Quando diciamo che lo spazio ha dimensione tre, cosa intendiamo?

A. Bacciotti
Dipartimento di Matematica del Politecnico
Corso Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino - Italy
andrea.bacciotti@polito.it

1 L'argomento

La domanda che introduce l'argomento di questa conferenza è una citazione: chi se la pone è infatti H. Poincaré [6]. Siamo agli inizi del '900. Il concetto di dimensione era appena stato formalizzato nel contesto della teoria degli spazi vettoriali, ma due scoperte, una dovuta a Cantor e l'altra dovuta a Peano, ne mettono immediatamente in luce l'intrinseca debolezza. Ci si rende conto della necessità di rifondare il concetto su basi più solide e profonde, in maniera da tener conto non solo della struttura algebrica dello spazio, ma anche di quella topologica. L'impresa attrae alcune tra le migliori menti matematiche dell'epoca. Cerchiamo di ripercorrere le tappe di questa interessante vicenda.

2 La nozione algebrica di dimensione

Le moderne teorie matematiche altamente formalizzare e assiomatizzate, costituiscono spesso il punto d'arrivo di un lungo processo storico, nel corso del quale si realizza la confluenza di diverse correnti di pensiero; ciascuna corrente ha origine nel momento in cui si intraprende lo studio di un determinato problema, e si evolve mettendo a punto una sua particolare tecnica. Passando per successivi livelli di astrazione, pian piano si arriva a riconoscere delle analogie e si genera un processo di unificazione. Qualcosa di simile è accaduto per l'*Algebra lineare* (si veda per esempio [3], Cap. 4). Possiamo individuarne l'inizio nella nascita della Geometria analitica, alla quale si affianca ben presto la ricerca di metodi sempre più efficienti per la risoluzione dei sistemi lineari. Ulteriori contributi e arricchimenti decisivi sono legati ai nomi di Hamilton e Cauchy. Hamilton, con l'invenzione dei quaternioni fornisce, forse per la prima volta, una motivazione concreta per l'estensione dei metodi della geometria analitica a oggetti la cui rappresentazione richiede più di tre coordinate; Cauchy nei suoi studi sulla struttura dell'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineari, mette chiaramente in luce l'importanza del ruolo della condizione di indipendenza lineare.

Da un altro versante, Maxwell si rende conto che per manipolare equazioni complesse come quelle dell'elettrodinamica e dell'elettromagnetismo, è necessario abbandonare le notazioni tradizionali e dotarsi di strumenti di calcolo più agili e potenti: grazie anche al lavoro dei suoi seguaci Gibbs e Heaviside, comincia a svilupparsi una sorta di calcolo vettoriale simile a quello verso il quale si stavano avviando indipendentemente alcuni matematici come Grassmann, Möbius, Cayley.

Si arriva ben presto a sintetizzare la definizione astratta di spazio vettoriale, come la insegniamo oggi ai nostri studenti. In questo ambito, è relativamente semplice mettere a fuoco un primo concetto di dimensione. Si definisce *base* un qualunque insieme di generatori costituito da vettori linearmente indipendenti, e si dimostra che se esiste una base formata da un numero finito di vettori, allora una qualunque altra base deve essere formata da un identico numero di vettori. A buona ragione, a questo numero si dà il nome di *dimensione* dello spazio.

Col senno di poi, questo concetto di dimensione potrebbe essere definito "elementare", nel senso che è costruito su base puramente algebrica. Esso ha il vantaggio di corrispondere alle aspettative del senso comune (un punto viene ad avere dimensione zero, una retta viene ad avere dimensione uno ecc.). E tuttavia non lascia pienamente soddisfatti: per esempio, non si applica alle curve (qualunque persona di buon senso sarà d'accordo nel ritenere che una circonferenza sia un oggetto uni-dimensionale, ma una circonferenza non è uno spazio vettoriale). Tuttavia, la ragione principale per cui il concetto algebrico di dimensione entra in crisi non è questa.

3 L'infinito di Cantor e la curva di Peano

Attorno al 1875, Cantor costrisce una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'intervallo $(0, 1)$ e i punti del quadrato $(0, 1) \times (0, 1)$ (la storia di questa scoperta è raccontata per esempio in [1]).

Verso il 1890, Peano, attraverso un procedimento di approssimazione, dimostra l'esistenza di una funzione continua definita sull'intervallo $[0, 1]$, la cui immagine contiene il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

In entrambi i casi, un oggetto di natura inequivocabilmente bi-dimensionale viene rappresentato per mezzo di un parametro che varia in uno spazio uni-dimensionale! Sembra così perdere di consistenza ogni criterio qualitativo utile al fine di distinguere tra oggetti di dimensione diversa e di riconoscere le loro diversità.

