^{-st} dt . \end{aligned}$$

Si osserva che $h(0) = 0$, e si passa al limite per $\xi \rightarrow +\infty$. ■

Ovviamente le formule (C.8) e (C.9) possono essere iterate, dando luogo a:

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = -f^{(k-1)}(0) - sf^{(k-2)}(0) - \dots - s^{k-1}f(0) + s^k F(s) , \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} f(t_k) dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \right] = \frac{F(s)}{s^k} . \quad (\text{C.11})$$

Proprietà 8

Siano f e g due funzioni definite in $[0, +\infty)$, continue a tratti, a crescita esponenziale, di ordine rispettivamente σ_1 e σ_2 . Siano $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_1$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_2$. Sia inoltre

$$h(t) = \int_0^t f(t-\rho)g(\rho) d\rho . \quad (\text{C.12})$$

Allora, h è una funzione a crescita esponenziale e $\mathcal{L}[h(t)] = F(s) \cdot G(s)$ per $\operatorname{Re} s > \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$. ■

La Proprietà 8 dà una risposta al problema di trovare una funzione $h(t)$ tale che $\mathcal{L}[h(t)] = F(s) \cdot G(s)$, note che siano $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

Osserviamo che la (C.12) è ben definita, in quanto per $\rho \in [0, t]$ si ha $t - \rho \geq 0$. Considerando le seguenti estensioni delle funzioni f e g :

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ f(t) & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ g(t) & \text{se } t \geq 0 \end{cases} ,$$

possiamo scrivere

$$h(t) = \int_0^t f(t - \rho)g(\rho) d\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t - \rho)\tilde{g}(\rho) d\rho .$$

Siano ora $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ due funzioni qualunque, continue a tratti, definite su tutto \mathbf{R} . Si definisce *prodotto di convoluzione* tra p e q

$$(p * q)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t - \rho)q(\rho) d\rho ,$$

ammesso che l'integrale converga. Possiamo allora riformulare la (C.12) scrivendo

$$\mathcal{L}[(\tilde{f} * \tilde{g})(t)] = F(s) \cdot G(s) .$$

Dimostrazione della Proprietà 8 La dimostrazione che $h(t)$ è a crescita esponenziale, di ordine uguale a $\max\{\sigma_1, \sigma_2\}$, è un esercizio non difficile. Osserviamo quindi che, con le notazioni introdotte poc'anzi, si può anche scrivere $h(t) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(t - \rho)g(\rho) d\rho$. Dunque

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t - \rho)g(\rho) d\rho \right) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} g(\rho) \left(\int_0^{+\infty} \tilde{f}(t - \rho)e^{-st} dt \right) d\rho .$$

All'integrale che si trova all'interno della parentesi nell'ultima formula, possiamo applicare la Proprietà 3. Dunque

$$\mathcal{L}[h(t)] = \int_0^{+\infty} g(\rho)e^{-\rho s} F(s) d\rho = F(s) \int_0^{+\infty} g(\rho)e^{-\rho s} d\rho = F(s) \cdot G(s) .$$

■

C.2 Trasformate notevoli

C.2.1 Funzioni elementari

Vediamo adesso come si calcolano le trasformate di certe funzioni elementari.

Proposizione C.1 Sia $f(t) \equiv 1$ per $t \geq 0$. Allora

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > 0 .$$

Dimostrazione Si ha

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^{\xi} e^{-st} dt = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{e^{st}}{-s} \Big|_0^{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{e^{-s\xi}}{-s} + \frac{1}{s}.$$

La conclusione segue osservando che se $\operatorname{Re} s > 0$, $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{-s\xi} = 0$.

■

Proposizione C.2 *Le trasformate di Laplace delle restrizioni all'intervallo $[0, +\infty)$ delle potenze, delle funzioni esponenziali e delle funzioni circolari sono date da:*

$$\mathcal{L}[at] = \frac{a}{s^2} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > 0; \quad (\text{C.13})$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > 0 \quad (n \in \mathbf{N}); \quad (\text{C.14})$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > a; \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > 0; \quad (\text{C.16})$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{per } \operatorname{Re} s > 0. \quad (\text{C.17})$$

Dimostrazione Le formule (C.13), (C.14) e (C.15) discendono dalla Proposizione C.1 e dalle Proprietà 1, 2, 4 e 5. Mostriamo la validità della (C.13). Si ha

$$\mathcal{L}[at] = a\mathcal{L}[t] = a\mathcal{L}[t \cdot 1].$$

Applicando la Proprietà 4 e ricordando che $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$, si conclude allora che

$$\mathcal{L}[at] = \frac{a}{s^2}.$$

Passiamo adesso alla (C.14). Si ha

$$\mathcal{L}[t^n] = \mathcal{L}[t^n \cdot 1] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{ove} \quad F(s) = \frac{1}{s};$$

da cui segue, per induzione, $F^{(n)}(s) = (-1)^n n! s^{-(n+1)}$. Per quanto concerne la (C.15), basta osservare che

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \mathcal{L}[e^{at} \cdot 1] = \frac{1}{s-a}.$$

Passiamo ora alle trasformate delle funzioni circolari. Come abbiamo già detto, l'operatore \mathcal{L} si applica anche a funzioni $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$. Calcoliamo dunque $\mathcal{L}[\cos \omega t]$ ricordando la formula di Eulero

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}.$$

Si ha

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{1}{2} (\mathcal{L}[e^{i\omega t}] + \mathcal{L}[e^{-i\omega t}]) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+i\omega} + \frac{1}{s-i\omega} \right)$$

per $\operatorname{Re} s > 0$. Da ciò segue subito

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} .$$

La (C.17) si prova in modo analogo. ■

C.2.2 Funzioni discontinue

Dalle Proposizioni C.1 e C.2 si deducono le trasformate di quelle funzioni che si usano per rappresentare i segnali fondamentali nella Teoria dei sistemi. Per esempio, la funzione

