C.11

Sviluppi di Taylor

Premettiamo il seguente risultato, che fornisce una proprietà interessante degli sviluppi di Taylor. A tale scopo, osserviamo che se una funzione g è definita soltanto in un punto x_0, possiamo comunque definire il suo polinomio di Taylor di ordine 0 ponendo, in modo ovvio, $Tg_{0,x_0}(x) = g(x_0)$.

Lemma C.11.1 *Sia f derivabile n volte in x_0. La derivata di ordine h, $0 \leq h \leq n$, del polinomio di Taylor di f di ordine n in x_0 coincide con il polinomio di Taylor di $f^{(h)}$ di ordine $n-h$ in x_0, ovvero*

$$D^h Tf_{n,x_0}(x) = Tf^{(h)}_{n-h,x_0}(x)\,.$$

Dimostrazione. Ricordando l'Esempio 6.30 i), si ha

$$D^h(x-x_0)^k = \begin{cases} 0 & \text{se } h > k \\ \dfrac{k!}{(k-h)!}(x-x_0)^{k-h} & \text{se } h \leq k\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$D^h Tf_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} D^h(x-x_0)^k = \sum_{k=h}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-h)!}(x-x_0)^{k-h}\,.$$

Osserviamo ora che $f^{(k)}(x_0) = f^{(h+k-h)}(x_0) = \big(f^{(h)}\big)^{(k-h)}(x_0)$, ossia la derivata di ordine k di f può essere ottenuta derivando $k-h$ volte la derivata di ordine h di f. Dunque, ponendo $\ell = k-h$, si ha

$$\begin{aligned} D^h Tf_{n,x_0}(x) &= \sum_{k=h}^{n} \frac{\big(f^{(h)}\big)^{(k-h)}(x_0)}{(k-h)!}(x-x_0)^{k-h} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-h} \frac{\big(f^{(h)}\big)^{(\ell)}(x_0)}{\ell!}(x-x_0)^{\ell} = Tf^{(h)}_{n-h,x_0}(x)\,. \end{aligned}$$

□

Lemma C.11.2 *Sia f derivabile n volte in x_0. Allora*

$$D^h Tf_{n,x_0}(x_0) = f^{(h)}(x_0)\,, \qquad \forall h = 0, \dots, n\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il Lemma C.11.1 con $x = x_0$. □

Pag. 234 $\longleftarrow$ Dimostrazione dei Teoremi 7.1 e 7.2

Teorema 7.1 *Sia f derivabile n volte in x_0, con $n \geq 0$. Allora, vale la* **formula di Taylor**

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

dove

$$\begin{aligned} Tf_{n,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$L = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Tf_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0\,.$$

Osserviamo che siamo in presenza di una forma di indeterminazione del tipo $\frac{0}{0}$; al fine di applicare il Teorema di de l'Hôpital 6.40 siamo indotti a considerare il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (Tf_{n,x_0})'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - Tf'_{n-1,x_0}(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}\,,$$

(dove si è utilizzato il Lemma C.11.1 con $h = 1$), le altre ipotesi essendo soddisfatte.

Per $n > 1$, si ha ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, quindi reiterando $n - 1$ volte quanto fatto sopra ci riduciamo a considerare il limite

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - Tf^{(n-1)}_{1,x_0}(x)}{n!(x - x_0)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0\,, \end{aligned}$$

per definizione di derivata n-sima in x_0. Dunque l'applicazione reiterata del Teorema di de l'Hôpital è giustificata e $L = 0$. □

Teorema 7.2 *Sia f derivabile n volte in x_0, con $n \geq 0$; inoltre, sia f derivabile $n + 1$ volte in un intorno di x_0, tranne eventualmente nel punto x_0. Allora, vale la formula di Taylor*

$$f(x) = Tf_{n,x_0}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1},$$

per un opportuno $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x.

Dimostrazione. Poniamo $\varphi(x) = f(x) - Tf_{n,x_0}(x)$ e $\psi(x) = (x - x_0)^{n+1}$. Osserviamo che, grazie al Lemma C.11.2, per $h = 0, \dots, n$ si ha

$$\varphi^{(h)}(x_0) = 0\,;$$

inoltre si ha $\psi^{(h)}(x_0) = 0$ e $\psi^{(h)}(x) \neq 0$ per ogni $x \neq x_0$. Applicando il Teorema di Cauchy C.8.1 alle funzioni φ e ψ nell'intervallo I_0 di estremi x_0 e x, deduciamo che esiste un punto $x_1 \in I_0$ tale che

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)}\,.$$

Applicando nuovamente tale procedimento alle funzioni $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ nell'intervallo I_1 di estremi x_0 e x_1 si trova un punto $x_2 \in I_1 \subset I_0$ tale che

$$\frac{\varphi'(x_1)}{\psi'(x_1)} = \frac{\varphi'(x_1) - \varphi'(x_0)}{\psi'(x_1) - \psi'(x_0)} = \frac{\varphi''(x_2)}{\psi''(x_2)}\,.$$

Reiterando, si determina un punto $x_{n+1} \in I_0$ tale che

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \cdots = \frac{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}{\psi^{(n+1)}(x_{n+1})}\,.$$

Notando che $\varphi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $\psi^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si ottiene la tesi ponendo $\bar{x} = x_{n+1}$. □

Formula di Taylor con il resto integrale

Il resto della formula di Taylor può essere espresso, oltre che nelle forme di Peano e di Lagrange, anche nella cosidetta forma integrale. Tale espressione, a costo di una ipotesi più forte sulla funzione f, risulta più precisa delle precedenti.

Teorema C.11.3 *Sia $n \geq 0$ un intero arbitrario. Per ogni funzione f derivabile $n+1$ volte in un intorno di x_0 con derivata $f^{(n+1)}$ ivi continua, vale la relazione*

$$f(x) - Tf_{n,x_0}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt\,.$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n. Se $n = 0$, la formula si riduce all'identità

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\,,$$

stabilita nel Corollario 9.42.

Supponiamo vero l'enunciato per n e verifichiamolo per $n+1$. Si ha, integrando per parti e usando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\,dt\\
&\qquad=\frac{1}{(n+1)!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x}+(n+1)\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\,dt\right]\\
&\qquad=-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n}\,dt\\
&\qquad=-\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}+f(x)-Tf_{n,x_0}(x)\\
&\qquad=f(x)-Tf_{n+1,x_0}(x)\,. \qquad\square
\end{aligned}$$