LeLing10: La matrice inversa.

Argomenti svolti:

- Inversa di una matrice.
- Unicita' e calcolo della inversa.
- La inversa di una matrice 2×2.
- Il gruppo delle matrici invertibili.

Esercizi consigliati: Geoling 13.

Inversa di una matrice

Per ogni n c'e' una matrice quadrata molto importante chiamata matrice identica che simbolicamente si scrive I_n. Ecco la $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed ecco la $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi I_n e' la matrice $n \times n$ avente 1 sulla diagonale e 0 altrove. A volte si usa la delta di Kronecker $\delta_{ij} = \left\{ \begin{matrix} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ altrimenti} \end{matrix} \right\}$, e si scrive $I_n = (\delta_{ij})$. La matrice identica e' molto simile al numero 1, cioe' i prodotti $A \cdot I_n$ e $I_n \cdot A$ sono sempre A, dunque come per il numero 1, la moltiplicazione di una matrice per quella identica lascia la matrice inalterata. La matrice identica e' l'unica matrice che gode di questa proprieta'.

Proposizione 0.1. *Sia X una matrice quadrata $n \times n$. Se per qualsiasi colonna C il prodotto $X \cdot C = C$ allora X e' la matrice identica, cioe' $X = I_n$.*

Dimostrazione. La prima colonna del prodotto $X \cdot I_n$ e' uguale alla prima colonna della I_n moltiplicata per X. Dunque per ipotesi la prima colonna del prodotto $X \cdot I_n$ e' uguale alla prima colonna della matrice identica I_n. Ma la stessa cosa e' vera per tutte le colonne del prodotto $X \cdot I_n$, dunque $X = X \cdot I_n = I_n$. $\square$

Cosi' come succede con numeri, possiamo cercare di calcolare l'inversa di una matrice quadrata A, cioe' cercare di trovare una matrice quadrata B tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Ricordiamo che il numero 0 non ha un inverso, dunque la matrice nulla $\mathbf{0}$ non ha una inversa. Ma a differenza dei numeri, per le matrici non basta non essere nulle per avere una inversa.

Esempio 0.2. *La matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non ha inversa. Osservare che $N^2 = \mathbf{0}$, dunque se $A \cdot N = I_2$ allora $I_2 = I_2^2 = (A \cdot N)^2 = A^2 \cdot N^2 = A^2 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, cosa assurda poiche' $I_2 \neq \mathbf{0}$.*

Prima di continuare ecco la definizione di matrice inversa.

Definizione 0.3. *Una matrice quadrata A $n \times n$ si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.*

La matrice B se esiste e' unica, cioe' la matrice A non puo' avere due inverse diverse. L'unica inversa si scrive come A^{-1}.

Gli esempi piu' evidenti di matrici invertibili sono le matrici delle operazioni elementari, cioe' le matrici elementari $R_{i+r.j}$, $R_{i\Leftrightarrow j}$ e rR_i che intervengono nel metodo di Gauss-Jordan. Infatti, l'inversa di $R_{i\Leftrightarrow j}$ e' $R_{j\Leftrightarrow i}$, l'inversa di rR_i e' $\frac{R_i}{r}$. L'inversa di $R_{i+r.j}$ si lascia come esercizio.

Una matrice non invertibile si dice singolare.

0.1 Quando una matrice e' invertibile?

Pensando il prodotto dal punto di vista delle righe o colonne e' facile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 0.4. *Una matrice A $n \times n$ e' invertible se e solo se $\rho(A) = n$.*

Una matrice quadrata $n \times n$ il cui rango e' n si dice di rango massimo.

Dimostrazione . Se $A \cdot A^{-1} = I_n$ allora tutte le colonne della identica sono combinazioni lineari delle colonne di A, dunque $\rho(A) = n$. Se $\rho(A) = n$ il Teorema di Rouché-Capelli garantisce che il sistema non omogeneo $(A|I_n)$ e' compatibile, dunque esiste B tale che $A \cdot B = I_n$. Ma anche le righe della identica I_n sono combinazioni lineari delle righe di A, dunque esiste B' tale che $B' \cdot A = I_n$. Per terminare la dimostrazione basta dimostrare che $B = B'$. Ma $B' \cdot (A \cdot B) = B' \cdot I_n = B'$, dunque $B' = (B' \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$ (Notare l'uso della proprieta' associativa del prodotto). $\square$

Esempio 0.5. *Una matrice diagonale* $\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ *e' invertible se e soltanto se $d_i \neq 0$ per $i = 1, \cdots, n$, cioe' se lo zero non si trova sulla diagonale. In modo analogo una matrice triangolare* $\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & d_2 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & d_n \end{pmatrix}$ *e' invertible se e soltanto se $d_i \neq 0$ per*

$i = 1, \cdots, n$, *cioe' se lo zero non si trova sulla diagonale.*

0.2 Calcolo dell'inversa

La inversa d'una matrice 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si calcola facilmente. Eccola qui:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Dunque M e' invertibile se e soltanto se il determinante[1] $ad - bc \neq 0$.

Il calcolo della inversa d'una matrice A $n \times n$ generale e' abbastanza facile. Si usa il metodo di Gauss-Jordan applicato al sistema non-omogeneo la cui matrice e' $(A|I_n)$ Se la matrice' e' invertibile allora la soluzione e' unica ed e' l'inversa. Se la matrice non e' invertible allora il sistema e' incompatibile e non ci sono soluzioni. Ricordare che la notazione $(A|I_n)$ indica risolvere n sistemi contemporaneamente dove ci sono n colonne note, cioe' le n colonne della matrice identica $n \times n$. Questo metodo funziona per via della osservazione che l'unica matrice E echelon quadrata di rango n e' la identica, cioe' $E = I_n$. Dunque se applichiamo ad A il metodo di Gauss-Jordan risulta che esiste una matrice B invertibile tale che $B \cdot A = E = I_n$ e questa B e' l'inversa di A. Quindi l'inversa di A e' il risultato di tutte le operazioni elementari che si usano nel metodo di Gauss-Jordan quando lo si usa per risolvere il sistema omogeneo la cui matrice e' A.