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

si chiama *gradino unitario* (unit-step) o anche funzione di Heaviside. Essa schematizza un segnale che dallo stato nullo, passa improvvisamente al valore 1 (switch-on). La funzione $f(t) \equiv 1$ considerata nella Proposizione C.1 coincide con la restrizione di $U(t)$ a $[0, +\infty)$. Tenendo conto della definizione della trasformata di Laplace, con un piccolo abuso di notazione scriveremo⁸.

$$\mathcal{L}(U(t)) = \frac{1}{s} \quad (\text{Res} > 0) .$$

La funzione $U(t)$ permette di rappresentare altri tipi di segnali a andamento discontinuo, le cui trasformate possono essere facilmente calcolate in virtù delle Proprietà 1 e 3. Per esempio,

(i) *switch-on* per $t = c$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < c \\ 1 & \text{per } t \geq c \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad f(t) = U(t - c)$$

(ii) *switch-off* per $t = c$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \leq c \\ 0 & \text{per } t > c \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad f(t) = 1 - U(t - c) \text{ (oppure } = U(c - t))$$

(iii) *impulso rettangolare*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < a \\ 1 & \text{per } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{per } t > b \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad f(t) = U(t - a) - U(t - b) .$$

La funzione $U(t)$ serve anche a rappresentare mediante operazioni aritmetiche funzioni elementari a tratti. Per esempio, la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t < 1 \\ t^2 & \text{per } t \geq 1 \end{cases}$$

⁸Si osservi che la funzione complessa di variabile complessa che associa ad s il suo reciproco $1/s$ è definita per tutti i valori di $s \neq 0$. Tuttavia, non è corretto dire che tale funzione è la trasformata di Laplace di $U(t)$. La relazione $\mathcal{L}[U(t)] = 1/s$ vale infatti solo per $\text{Re } s > 0$. Dunque, $\mathcal{L}[U(t)]$ coincide con la restrizione al semipiano positivo della funzione $1/s$.

si può scrivere come

$$f(t) = t[1 - U(t - 1)] + t^2U(t - 1) .$$

Con il solito abuso di notazione, la (C.13) si può pensare come la trasformata di un segnale di tipo *rampa*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ at & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

mentre le (C.16), (C.17) forniscono le trasformate di segnali sinusoidali ma (attenzione!) nulli per $t < 0$.

C.2.3 Delta di Dirac

Tra i segnali tipicamente considerati nella teoria dei sistemi gioca un ruolo importante la *funzione impulso unitario*, usualmente denotata col simbolo $\delta(t)$ e detta anche δ di Dirac.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 . \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

La (C.18) schematizza un segnale di energia molto grande ma concentrata in un solo punto. Naturalmente la (C.18) è priva di senso dal punto di vista elementare, in quanto non corrisponde ad una funzione $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Esiste una teoria, chiamata *Teoria delle distribuzioni*, basata su una generalizzazione del concetto di funzione e all'interno della quale oggetti come la (C.18) possono essere rigorosamente studiati.

Per una trattazione molto semplificata, è sufficiente osservare che la $\delta(t)$ può essere immaginata come limite di opportune successioni; per esempio

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (U(t) - U(t - \varepsilon)) . \quad (\text{C.19})$$

Dalla (C.19) deduciamo in particolare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-k}^k \delta(t) dt = 1 \quad \forall k > 0 . \quad (\text{C.20})$$

Funzioni generalizzate come la $\delta(t)$ possono essere sommate e moltiplicate come funzioni ordinarie. Esse possono anche essere derivate (in un senso particolare), ma di ciò non avremo bisogno. Ci limitiamo ad alcune proprietà. Un impulso di intensità k concentrato in $a \in \mathbf{R}$ si rappresenta con $k \cdot \delta(t - a)$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot \delta(t - a) dt = k \quad (\text{C.21})$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a) \quad (\text{C.22})$$

per ogni funzione f continua nel punto $t = a$. Infine,

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = U(t) \quad (\text{C.23})$$

e

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1. \quad (\text{C.24})$$

Le formule (C.20)-(C.24) si dimostrano rigorosamente all'interno della Teoria delle distribuzioni. D'altronde, la loro plausibilità può essere sostenuta sulla base della (C.19). A titolo di esempio deduciamo la (C.24):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \mathcal{L} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} (U(t) - U(t - \varepsilon)) \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathcal{L}[U(t)] - \mathcal{L}[U(t - \varepsilon)] \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{e^{-\varepsilon s}}{s} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\varepsilon s} - 1}{\varepsilon s} = 1. \end{aligned}$$

Ovviamente, lo scambio tra l'operatore \mathcal{L} e il passaggio a limite richiederebbe una giustificazione formale.

C.2.4 Trasformata inversa

Accenniamo infine all'esistenza della trasformata inversa \mathcal{L}^{-1} .

Proposizione C.3 *Siano f e g continue in $[0, +\infty)$ e siano $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, entrambe definite per $\text{Re } s > \sigma_0$. Se $F(s) = G(s)$ per tutti gli s tali che $\text{Re } s > \sigma_0$, allora $f(t) = g(t)$ per tutti i $t \geq 0$.*

Questa proposizione giustifica l'introduzione di \mathcal{L}^{-1} , almeno relativamente alla classe delle funzioni continue e limitatamente all'intervallo $[0, +\infty)$. Più precisamente, essa garantisce l'unicità del passaggio inverso, da $F(s)$ a $f(t)$. La \mathcal{L}^{-1} può essere rappresentata da una formula opportuna, a cui però non avremo occasione di far ricorso. Ci sarà per altro utile osservare che \mathcal{L}^{-1} , come \mathcal{L} , agisce linearmente.