Nella storia della scienza, accade di frequente che una nuova scoperta determini una crisi e ne indichi, al tempo stesso, la via d'uscita. È esattamente quello che si verifica nel nostro caso. Infatti, i matematici si accorgono ben presto che la corrispondenza tra i punti di una retta e i punti di un piano congegnata da Cantor è biunivoca, ma non è continua, mentre la curva ideata da Peano è continua, ma non è biunivoca (per riempire il quadrato, la curva deve infatti inevitabilmente ripassare più volte sugli stessi punti).

Come noto, il concetto di funzione continua è di competenza dell'Analisi matematica, e più precisamente della Topologia. È in questa disciplina quindi che vanno ricercate le basi di un nuovo concetto di dimensione.

4 Il concetto topologico di dimensione

4.1 L'idea di Poincaré

Nel già citato articolo in cui si chiede qual'è il significato della parola dimensione, Poincaré prefigura una possibile risposta. Egli pensa ad una definizione ricorsiva, che si applichi ad un qualunque spazio topologico connesso. Posto, per convenzione, uguale a zero la dimensione del punto, Poincaré propone di dire che uno spazio ha dimensione n se la proprietà di connessione può essere distrutta "sottraendo" allo spazio un sottospazio di dimensione $n-1$. La retta (con la topologia usuale) avrà così dimensione 1, perché la si può "disconnettere" eliminando un punto, il piano (con la topologia usuale) avrà dimensione 2, perché lo si può "disconnettere" eliminando una retta, e così via.

4.2 L'idea di Lebesgue

L'idea di Lebesgue è più sottile. Egli parte dalle seguenti osservazioni. Se si vuole ricoprire una retta con degli intervalli aperti di lunghezza finita, bisogna necessariamente fare delle sovrapposizioni. Tuttavia, dato un qualunque ricoprimento di questo tipo, eliminando eventuali intervalli superflui, si può sempre fare in modo che ogni punto della retta venga coperto da non più di due intervalli.

Cerchiamo di ripetere adesso lo stesso ragionamento nel piano, sostituendo ovviamente agli intervalli dei dischetti, ma cercando di rispettare un analogo criterio di economicità. Ci si accorge subito che adesso non si riesce a limitare a due il numero di dischetti che coprono un punto generico. Per rendere possibile la costruzione, bisogna consentire che, da qualche parte, il numero dei dischetti che si sovrappongono salga almeno a tre.

Non è facile intuire cosa possa accadere in generale. Un risultato importante di Lebesgue (noto come *Covering Lemma*) afferma che nello spazio euclideo n-dimensionale ricoprimenti costituiti da sfere aperte di diametro finito e tali che ciascun punto dello spazio viene ricoperto da non più di k sfere, esistono se $k = n + 1$, ma non se $k \leq n$.

Una volta chiarito questo punto, si può estendere la definizione facendo uso della sola struttura topologica. Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X, cioè una collezione di sottoinsiemi A_i aperti tali che $\cup A_i = X$. Un ricoprimento $\mathcal{U}'$ si dice un raffinamento di $\mathcal{U}$ se per ogni $A \in \mathcal{U}'$ esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che $A \subseteq B$. Denotiamo con $\omega(\mathcal{U})$ il massimo numero k per cui esiste una collezione $A_1, \ldots, A_k$ di elementi distinti di $\mathcal{U}$ tali che $\cap_{i=1}^{k} A_i \neq \emptyset$.

Si dice che X ha dimensione n se:

(i) per ogni $\mathcal{U}$ esiste un raffinamento $\mathcal{U}'$ tale che $\omega(\mathcal{U}') = n + 1$;

(ii) esiste $\mathcal{U}$ tale che per ogni suo raffinamento $\mathcal{U}'$ si ha $\omega(\mathcal{U}') > n$.

4.3 L'idea di Brouwer

L'idea più semplice e feconda è però quella di Brouwer che, grazie anche ai successivi contributi di Menger e Urysohn dà origine ad una nuova branca della matematica cui si dà oggi il nome di *Topologia algebrica* ([2, 4, 5, 7]).

Anche la definizione proposta da Brouwer ha carattere ricorsivo: si pone, per convenzione, uguale a -1 la dimensione dell'insieme vuoto e si dice quindi che uno spazio topologico ha dimensione n se n è il più piccolo intero per cui ogni $x \in X$ ammette un intorno arbitrariamente piccolo la cui frontiera ha dimensione $< n$.

Grazie a questa definizione, nel 1911 Brouwer dimostra un teorema fondamentale, oggi noto come *Teorema dell'invarianza del dominio.* Un semplice corollario di questo Teorema, conosciuto anche come *Teorema dell'invarianza della dimensione*, stabilisce nella sostanza che non esistono omeomorfismi (cioè applicazioni che siano al tempo stesso continue, invertibili e con inversa continua) tra due spazi euclidei (dotati della topologia usuale) di dimensione diversa.

