C.7

Serie

Pag. 151 $\longleftarrow$ Dimostrazioni dei criteri per lo studio della convergenza di serie numeriche

Teorema 5.29 (Criterio del confronto) *Siano* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *due serie numeriche a termini positivi e si abbia* $0 \leq a_k \leq b_k$, *per ogni* $k \geq 0$.

i) Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *converge, allora converge anche la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e vale* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$;

ii) se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *diverge, allora diverge anche la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Dimostrazione.
i) Indichiamo rispettivamente con $\{s_n\}$ e con $\{t_n\}$ le successioni delle ridotte delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Poiché $a_k \leq b_k$ per ogni k, si ha

$$s_n \leq t_n\,, \qquad \forall n \geq 0\,.$$

Per ipotesi, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge e quindi $\lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}$. Inoltre, grazie alla Proposizione 5.28, esiste (finito o infinito) il $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Applicando ora il primo teorema del confronto (Teorema 4. di pag. 142) alle successioni $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$, si ha

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = t \in \mathbb{R}\,.$$

Dunque $s \in \mathbb{R}$ e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. Inoltre $s \leq t$.

ii) Osserviamo che se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergesse, per quanto visto al punto *i)*, anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergerebbe. $\square$

Teorema 5.31 (Criterio del confronto asintotico) *Date due serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *e* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *a termini positivi, se le successioni* $\{a_k\}_{k\geq 0}$ *e* $\{b_k\}_{k\geq 0}$ *sono equigrandi per* $k \to \infty$*, allora il comportamento delle due serie coincide.*

Dimostrazione. Dire che le successioni $\{a_k\}_{k\geq 0}$ e $\{b_k\}_{k\geq 0}$ sono equigrandi per $k \to \infty$ equivale a dire che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Pertanto le successioni $\left\{\dfrac{a_k}{b_k}\right\}_{k\geq 0}$ e $\left\{\dfrac{b_k}{a_k}\right\}_{k\geq 0}$ sono entrambe convergenti e dunque limitate (Teorema 2. di pag. 142). Quindi esistono due costanti $M_1, M_2 > 0$ tali che, per ogni $k > 0$, si ha

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M_1 \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{b_k}{a_k}\right| \leq M_2\,,$$

ossia

$$|a_k| \leq M_1 |b_k| \qquad \text{e} \qquad |b_k| \leq M_2 |a_k|\,.$$

È sufficiente allora applicare il Teorema 5.29 per ottenere il risultato. $\square$

Teorema 5.33 (Criterio del rapporto) *Sia data la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *con* $a_k > 0$, $\forall k \geq 0$. *Si supponga che esista, finito o infinito, il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell\,.$$

Allora se $\ell < 1$*, la serie converge; se* $l > 1$*, la serie diverge.*

Dimostrazione. Sia ℓ finito. Per definizione di limite si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un intero $k_\varepsilon \geq 0$ tale che

$$\forall k > k_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - \ell\right| < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon\,.$$

Supponiamo dapprima $\ell < 1$. Scelto $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$, poniamo $q = \frac{1+\ell}{2}$ e osserviamo che

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \ell + \varepsilon = q\,, \qquad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Pertanto, reiterando,

$$a_{k+1} < q a_k < q^2 a_{k-1} < \ldots < q^{k-k_\varepsilon} a_{k_\varepsilon+1}$$

e quindi

$$a_{k+1} < \frac{a_{k_\varepsilon+1}}{q^{k_\varepsilon}} q^k\,, \quad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Concludiamo usando il Teorema 5.29 e il fatto che la serie geometrica di ragione $q < 1$ converge (Esempio 5.27).

Se invece $\ell > 1$, scelto $\varepsilon = \ell - 1$, osserviamo che

$$1 = \ell - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k}\,, \quad \forall k > k_\varepsilon\,.$$

Pertanto $a_{k+1} > a_k > \ldots > a_{k_\varepsilon+1} > 0$ e non è verificata la condizione necessaria di convergenza in quanto $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$.