C.3 Applicazioni

Presenteremo adesso un metodo risolutivo basato sul passaggio alla trasformata di Laplace, prima per le equazioni differenziali di ordine n , quindi per i sistemi.

C.3.1 Equazioni scalari

Sia data un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b(t) \quad (\text{C.25})$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} . \tag{C.26}$$

Prima di tutto, un chiarimento tecnico. Sappiamo dalla teoria generale (Appendice B) che le soluzioni di (C.25) sono prolungabili su tutto l'intervallo di definizione di $b(t)$ (diciamo pure $-\infty < t < +\infty$), purché b sia continua o almeno continua a tratti. D'altra parte, \mathcal{L} opera su funzioni definite in $[0, +\infty)$, e la possibilità di effettuare eventuali traslazioni consiglia di trattare tali funzioni come nulle per $t < 0$.

Tecnicamente quindi, il metodo della trasformata di Laplace si applica pensando il termine forzante, lo stato e le sue derivate nulli per $t < 0$ (ciò può essere naturale per il termine forzante, ma è un po' artificiale per quanto riguarda lo stato, a meno che le condizioni iniziali non siano nulle). Conseguentemente, le informazioni sono limitate all'evoluzione futura, successiva cioè all'istante iniziale $t_0 = 0$.

Applichiamo ad entrambi i membri di (C.25) l'operatore \mathcal{L} ; tenendo conto della (C.26) e della (C.10) si ha:

$$\mathcal{L}[x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x' + a_nx] = \mathcal{L}[b(t)]$$

cioè

$$\begin{aligned} & (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n)X(s) - \\ & - \{s^{n-1}x(0) + s^{n-2}x'(0) + s^{n-3}x''(0) + \dots + x^{(n-1)}(0) + \\ & + [s^{n-2}x(0) + s^{n-3}x'(0) + \dots + x^{(n-2)}(0)]a_1 + \\ & + [s^{n-3}x(0) + \dots + x^{(n-3)}(0)]a_2 + \\ & + \dots + x(0)a_{n-1}\} = B(s) \end{aligned}$$

e quindi

$$p_c(s)X(s) - A(s) = B(s) \tag{C.27}$$

dove $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, $B(s) = \mathcal{L}[b(t)]$, $p_c(s)$ coincide col primo membro dell'equazione caratteristica (e quindi, eventualmente a meno del segno, col polinomio caratteristico del sistema associato) e

$$A(s) = A_0s^{n-1} + A_1s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \tag{C.28}$$

dove

$$A_0 = x_0, \quad A_1 = x_1 + a_1x_0, \quad \dots, \quad A_{n-1} = x_{n-1} + a_1x_{n-2} + \dots + a_{n-1}x_0 .$$

Si nota che:

- (i) $p_c(s)$ non dipende né dal termine forzante né dalle condizioni iniziali
- (ii) $\deg A(s) < \deg p_c(s)$.

Dalla (C.27) si ottiene formalmente

$$X(s) = \frac{A(s)}{p_c(s)} + \frac{B(s)}{p_c(s)} \quad (\text{C.29})$$

che è ben definita ogni volta che s non è soluzione dell'equazione caratteristica. La (C.29) fornisce in modo puramente algebrico la trasformata di Laplace della soluzione cercata. L'effettiva determinazione di $x(t)$ (per $t > 0$) dipende ora solo dalla nostra capacità di applicare \mathcal{L}^{-1} .

Notiamo che il secondo membro di (C.29) è formato da due addendi. Il primo contiene le informazioni relative ai dati iniziali ed è quello che si avrebbe se si dovesse risolvere l'omogenea associata (con gli stessi dati iniziali). Esso si presenta come una funzione razionale propria: una volta che questa sia stata sviluppata secondo fratti semplici l'applicazione di \mathcal{L}^{-1} non presta difficoltà. Il secondo addendo dipende dal termine forzante ed è quello che si avrebbe se si dovesse risolvere la (C.25) con condizioni iniziali nulle (invece che con le condizioni (C.26)). La difficoltà nell'applicazione di \mathcal{L}^{-1} dipende ora naturalmente dalla forma di b , ma se b è, come di regola, una funzione esponenziale (reale o complessa) eventualmente moltiplicata per un polinomio allora anche $B(s)/p_c(s)$ è una funzione razionale e si può procedere come sopra indicato.

La (C.29) permette d'altra parte di leggere certe proprietà importanti delle soluzioni anche senza applicare effettivamente la \mathcal{L}^{-1} . A titolo di esempio facciamo in particolare vedere come dalla (C.29) si può dedurre il comportamento asintotico (cioè per $t \rightarrow +\infty$) di $x(t)$.

Teorema C.1 (*Del valore finale*) Sia $f(t)$ derivabile e sia $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, con $\text{Re } s > \sigma_0$ ove $\sigma_0 \leq 0$. Supponiamo che il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ esista finito. Allora,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (\text{C.30})$$

Dimostrazione Partiamo dalla (C.8):

$$\mathcal{L}[f'(t)] = -f(0) + sF(s) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-st} dt.$$

Poiché $\sigma_0 \leq 0$, l'origine di \mathbf{C} è certamente un punto d'accumulazione per il dominio di F . Dunque possiamo passare al limite per $s \rightarrow 0$. Portando il limite sotto il segno di integrale (si ricordi a questo proposito la nota 7), si ha

$$-f(0) + \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt = f(t) \Big|_0^{+\infty}$$

da cui la (C.30). ■

L'ipotesi che il limite di $f(t)$ per $t \rightarrow +\infty$ esista finito non è eliminabile. Per convincersene, si consideri la funzione $f(t) = \cos t$. Si ha

$$\mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}$$

e $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{s^2 + 1} = 0$ mentre $\lim_{t \rightarrow +\infty} \cos t$ non esiste.

