C.13

Integrale di Riemann

Premettiamo il seguente risultato.

Lemma C.13.1 *Sia f una funzione limitata su $I = [a,b]$. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e una funzione $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che*

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Per definizione f è integrabile se e solo se

$$\int_I f = \inf\left\{\int_I h : h \in \mathcal{S}_f^+\right\} = \sup\left\{\int_I g : g \in \mathcal{S}_f^-\right\}\,.$$

Sia f integrabile. Fissato $\varepsilon > 0$, per definizione di estremo inferiore, è possibile individuare una funzione $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ tale che $\displaystyle\int_I h_\varepsilon - \int_I f < \varepsilon/2$; analogamente, per definizione di estremo superiore, si può trovare $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tale che $\displaystyle\int_I f - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon/2$. Pertanto

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon = \int_I h_\varepsilon - \int_I f + \int_I f - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Viceversa, usando la Definizione 9.26 e la Proprietà 9.27, si ha

$$\int_I g_\varepsilon \le \underline{\int_I} f \le \overline{\int_I} f \le \int_I h_\varepsilon$$

e quindi

$$\overline{\int_I} f - \underline{\int_I} f \le \int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ottiene $\displaystyle\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$ ovvero la funzione f è integrabile su $[a,b]$. $\square$

Pag. 339 $\longleftarrow$ Dimostrazione del Teorema 9.31

Teorema 9.31 *Sono integrabili sull'intervallo* $[a, b]$

a) le funzioni continue su $[a, b]$*;*
b) le funzioni continue a tratti su $[a, b]$*;*
c) le funzioni continue su (a, b) *e limitate su* $[a, b]$*;*
d) le funzioni monotone su $[a, b]$*.*

Dimostrazione.
a) Per il Teorema di Weierstrass, f è limitata su $[a, b]$ e, per il Teorema C.6.4 di Heine-Cantor, f è uniformemente continua in $[a, b]$. Questo significa che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta > 0$ tale che se $x', x'' \in [a, b]$ e $|x' - x''| < \delta$ allora $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Consideriamo una suddivisione $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ abbia ampiezza $< \delta$ $(k = 1, \ldots, n)$. Applichiamo il Teorema di Weierstrass su ognuno di essi: per ogni $k = 1, \ldots, n$, esistono punti $\xi_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tali che

$$f(\xi_k) = m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(\eta_k) = M_k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \, .$$

Poiché $|\eta_k - \xi_k| < \delta$, si ha

$$M_k - m_k = f(\eta_k) - f(\xi_k) < \varepsilon \, .$$

Siano ora $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} M_k & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k], \; k = 1, \ldots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} m_k & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k], \; k = 1, \ldots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Per ogni $x \in [a, b]$, risulta $h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) < \varepsilon$ e quindi

$$\int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon = \int_I (h_\varepsilon - g_\varepsilon) < \int_I \varepsilon = (b - a)\varepsilon \, .$$

Poiché ε è arbitrario, applicando il Lemma C.13.1, si ottiene il risultato.

b) Siano $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ i punti di discontinuità di f interni all'intervallo $[a, b]$, con $x_{k-1} < x_k$; poniamo poi $x_0 = a$ e $x_n = b$. Per $k = 1, \ldots, n$, consideriamo le funzioni continue sull'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ così definite

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k), \\ \lim\limits_{x \to x_{k-1}^+} f(x) & \text{se } x = x_{k-1}, \\ \lim\limits_{x \to x_k^-} f(x) & \text{se } x = x_k \, . \end{cases}$$

Procedendo come nella dimostrazione del punto a), fissato $\varepsilon > 0$, esistono $h_{\varepsilon,k} \in \mathcal{S}^+_{f_k}$ e $g_{\varepsilon,k} \in \mathcal{S}^-_{f_k}$ tali che

$$h_{\varepsilon,k}(x) - g_{\varepsilon,k}(x) < \varepsilon\,, \qquad \forall x \in [x_{k-1}, x_k]\,.$$

Siano ora $h_\varepsilon \in \mathcal{S}^+_f$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}^-_f$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} h_{\varepsilon,k}(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} g_{\varepsilon,k}(x) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \dots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Allora, per ogni $x \in [a, b]$, risulta $h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x) < \varepsilon$ e, come in precedenza, concludiamo applicando il Lemma C.13.1.