Con questo risultato vengono così restituite al concetto di dimensione (rifondato su base topologica) quella fiducia e quella credibilità che Cantor e Peano, con le loro scoperte, avevano messo in discussione.

Per inciso, va detto che se gli spazi topologici di cui si parla hanno buone proprietà (verificate, di regola, nelle situazioni più comuni) gli approcci proposti da Poincarè, Lebesgue e Brouwer sono equivalenti.

5 La teoria della misura

I segmenti si possono facilmente "sommare" e "confrontare"; inoltre è facile costruirne multipli e sottomultipli. Tutto ciò rende particolarmente agevole parlare di "misura" dei segmenti.

Le cose si complicano notevolmente quando ci si pone il problema di come si fa a "misurare" figure piane o solidi nello spazio; sulla scorta della geometria elementare, è infatti possibile definire e calcolare l'area dei poligoni ma non quella delle figure a contorno curvilineo.

Il problema pratico di <u>calcolare</u> l'area delle figure a contorno curvilineo è una delle motivazioni principali che portarono, nel corso del XVII secolo, alla fondazione del

Calcolo integrale. Ma il problema teorico di definire in maniera rigorosa un concetto di misura e al tempo stesso una classe sufficientemente ampia di insiemi cui questo concetto possa essere applicato, rimane latente fin verso la fine dell'ottocento.

Un primo successo in questa direzione viene ottenuto indipendentemente da Peano e da Jordan, grazie alle nozioni di limite e di estremo superiore, che i fondatori dell'Analisi matematica moderna avevano da poco tempo messe a punto. Attraverso successive estensioni (Lebesgue, Borel), si arriverà pian piano a porre le basi di una teoria assiomatica della misura.

6 Misura e dimensione

Ben presto, ci si accorge anche che esiste una connessione tra dimensione e misura. Per esempio, la misura di un segmento non degenere, pensato come sottoinsieme della retta, coincide con la sua lunghezza ed è quindi strettamente positiva. La misura dello stesso segmento, pensato come sottoinsieme del piano, sarà invece uguale a zero. Si intravede cioè la possibilità di generalizzare ulteriormente il concetto di dimensione, legandolo in qualche modo alla nozione di misura.

L'idea è da attribuire a Hausdorff [5], anche se i risultati più significativi in questa direzione sono dovuti a Besicovitch. Supponiamo dato uno spazio metrico X. Introduciamo due parametri $\varepsilon > 0$ e $p \geq 0$, e sia $\Delta_\varepsilon = \{B_1, \ldots, B_k, \ldots\}$ un ricoprimento di X formato da sfere, tutte di diametro minore di ε. Definiamo

$$h(p, X) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \inf_{\Delta_\varepsilon} \sum_k [\mathrm{diam}\,(B_k)]^p$$

Non è difficile rendersi conto che $(0 \leq h(p, X) \leq \infty)$ qualunque sia $p \geq 0$. Tipicamente, per ogni spazio X esiste un valore p_0 tale che

$$h(p, X) = \begin{cases} \infty & \text{se } p < p_0 \\ m & \text{se } p = p_0 \\ 0 & \text{se } p > p_0 \end{cases}$$

Il numero p_0 così trovato si chiama la *dimensione di Hausdorff* di X e il corrispondente $m = h(p_0, X)$ si chiama la *misura di Hausdorff* di X. In altre parole, la dimensione di Hausdorff è l'unico valore che caratterizza un ambiente al cui interno è possibile assegnare allo spazio una misura attraverso un valore che non sia né zero né infinito.

Se n indica la dimensione topologica di X, in generale si ha $p_0 \geq n$, ma non è sempre vero che $p_0 = n$. Ancor più sorprendentemente, esistono spazi X la cui dimensione di Hausdorff non è intera!

Spazi la cui dimensione di Hausdorff non è intera si dicono *frattali*: noti da tempo ai matematici teorici, i frattali hanno fatto recentemente il loro ingresso anche nella matematica applicata. Il comportamento a lungo termine di sistemi dinamici di interesse fisico dipende spesso infatti dall'esistenza di cosiddetti "attrattori strani", cioè insiemi che il sistema tende a raggiungere asintoticamente nel corso della sua evoluzione e che hanno una geometria di tipo frattale.

Riferimenti bibliografici

[1] A.D. Aczel *Il mistero dell'Alef*, Net 2000

[2] P. Alexandrov, *Introduction à la Théorie Homologique de la dimension et la topologie combinatoire*, Mir 1977

[3] N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli 1963

[4] M.J. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin, 1967

[5] W. Hurewicz, H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton University Press 1969

[6] H. Poincaré, Revue de Méthaphysique et de morale, 1912, p. 486

[7] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966