Torniamo alla (C.29). Poiché per definizione una trasformata di Laplace ha un dominio del tipo $\{z \in \mathbf{C} : \text{Re } z > \sigma_0\}$, (C.29) è certamente non definita per ogni $s \in \mathbf{C}$ per cui esiste una radice

ρ dell'equazione caratteristica tale che $\operatorname{Re} s \leq \operatorname{Re} \rho$. Il Teorema del valore finale non è dunque applicabile se esistono soluzioni dell'equazione $p_c(s) = 0$ con parte reale positiva. Supponiamo allora⁹ che $\operatorname{Re} \rho < 0$ per ogni ρ tale che $p_c(\rho) = 0$. È chiaro che $p_c(0) \neq 0$ e, quindi, se $b(t) \equiv 0$, si ha $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0$.

In altre parole, nelle condizioni in cui ci siamo messi il limite per $t \rightarrow +\infty$ di una qualunque soluzione $x(t)$, se esiste, è necessariamente uguale a zero¹⁰.

C.3.2 Sistemi lineari

Passiamo adesso a considerare in generale i sistemi di equazioni differenziali lineari. A questo scopo, dobbiamo generalizzare i nostri strumenti, ammettendo la possibilità di applicare \mathcal{L} a funzioni vettoriali $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ o $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{C}^n$.

Ciò può essere fatto senza difficoltà. Le proprietà note della trasformata di Laplace si estendono egualmente senza difficoltà, e in più si ha che

$$\mathcal{L}[Mf(t)] = M\mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{C.31})$$

per ogni matrice M a coefficienti costanti reali o complessi.

Ci interessano particolarmente la trasformata dell'esponenziale, e la possibilità di generalizzare la formula relativa al prodotto di convoluzione (Proprietà 8).

Proposizione C.4 *Sia A una matrice quadrata (reale o complessa), c un vettore di costanti e $b(t)$ una funzione vettoriale le cui componenti siano funzioni continue a tratti e a crescita esponenziale. Sia σ_0 il massimo delle parti reali degli autovalori di A . Allora, per ogni $s \in \mathbf{C}$ tale che $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, si ha:*

$$\mathcal{L}[e^{At}c] = -(A - sI)^{-1}c, \quad (\text{C.32})$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{(t-\rho)A}b(\rho)d\rho\right] = -(A - sI)^{-1}B(s). \quad (\text{C.33})$$

Dimostrazione Per definizione,

$$\mathcal{L}[e^{tA}c] = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{tA}cdt = \int_0^{+\infty} e^{t(A-sI)}cdt = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi e^{t(A-sI)}cdt.$$

Se $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, allora $\det(A - sI) \neq 0$ e quindi $(A - sI)^{-1}$ esiste. D'altra parte è noto che per ogni matrice quadrata M , l'esponenziale e^{tM} è derivabile e si ha $(e^{tM})' = Me^{tM} = e^{tM}M$. Di qui segue che se M è invertibile, $\int e^{tM} = M^{-1}e^{tM} = e^{tM}M^{-1}$. Possiamo allora procedere nel nostro calcolo.

$$\mathcal{L}[e^{tA}c] = \lim_{\xi \rightarrow \infty} (A - sI)^{-1}e^{t(A-sI)}c \Big|_0^\xi = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ (A - sI)^{-1}e^{\xi(A-sI)}c - (A - sI)^{-1}c \right\}.$$

Dall'ipotesi che $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ segue ancora che gli autovalori di $A - sI$ hanno tutti parte reale negativa. È infatti chiaro che ogni autovalore μ di $A - sI$ è della forma $\mu = \lambda - s$ dove λ è un autovalore di A . Ma allora $\operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} s < 0$.

⁹Lasciamo per ora da parte il caso, più complicato, in cui vi sono soluzioni dell'equazione caratteristica aventi parte reale nulla.

¹⁰Si ritrova, per questa via, un risultato ben noto.

Come sappiamo, se gli autovalori di una matrice M hanno tutti parte reale negativa, allora $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} e^{\xi M} c = 0$, qualunque sia c . In conclusione,

$$\mathcal{L}[e^{tA}c] = -(A - sI)^{-1}c$$

come dovevasi dimostrare. Per quanto riguarda la (C.33), osserviamo che

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^{(t-\rho)A}b(\rho)d\rho\right] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t e^{(t-\rho)A}b(\rho)d\rho\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\rho A} \left(\int_0^{+\infty} e^{t(A-sI)} dt\right) b(\rho) d\rho .$$

Si noti come cambiano gli estremi di integrazione in seguito allo scambio dell'ordine di integrazione. Proseguendo, e sfruttando come abbiamo fatto in precedenza l'ipotesi che $\text{Re } s > \sigma_0$, si ha infine

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_0^t e^{(t-\rho)A}b(\rho)d\rho\right] &= -\int_0^{+\infty} e^{-\rho A}(A - sI)^{-1}e^{\rho(A-sI)}b(\rho)d\rho = \\ &= -\int_0^{+\infty} (A - sI)^{-1}e^{-s\rho}b(\rho)d\rho = \\ &= -(A - sI)^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-s\rho}b(\rho)d\rho = -(A - sI)^{-1}B(s) . \end{aligned}$$