Se infine $\ell = +\infty$, posto $A = 1$ nella condizione di limite, esiste $k_A \geq 0$ tale che $a_k > 1$ per ogni $k > k_A$. Dunque ancora non è verificata la condizione necessaria di convergenza. □

Teorema 5.34 (Criterio della radice) *Sia data la serie* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *con* $a_k \geq 0$, $\forall k \geq 0$. *Si supponga che esista, finito o infinito, il limite*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell\,.$$

Allora se $\ell < 1$*, la serie converge; se* $l > 1$*, la serie diverge.*

Dimostrazione. La dimostrazione è sostanzialmente identica a quella del teorema precedente ed è lasciata al lettore. □

Teorema 5.36 (Criterio di Leibniz) *Data una serie a termini di segno alterno* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$*, se valgono le due condizioni*

i) $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$ *;*
ii) la successione $\{b_k\}_{k\geq 0}$ *è monotona decrescente ,*

allora la serie è convergente. Detta s *la sua somma, per ogni* $n \geq 0$ *si ha*

$$|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1} \qquad e \qquad s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo che, poiché la successione $\{b_k\}_{k\geq 0}$ è decrescente,

$$s_{2n} = s_{2n-2} - b_{2n-1} + b_{2n} = s_{2n-2} - (b_{2n-1} - b_{2n}) \leq s_{2n-2}$$

e

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + b_{2n} - b_{2n+1} \geq s_{2n-1} \, .$$

Dunque la sottosuccessione delle ridotte di indice pari è decrescente mentre quella delle ridotte di indice dispari è crescente. Inoltre, per ogni $n \geq 0$,

$$s_{2n} = s_{2n-1} + b_{2n} \geq s_{2n-1} \geq \ldots \geq s_1 \quad \text{e} \quad s_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_0$$

Così $\{s_{2n}\}_{n\geq 0}$ è limitata inferiormente e $\{s_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ è limitata superiormente. Per il Teorema 3.9, entrambe le successioni convergono; poniamo

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \inf_{n\geq 0} s_{2n} = s^* \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \sup_{n\geq 0} s_{2n+1} = s_* \, .$$

Poiché

$$s^* - s_* = \lim_{n\to\infty} \big(s_{2n} - s_{2n+1}\big) = \lim_{n\to\infty} b_{2n+1} = 0 \, ,$$

concludiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ converge a $s = s^* = s_*$. Inoltre, per quanto detto, si ha

$$s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} \, , \qquad \forall n \geq 0 \, ,$$

ossia la successione $\{s_{2n}\}_{n\geq 0}$ approssima s per eccesso, mentre $\{s_{2n+1}\}_{n\geq 0}$ approssima s per difetto.

Infine, per ogni $n \geq 0$, risulta

$$0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = b_{2n+2} \quad \text{e} \quad 0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = b_{2n+1}$$

ovvero $|r_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$. □

Teorema 5.40 (Criterio di convergenza assoluta) *Se la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *converge assolutamente, allora essa converge e si ha*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \, .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella del Teorema 10.7 (criterio di convergenza assoluta per gli integrali impropri).

Definiamo le successioni

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad a_k^- = \begin{cases} 0 & \text{se } a_k \geq 0 \\ -a_k & \text{se } a_k < 0 \, . \end{cases}$$

Osserviamo che $a_k^+, a_k^- \geq 0$ per ogni $k \geq 0$, e risulta

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \qquad \text{e} \qquad |a_k| = a_k^+ + a_k^- \,.$$

Poiché $0 \leq a_k^+, a_k^- \leq |a_k|$, per ogni $k \geq 0$, possiamo applicare il Criterio del confronto (Teorema 5.29) e ottenere che le serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^+$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ convergono. Osservando che, per ogni $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k^+ - a_k^-\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- \,,$$

deduciamo che anche la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=0}^{\infty} a_k^-$ converge.

Infine, passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \,,$$

si ottiene la disuguaglianza richiesta. $\square$