

---

## Successioni

Pag. 73 ← Dimostrazione del Teorema 3.9

**Teorema 3.9** *Sia  $a : n \mapsto a_n$  una successione monotona. Allora, essa è convergente oppure divergente. Precisamente, nel caso in cui la successione sia crescente, si ha:*

- i) *Se la successione è superiormente limitata, cioè se esiste un maggiorante  $b \in \mathbb{R}$  tale che  $a_n \leq b$  per ogni  $n \geq n_0$ , allora la successione **converge** verso l'estremo superiore  $\ell$  della sua immagine:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell = \sup \{a_n : n \geq n_0\}.$$

- ii) *Se la successione non è superiormente limitata, allora essa diverge a  $+\infty$ .*

*Nel caso in cui la successione sia decrescente, l'enunciato precedente si modifica in modo ovvio.*

**Dimostrazione.** Supponiamo dapprima che la successione  $\{a_n\}$  sia superiormente limitata, ovvero  $\ell = \sup \{a_n : n \geq n_0\} \in \mathbb{R}$ . Ricordando le condizioni (1.7), per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un elemento  $a_{n_\varepsilon}$  tale che  $\ell - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq \ell$ . Per la monotonia della successione si ha  $a_{n_\varepsilon} \leq a_n, \forall n \geq n_\varepsilon$ ; inoltre per definizione di estremo superiore  $a_n \leq \ell, \forall n \geq n_0$ . Ne segue che

$$\ell - \varepsilon < a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

dunque ogni  $a_n$  con  $n \geq n_\varepsilon$  appartiene all'intorno di  $\ell$  di raggio  $\varepsilon$ , ossia è verificata la condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell.$$

Sia ora  $\ell = +\infty$ . Ciò significa che per ogni  $A > 0$ , esiste un elemento  $a_{n_A}$  tale che  $a_{n_A} > A$ . Usando ancora la monotonia della successione si ha  $a_n \geq a_{n_A} > A, \forall n \geq n_A$ . Dunque ogni  $a_n$  con  $n \geq n_A$  appartiene all'intorno  $I_A(+\infty) = (A, +\infty)$  di  $+\infty$ , ossia è verificata la condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty. \quad \square$$

## Sottosuccessioni

Il Teorema 2. di pag. 142 afferma che ogni successione convergente è limitata. Osserviamo che in generale non vale l'implicazione inversa. Ad esempio, la successione  $a_n = (-1)^n$  è limitata ( $|a_n| = 1, \forall n$ ) ma non è convergente. Notiamo però che, considerando soltanto i termini di indice pari, otteniamo la successione costante  $\{b_k\}_{k \geq 0}$  con  $b_k = a_{2k} = 1, k \geq 0$ , e dunque banalmente convergente. Analogamente, considerando i termini di indice dispari, otteniamo la successione costante  $\{c_k\}_{k \geq 0}$  con  $c_k = a_{2k+1} = -1, k \geq 0$ , ancora convergente. Tali successioni sono estratte dalla successione  $\{a_n\}_{n \geq 0}$  di partenza, nel senso precisato dalla seguente definizione.

**Definizione C.5.1** Sia  $\{a_n\}_{n \geq n^*}$  una successione e sia  $\{n_k\}_{k \geq 0}$  una successione strettamente crescente i cui valori sono tutti interi  $\geq n^*$ . La successione  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 0}$  si dice **sottosuccessione** o **successione estratta** di  $\{a_n\}_{n \geq n^*}$ .

Si noti che la successione  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 0}$  è ottenuta attraverso l'operazione di composizione di funzioni, precisamente componendo la funzione  $k \mapsto n_k$  con la funzione  $n \mapsto a_n$ .

Ogni sottosuccessione estratta da una successione convergente o divergente ha il suo stesso comportamento limite. Vale infatti il seguente risultato.

**Proposizione C.5.2** Sia  $\{a_n\}_{n \geq n^*}$  una successione tale che esista, finito o infinito,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell$ . Allora, per ogni sottosuccessione  $\{a_{n_k}\}_{k \geq 0}$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \ell.$$

**Dimostrazione.** Osserviamo innanzitutto che vale la proprietà

$$n_k \geq k, \quad \forall k \geq 0, \tag{C.5.1}$$

come si vede facilmente per induzione. Infatti, banalmente  $n_0 \geq 0$ ; supponiamo ora che  $n_k \geq k$  e osserviamo che, poiché la successione è strettamente crescente, si ha  $n_{k+1} > n_k$  il che implica  $n_{k+1} \geq k+1$ , da cui l'asserto.

La (C.5.1) implica, grazie al primo teorema del confronto (pag. 142, Teorema 4.) che la successione  $\{n_k\}$  è divergente a  $+\infty$ . Il risultato segue allora dalla versione del Teorema 4.15 relativa alle successioni (la cui dimostrazione è analoga a quella data nel testo).  $\square$

La possibilità di estrarre da una successione limitata una sottosuccessione convergente, verificata nell'esempio iniziale ( $a_n = (-1)^n$ ), è un risultato generale e profondo espresso dal seguente teorema.

**Teorema C.5.3 (di Bolzano-Weierstrass)** *Da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente.*

**Dimostrazione.** Sia  $\{x_n\}_{n \geq n^*}$  una successione limitata e precisamente si abbia

$$a \leq x_n \leq b, \quad \forall n \geq n^*,$$

per opportuni  $a, b \in \mathbb{R}$ . Utilizziamo un procedimento di bisezione dell'intervallo  $[a, b]$ , simile a quello usato nella dimostrazione del Teorema 4.23 di esistenza degli zeri. Poniamo

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad \mathcal{N}_0 = \{n \geq n^*\}, \quad n_0 = n^*.$$

Sia  $c_0$  il punto medio dell'intervallo  $[a_0, b_0]$  e definiamo gli insiemi di indici

$$\mathcal{N}_0^- = \{n \in \mathcal{N}_0 : x_n \in [a_0, c_0]\}, \quad \mathcal{N}_0^+ = \{n \in \mathcal{N}_0 : x_n \in [c_0, b_0]\}.$$

Notiamo che  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}_0^- \cup \mathcal{N}_0^+$  e che, essendo  $\mathcal{N}_0$  infinito, almeno uno tra  $\mathcal{N}_0^-$  e  $\mathcal{N}_0^+$  è ancora infinito. Se  $\mathcal{N}_0^-$  è infinito, poniamo

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = c_0, \quad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0^-;$$

altrimenti, poniamo

$$a_1 = c_0, \quad b_1 = b_0, \quad \mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_0^+.$$

Sia infine  $n_1$  il primo indice  $> n_0$  contenuto in  $\mathcal{N}_1$ ; si osservi che tale scelta è possibile proprio perché  $\mathcal{N}_1$  è infinito. Reiterando l'argomento (come sempre in questi casi, il Principio di induzione C.1.1 rende rigoroso il procedimento), è possibile costruire una successione di intervalli soddisfacenti

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots, \quad \text{con } b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k},$$

una successione di insiemi infiniti

$$\mathcal{N}_0 \supseteq \mathcal{N}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{N}_k \supseteq \dots$$

e una successione strettamente crescente di indici  $\{n_k\}_{k \geq 0}$ , con  $n_k \in \mathcal{N}_k$ , tali che

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad \forall k \geq 0.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 4.23, esiste un unico  $\ell \in [a, b]$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \ell.$$

Usando il secondo teorema del confronto (Teorema 5. di pag. 142), deduciamo che la successione  $\{x_{n_k}\}_{k \geq 0}$  estratta da  $\{x_n\}_{n \geq n^*}$  converge a  $\ell$ .  $\square$