■

Siamo finalmente pronti per applicare, come ci eravamo ripromessi, la trasformata di Laplace allo studio dei sistemi di equazioni lineari. Supponiamo dunque di voler trovare la soluzione di

$$\dot{x} = Ax + b(t) \tag{C.34}$$

tale che $x(0) = x_0$. Prendendo formalmente la trasformata di Laplace di entrambi i membri, si ha

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x_0 = \mathcal{L}[Ax(t)] + \mathcal{L}[b(t)] = AX(s) + B(S)$$

da cui

$$-(A - sI)X(s) = x_0 + B(s) .$$

La matrice $(A - sI)$ è invertibile per ogni $s \in \mathbf{C}$ che non sia un autovalore di A . Per tali valori di s , è dunque lecito scrivere

$$X(s) = -(A - sI)^{-1}x_0 - (A - sI)^{-1}B(s) .$$

Quest'ultima vale certamente, in particolare, per $\text{Re } s > \sigma_0$, dove σ_0 designa il massimo delle parti reali degli autovalori di A . Confrontando con la (C.29), si vede che il ruolo del polinomio $p_c(s)$ è stato assunto dalla matrice $(A - sI)$. Anche in questo caso, distinguiamo due addendi, le cui antitrasformate si ricavano immediatamente dalle formule (C.32) e (C.33). In conclusione, si ritrova l'integrale generale nella nota forma

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds . \tag{C.35}$$

C.4 Un esempio

Si voglia risolvere l'equazione

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1$$

nel metodo della trasformata di Laplace. Si ha, per $t > 0$, $\text{Re } s > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{x}] + 3\mathcal{L}[\dot{x}] + 2\mathcal{L}[x] &= \\ &= -\dot{x}(0) + s\mathcal{L}[\dot{x}] + 3\mathcal{L}[\dot{x}] + 2\mathcal{L}[x] = \\ &= -\dot{x}(0) + (s+3)(-x(0) + sX(s)) + 2X(s) = \\ &= (s^2 + 3s + 2)X(s) - x(0)(s+3) - \dot{x}(0) = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Siano $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ le condizioni iniziali. Allora

$$X(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} + \frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{s^2+3s+1}{s(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} \right).$$

Possiamo ora applicare \mathcal{L}^{-1} , in quanto siamo pervenuti ad una somma di trasformate di funzioni elementari note. Si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t} + 2e^{-t}).$$

Convien soffermarsi un momento a riflettere sulle varie fasi dei calcoli svolti. In particolare, osserviamo che $X(s)$ si era ottenuto prima come somma di due addendi: si è quindi passati ad un'unica espressione razionale e si è infine eseguita la decomposizione in fratti semplici. Questo modo di procedere è in generale il più conveniente dal punto di vista della rapidità di esecuzione dei calcoli.

Può essere tuttavia istruttivo eseguire i calcoli in modo diverso, e cioè mantenendo separati il termine che contiene le informazioni sulle condizioni iniziali da quello che contiene le informazioni sul termine forzante. Si ha:

$$X(s) = \left(-\frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} - \frac{2}{s+1} \right)$$

da cui

$$x(t) = (-e^{-2t} + 2e^{-t}) + \left[\frac{1}{2} (e^{-2t} - 2e^{-t}) + \frac{1}{2} \right].$$

Risulta ora facilmente leggibile la composizione di $x(t)$. La prima parentesi corrisponde alla soluzione che si sarebbe avuta in assenza del termine forzante (cioè, la soluzione dell'equazione omogenea associata) con le stesse condizioni iniziali. Poiché le radici dell'equazione caratteristica sono negative, questa parte si esaurisce nel transitorio.

La parentesi quadra rappresenta la soluzione che si sarebbe avuta imponendo condizioni iniziali nulle. Questa si compone di una parte costante, che coincide con la soluzione di regime, e di alcuni termini che sono destinati anch'essi ad esaurirsi nel transitorio. La presenza di questi termini è

dovuta alla necessità di compensare i valori iniziali della soluzione di regime che in questo caso, come in generale, non sono nulli.

Quando il termine forzante non è una semplice costante, entrano in gioco polinomi di grado superiore da fattorizzare. Per esempio se il termine forzante fosse uguale a $\sin t$, allora si perviene a:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)(s^2+1)} = \\ &= \frac{s^2+3s^2+s+4}{(s+2)(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{10} \left(\frac{-12}{s+2} + \frac{25}{s+1} + \frac{1-3s}{s^2+1} \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$x(t) = \frac{1}{10} \left(-12e^{-2t} + 25e^{-t} + \sin t - 3 \cos t \right).$$

E. Raccolta di esercizi

E.1 Esercizi sui sistemi di equazioni differenziali lineari

E.1.1 Integrale generale e soluzioni particolari di sistemi omogenei di due equazioni in due incognite

Esercizio E.1 Calcolare la matrice esponenziale e^A per ciascuna delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi determinare, in entrambi i casi, l'integrale generale del sistema $\dot{x} = Ax$ e la soluzione particolare che corrisponde alle condizioni $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio E.2 Si consideri il sistema in due incognite

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -4y \end{cases}$$

a) Determinarne l'integrale generale.

b) Scrivere la soluzione particolare tale che $x(0) = y(0) = 2$.

Esercizio E.3 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x_1' + x_2' = 5x_1 \\ 4x_1' - x_2' = -5x_2 \end{cases}$$

scrivere l'integrale generale sia in forma complessa che in forma reale. Quindi trovare la soluzione corrispondente alle condizioni $x_1(\pi/3) = 0$, $x_2(\pi/3) = 4e^{\pi/3}$.