Esempio 0.6. *Ecco un esempio del calcolo della inversa. Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan alla matrice* $(A|I_3)$*,cioe'*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_1}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{R_2}{-3}}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_2-2R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_1-3R_3}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1-2R_2}{\Rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

[1] Determinate poiche' determina quando la matrice e' invertibile.

Una volta finita la tappa di Jordan risulta che la matrice inversa A^{-1} e' $\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Il successo del metodo precedente si spiega anche osservando che:

$$(R_1 - 2R_2) \cdot (R_1 - 3R_3) \cdot (R_2 - 2R_3) \cdot \frac{R_2}{-2} \cdot (R_2 - 2R_1) \cdot A = I_3 \ ,$$

dunque l'inversa A^{-1} e' il prodotto $(R_1-2R_2)\cdot(R_1-3R_3)\cdot(R_2-2R_3)\cdot\frac{R_2}{-2}\cdot(R_2-2R_1)$. Ma dopo la sbarra c'e' il prodotto $(R_1-2R_2)\cdot(R_1-3R_3)\cdot(R_2-2R_3)\cdot\frac{R_2}{-2}\cdot(R_2-2R_1)\cdot I_3 = A^{-1}$.

Riassumiamo questo nel seguente teorema.

Teorema 0.7. *Una matrice invertibile A e' un prodotto di operazione elementari. Una matrice e' singolare, cioe' non e' invertibile, se e soltanto se il sistema omogeneo la cui matrice e' A ha una soluzione non banale.*

0.3 Il gruppo di matrici invertibili

Se uno raccoglie tutte le matrici invertibile quadrate $n \times n$ se ottiene un insieme che si denota con $GL(n)$. Questo insieme e' un esempio importantisimo del concetto matematico di gruppo. Un gruppo e' un insieme G dove e' definito un "prodotto" $\cdot$ che soddisfa le regole naturali, cioe' esiste un elemento $1 \in G$ che gioca il ruolo della identita', tutti gli elementi di G hanno un inverso e, cosa piu' importante, il prodotto si mantiene in G, cioe' $u \cdot v \in G$ se u e v appartengono a G. Dunque per dimostrare che $GL(n)$ e' un gruppo basta dimostrare il seguente teorema.

Teorema 0.8. *Se $A, B \in GL(n)$, cioe' se A e B sono invertibili allora $A \cdot B$ e' invertibile, cioe' $A \cdot B \in GL(n)$.*

Dimostrazione . Dopo aver moltiplicato e calcolato qualche inversa si osserva che $B^{-1} \cdot A^{-1}$ e' la inversa di $A \cdot B$. $\square$

Osservare che questo dimostra la formula $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ dove $A, B \in GL(n)$. Il gruppo $GL(n)$ non e' commutativo se $n > 1$. Cosa e' il gruppo $GL(1)$?.

Se una matrice A e' invertibile allora la sua trasposta A^t e' invertibile e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Dunque se $A \in GL(n)$ allora $A^t \in GL(n)$.

0.4 Cambiamento di base

L'applicazione fondamentale delle matrici invertibili e' il problema del cambiamento di base. Riccordiamo che una base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ associa a ogni vettore una colonna, la colonna delle sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Ad esempio, il vettore v_1 e' associato alla colonna $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Supponiamo che abbiamo due basi $\mathcal{A} = (w_1, \cdots, w_n), \mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$.

Il problema del cambiamento di base e' quello di trovare la colonna C di un vettore v rispetto della base $\mathcal{A}$ conoscendo la sua colonna C' rispetto alla base $\mathcal{B}$.

La risposta dipende del calcolo di una matrice invertibile M chiamata matrice di cambiamento di base. Una volta calcolata M si trova C tramite il prodotto $M \cdot C'$, cioe' $C = M \cdot C'$.

Ma come calcolare la matrice M del cambiamento di base?

Per calcolare M si assume che il metodo funzioni. Dunque la prima colonna della M dovra' essere necessariamente la colonna delle coordinate del vettore v_1 rispetto della base $\mathcal{A}$. In modo analogo la colonna j di M dovra' essere necessariamente la colonna delle coordinate del vettore v_j rispetto della base $\mathcal{A}$. Questo determina la M in modo unico. Calcolata la M di questo modo e' chiaro che la M produce il risultato desiderato quando C' e' la colonna di un vettore v appartenente alla base $\mathcal{B}$. Ricordando che le colonne si combinano linearmente in modo compatibile con la combinazione lineare tra i vettori risulta che la M produce la colonna C del vettore v data quella C', per qualsiasi vettore v. Dunque la M risolve effettivamente il problema del cambiamento di base.

Esempio 0.9. *Sia* $\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ *e sia* $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. *In questo caso la matrice del cambio* M *e'* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Osservare che dare una base $\mathcal{B}$ dello spazio $\mathcal{C}_n$, e' la stessa cosa di dare una matrice invertibile B le cui colonne sono le colonne della base $\mathcal{B}$. Usando questa osservazione la matrice M si trova facilmente calcolando l'inversa della matrice A, cioe' $M = A^{-1}B$.