Esercizio E.4 Scrivere l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x'' + x + y = 0 \\ y' - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Trovare in particolare tutte le soluzioni costanti, e tutte quelle che verificano la condizione $x(0) = 0$.

E.1.2 Integrale generale e soluzioni particolari di sistemi omogenei di tre equazioni in tre incognite

Esercizio E.5 Scrivere l'integrale generale dei sistemi di equazioni differenziali definiti dalle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 6 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.6 Scrivere in forma reale l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari definito dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.7 Determinare l'integrale generale del sistema lineare omogeneo $\dot{x} = Ax$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.8 Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

dipendente dal parametro reale k , dire per quali valori di k

(i) le soluzioni sono tutte limitate per $t \in \mathbf{R}$

(ii) le soluzioni sono tutte limitate per $t \in [0, +\infty)$

Dire inoltre per quali valori di k il polinomio caratteristico della matrice ha radici multiple.

Esercizio E.9 Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{4}{3}z \\ \dot{y} = -x + 2y \\ \dot{z} = -3x - 2z \end{cases}.$$

Dire inoltre per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ sussiste la seguente proprietà: per ogni soluzione $\varphi(t)$ esiste una costante $M > 0$ tale che $\|\varphi(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ ($t \geq 0$).

Esercizio E.10 È dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_3 \end{cases}$$

a) Individuare la matrice A del sistema, e metterla in forma di Jordan trovando la matrice P che opera la trasformazione

b) Scrivere l'integrale generale, e determinare la soluzione particolare per cui $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$.

c) Dire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è possibile dare una maggiorazione del tipo

$$\|\varphi(t)\| \leq Ke^{\alpha t}$$

per tutte le soluzioni $\varphi(t)$ e per tutti i valori $t \geq 0$.

Esercizio E.11 È dato il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 2x_3 \end{cases}.$$

a) Scrivere il sistema in forma di Jordan.

b) Determinare una matrice fondamentale del sistema.

c) Indicata con $x(t)$ la generica soluzione, dire quali delle seguenti affermazioni è corretta e spiegare perché:

(c.1) $\exists M > 0$ tale che $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|$ per ogni $t \geq 0$

(c.2) $\exists M > 0$ tale che $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^t$ per ogni $t \geq 0$

(c.2) $\exists M > 0$ tale che $\|x(t)\| \leq M\|x(0)\|e^{9t/8}$ per ogni $t \geq 0$

E.1.3 Sistemi non omogenei ed equazioni lineari di ordine superiore

Esercizio E.12 Risolvere i seguenti problemi ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + 2x_3 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 - 2x_3 + e^t \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = -1 \end{cases}$$

Esercizio E.13 Determinare l'integrale generale del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + t \\ \dot{y} = -2x + y + e^{-t} \end{cases}.$$

Esercizio E.14 Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x''' - x'' + 3x' + 5x = \sin t$$

e quindi la soluzione corrispondente alle condizioni $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.

Esercizio E.15 Si consideri l'equazione scalare di ordine 3

$$(1) \quad x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 0 .$$

a) Determinarne l'integrale generale.

b) Scrivere il sistema equivalente

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ e A matrice in forma compagna.

c) Mettere la matrice A in forma di Jordan e scrivere la matrice P che opera la trasformazione

d) Trovare la soluzione del problema ai valori iniziali

$$(3) \quad \begin{cases} x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2 \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1 . \end{cases}$$

E.2 Esercizi sulla stabilità dei sistemi lineari

E.2.1 Stabilità dei sistemi piani e funzioni di Liapunov

Esercizio E.16 Dimostrare che la forma quadratica a coefficienti reali $ax^2 + bxy + cy^2$, con $a > 0$, è definita positiva se e solo se $b^2 - 4ac < 0$.

Esercizio E.17 Si consideri il sistema lineare omogeneo

$$\dot{x} = Ax$$

dove A è la matrice $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Verificare che l'origine è asintoticamente stabile. Dire inoltre per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ esiste una funzione di Liapunov della forma

$$V(x, y) = x^2 + xy + ky^2 .$$

Esercizio E.18 Dato il sistema lineare omogeneo

$$\dot{x} = Ax , \quad x \in \mathbf{R}^n$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Verificare che l'origine è asintoticamente stabile.

b) Trovare, se esistono, i valori di m per cui si ha una funzione di Liapunov della forma $V(x) = x_1^2 + mx_1x_2 + x_2^2$.

Esercizio E.19 Verificare che $V(x, y) = x^2 + y^2$ è una funzione di Liapunov per $x = y = 0$ per entrambi i sistemi lineari

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (B) \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = -x \end{cases} .$$

Verificare inoltre che $V(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ è una funzione di Liapunov in senso stretto per il sistema (B). Si può trovare una funzione di Liapunov in senso stretto per il sistema (A) ?

Esercizio E.20 Determinare k in modo che $V(x, y) = x^2 + k^2y^2$ sia una funzione di Liapunov in senso stretto per $x = y = 0$ per il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

E.2.2 Stabilità dei sistemi piani ed equazione matriciale di Liapunov

Esercizio E.21 Verificare che l'origine è asintoticamente stabile per il sistema bidimensionale lineare definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Determinare quindi P in modo che la funzione $V(x) = x^t P x$ sia una funzione di Liapunov per tale sistema, risolvendo l'equazione matriciale

$$A^t P + P A = -I .$$

Esercizio E.22 È dato il sistema lineare omogeneo

$$\dot{x} = A x , \quad x \in \mathbf{R}^n$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

a) Verificare che l'origine è stabile.

b) Trovare una funzione di Liapunov della forma $V(x) = x^t P x$.

Esercizio E.23 Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

1) Verificare che l'origine è asintoticamente stabile.

2) Determinare una funzione di Liapunov.

Esercizio E.24 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}.$$

- a) Verificare che non esistono funzioni di Liapunov in senso stretto della forma $x^2 + ky^2$ ($k \in \mathbf{R}$).
 b) Determinare una funzione di Liapunov quadratica per il sistema dato, facendo uso dell'equazione matriciale di Liapunov.

Esercizio E.25 Verificare che l'origine è attrattiva per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

Trovare $k \in \mathbf{R}$ in modo che $V(x, y) = x^2 + 3xy + ky^2$ sia una funzione di Liapunov. Quindi trovare un'altra funzione di Liapunov risolvendo l'equazione matriciale di Liapunov.

E.2.3 Stabilità dei sistemi in dimensione maggiore di 2

Esercizio E.26 Utilizzando il criterio degli autovalori, discutere la stabilità dell'origine per i seguenti sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_2 - 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}.$$

Esercizio E.27 Usando il criterio di Routh-Hurwitz, si studi la stabilità dell'origine dei sistemi associati alle seguenti equazioni lineari

$$\begin{cases} x''' + 2x'' + 5x' + 8x = 0 \\ x^{(iv)} + 2x''' + 5x'' + 2x' + x = 0 \end{cases}.$$

Esercizio E.28 Studiare la stabilità dell'origine per i seguenti sistemi, scegliendo di volta in volta il criterio più opportuno.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -2x_1 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}.$$

Esercizio E.29 Si consideri l'equazione scalare di ordine 2

$$(1) \quad x'' + 7x' + 12x = 0.$$

- a) Determinarne l'integrale generale.
 b) Scrivere il sistema equivalente

$$(2) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ e A matrice in forma compagna

c) Verificare che l'origine è attrattiva per il sistema (2) e trovare una funzione di Lyapunov quadratica per tale sistema

d) Possiamo dire che il sistema equivalente all'equazione $x^{(iv)} + 7x''' + 12x'' = 0$ è stabile? (giustificare la risposta).

Esercizio E.30 Provare che se P è una matrice simmetrica definita positiva, allora l'origine è asintoticamente stabile per il sistema

$$\dot{x} = -Px .$$

E.3 Esercizi sulle proprietà strutturali dei sistemi con ingressi

E.3.1 Insieme raggiungibile, controllabilità, osservabilità

Esercizio E.31 Studiare l'insieme raggiungibile al tempo T , al variare dello stato iniziale, per il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1$$

Esercizio E.32 Determinare lo spazio raggiungibile (in assenza di vincoli sul controllo) e lo spazio di non-osservabilità per i sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_3 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 + 4x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - x_3 \\ y = x_1 + x_3 \end{cases}$$

Esercizio E.33 Verificare che se A è una matrice $n \times n$ in forma compagna e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, allora il sistema $\dot{x} = Ax + bu$ è completamente controllabile.

Esercizio E.34 Verificare che il sistema definito dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è completamente controllabile.

Esercizio E.35 Si consideri il sistema lineare con ingresso scalare

$$\dot{x} = Ax + ub$$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori di $k \in \mathbf{R}$ per cui il sistema risulta completamente controllabile.

Esercizio E.36 Si consideri il sistema con ingresso scalare definito da

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + ub \\ y = c^t x \end{cases} \quad x \in \mathbf{R}^3$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Verificare che tale sistema è completamente controllabile ma non completamente osservabile.
 b) Scrivere la forma compagna C di A (non è richiesto trovare esplicitamente il cambiamento di coordinate). È vero che A e C sono simili?

Esercizio E.37 Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2z \\ \dot{y} = 2x + 2z \\ \dot{z} = -3x - 3y + u \end{cases}$$

con ingresso scalare u .

- a) Determinare, per mezzo della matrice di controllabilità, la dimensione dello spazio degli stati raggiungibili dall'origine. Quindi indicare una base per tale spazio.
 b) Scrivere la forma di Jordan e la forma compagna della matrice A che definisce il sistema.

E.3.2 Forma di Kalman

Esercizio E.38 Ridurre a forma di Kalman il sistema definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.39 È dato il sistema lineare con ingresso scalare

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x_1 - y + u \\ \dot{y} = -4x + 3y + 2u \end{cases}$$

- a) Verificare che il sistema non è completamente controllabile.
 b) Determinarne la forma di Kalman.

E.3.3 Stabilità BIBS

Esercizio E.40 Si consideri il sistema con ingresso scalare definito dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z + u \\ \dot{y} = 4x + y + 3z + u \\ \dot{z} = -2x - y - 2z - u . \end{cases}$$

- Verificare che tale sistema non è completamente controllabile.
- Mettere il sistema in forma di Kalman.
- Dire se il sistema possiede la proprietà di stabilità BIBS, giustificando la risposta.

Esercizio E.41 Si consideri il sistema lineare con ingresso scalare

$$\dot{x} = Ax + ub$$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che il sistema non è completamente controllabile, e scriverne la forma di Kalman. È possibile stabilizzare il sistema? Possiamo affermare che il sistema è stabile in senso BIBO?

Esercizio E.42 Dire se il seguente sistema inizializzato a zero è esternamente stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + u_2 \end{cases}$$

Esercizio E.43 Si consideri il sistema inizializzato a zero

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u_2 \\ \dot{x}_3 = 2x_3 \end{cases}$$

Dire se è esternamente stabile.

Esercizio E.44 Dire se il seguente sistema, con inizializzazione arbitraria, è esternamente stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3 + u_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + 2u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - x_3 + u_3 \end{cases}$$

E.3.4 Stabilizzabilità, assegnabilità dei poli

Esercizio E.45 È dato il sistema lineare con ingressi

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + \alpha y + u \\ \dot{y} = -2x - y - 2u . \end{cases}$$

- Determinare α in modo che il sistema non sia completamente controllabile;
- Per tale valore di α , mettere il sistema nella forma di Kalman;
- Sempre per lo stesso valore di α , determinare una retroazione stabilizzante.

Esercizio E.46 Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Provare che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + ub \\ y = c^t x \end{cases}$$

è completamente controllabile ma non completamente osservabile.

(b) Verificare che il sistema

$$\dot{x} = Ax + ub$$

con $u = 0$ non è stabile, e spiegare perché può essere stabilizzato.

Esercizio E.47 È dato il sistema a ingresso scalare

$$(3) \quad \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u}b$$

$$\text{dove } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che il sistema è completamente controllabile.

b) Mettere il sistema in forma di Brunovski

c) Verificare che il sistema, con $u = 0$, non è stabile, e determinare una retroazione stabilizzante per il sistema (3).

Esercizio E.48 È dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 2x_2 + x_3 - 2u \\ y = x_2 + x_3 \end{cases}$$

a) Provare che il sistema è completamente controllabile ma non completamente osservabile.

b) Verificare che il sistema con $u = 0$ non è stabile. Possiamo affermare che il sistema è stabilizzabile? (giustificare la risposta).

Esercizio E.49 Sia dato il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che il sistema non forzato (con $u = 0$) non è stabile.

b) Verificare che il sistema non è completamente controllabile.

c) Mettere il sistema nella forma di Kalman.

d) Determinare una retroazione stabilizzante (se esiste).

Esercizio E.50 Si consideri il sistema $\dot{x} = Ax + ub$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- 1) Verificare che l'origine non è stabile per il sistema libero (con $u = 0$).
- 2) Verificare che il sistema non è completamente controllabile, e metterlo in forma di Kalman.
- 3) Dire se è possibile stabilizzare il sistema e, in caso affermativo, indicare una retroazione stabilizzante.

Esercizio E.51 Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x - y + u \end{cases}$$

determinare una controreazione $u = ax + by$ in modo che:

- (1) il sistema controreazionato abbia l'autovalore $\lambda = -1$ con molteplicità 2
- (2) il sistema controreazionato abbia gli autovalori $\lambda = 1 \pm i2$
- (3) il sistema controreazionato abbia autovalori con parte reale minore di -3

[si suggerisce di effettuare il cambiamento di coordinate $X = x$, $Y = x + y$]

Esercizio E.52 Dato il sistema a ingresso scalare definito dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

dire se è stabilizzabile e, in caso positivo, indicare una controreazione stabilizzante. Dire inoltre se il sistema è superstabilizzabile.

E.4 Esercizi su trasformata di Laplace e applicazioni alle equazioni differenziali

Esercizio E.53 Scrivere la trasformata delle seguenti funzioni

- a) $f(t) = 2 + t - 3t^3$
- b) $f(t) = e^{2t} + te^{-t}$
- c) $f(t) = te^{it}$

Esercizio E.54 Scrivere la trasformata delle seguenti funzioni

- a) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t \leq 4 \\ 1 & \text{se } t > 4 \end{cases},$
- b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \leq 2 \\ 2 & \text{se } t > 2 \end{cases}.$

Esercizio E.55 Scrivere le trasformate delle funzioni

a) $f(t) = \sin^2 3t$

b) $f(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{4})$.

Esercizio E.56 Scrivere le trasformate delle funzioni $f(t) = \sinh t$ e $f(t) = \cosh t$.

Esercizio E.57 Sia $f(t)$ una funzione continua a tratti e coincidente, per $t \geq 0$, con una funzione periodica di periodo $T > 0$. Provare che

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st} dt .$$

Esercizio E.58 Determinare l'antitrasformata delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{2s-1}{s^2}, & F(s) &= \frac{e^{-s}}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s^2-s}, & F(s) &= \frac{s}{s^2+s-6} \\ F(s) &= \frac{2s-1}{(s-1)^2}, & F(s) &= \frac{1}{s(s+2)^2} \\ F(s) &= \frac{1}{s^2+s+1}, & F(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)}. \end{aligned}$$

Esercizio E.59 Utilizzando la regola della trasformata del prodotto di convoluzione, trovare l'antitrasformata di

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2}, \quad F(s) = \frac{1}{s(s^2+4)} .$$

Esercizio E.60 Risolvere i seguenti problemi ai valori iniziali, utilizzando la trasformata di Laplace:

a) $6x'' - 5x' + x = 0, \quad x(0) = x'(0) = 1$

b) $x'' - 10x' + 21x = t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1$

c) $x'' + 7x' + 12x = e^t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0$

d) $x'' - 3x' - 10x = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

Esercizio E.61 Si consideri l'equazione scalare di ordine 2

$$x'' + 3x' + 5x = e^t .$$

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, calcolare la soluzione tale che $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$.

Esercizio E.62 Utilizzando la trasformata di Laplace, trovare la soluzione del problema

$$\begin{cases} x'' + 4x = 1 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 . \end{cases}$$

Esercizio E.63 *Si consideri l'equazione scalare di ordine 2*

$$x'' + 5x' + 4x = t .$$

Utilizzando il metodo della trasformata di Laplace, calcolare la soluzione tale che $x(0) = 0$ e $x'(0) = 2$.