c) Sia $\varepsilon > 0$ fissato tale che $I_\varepsilon = [a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset [a, b]$. La funzione f è continua su I_ε e, procedendo come nel punto a), è possibile trovare due funzioni a scala definite su I_ε, siano φ_ε e ψ_ε, tali che

$$\varphi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \psi_\varepsilon(x) \qquad \text{e} \qquad \psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) < \varepsilon\,, \quad \forall x \in I_\varepsilon\,.$$

Siano inoltre $M = \sup\limits_{x \in I} f(x)$ e $m = \inf\limits_{x \in I} f(x)$. Consideriamo ora le funzioni a scala $h_\varepsilon \in \mathcal{S}^+_f$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}^-_f$ definite come

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \psi_\varepsilon(x) & \text{se } x \in I_\varepsilon, \\ M & \text{se } x \notin I_\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x) & \text{se } x \in I_\varepsilon, \\ m & \text{se } x \notin I_\varepsilon. \end{cases}$$

Usando il Teorema 9.33 i), si ha

$$\begin{aligned} \int_I h_\varepsilon - \int_I g_\varepsilon &= \int_{[a,a+\varepsilon]} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) + \int_{I\varepsilon} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) + \int_{[b-\varepsilon,b]} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) \\ &= 2(M - m)\varepsilon + \int_{I\varepsilon} (h_\varepsilon - g_\varepsilon) \\ &< 2(M - m)\varepsilon + (b - a - 2\varepsilon)\varepsilon < \big(2(M - m) + b - a\big)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Applicando ancora il Lemma C.13.1, si ottiene il risultato.

d) Per fissare le idee, supponiamo che la funzione f sia crescente. Osserviamo preliminarmente che f è limitata su $[a, b]$ in quanto $f(a) \le f(x) \le f(b)$, $\forall x \in [a, b]$.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia n un intero tale che $n > \dfrac{b-a}{n}$; suddividiamo l'intervallo in n parti uguali di ampiezza $\dfrac{b-a}{n} < \varepsilon$ e siano $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ i punti di suddivisione. Definiamo le funzioni a scala $h_n \in \mathcal{S}^+_f$ e $g_n \in \mathcal{S}^-_f$ definite come

$$h_n(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a, \end{cases}$$

e

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x_{k-1}) & \text{se } x \in (x_{k-1}, x_k],\ k = 1, \ldots, n, \\ f(a) & \text{se } x = a. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \int_I h_n - \int_I g_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) = \frac{b-a}{n}\big(f(b) - f(a)\big) \\ &= \varepsilon\big(f(b) - f(a)\big) \,. \end{aligned}$$

Il risultato segue ancora dal Lemma C.13.1.

Se la funzione f è decrescente, la dimostrazione è analoga. □

Pag. 340 $\longleftarrow$ Dimostrazione della Proposizione 9.32

Proposizione 9.32 *Sia f una funzione integrabile su $[a, b]$. Allora*

i) f è integrabile su ogni sottointervallo $[c, d] \subset [a, b]$;
ii) la funzione $|f|$ è integrabile su $[a, b]$.

Dimostrazione. *i)* Se f è una funzione a scala il risultato è immediato. In generale, sia f integrabile su $[a, b]$; fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma C.13.1, esistono $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che

$$\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon = \int_a^b \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) < \varepsilon \,.$$

Poiché

$$\int_c^d \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) \leq \int_a^b \big(h_\varepsilon - g_\varepsilon\big) < \varepsilon \,,$$

il risultato segue applicando il Lemma C.13.1 alla funzione f ristretta all'intervallo $[c, d]$.

ii) Ricordando che $|f| = f_+ + f_-$, dove f_+ e f_- sono rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f, è sufficiente mostrare che sono integrabili f_+ e f_- e applicare il Teorema 9.33 ii), per ottenere il risultato.

Dimostriamo che f_+ è integrabile. Fissato $\varepsilon > 0$, per il Lemma C.13.1 esistono $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ e $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ tali che $\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon$. Sia $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $I = [a, b]$ adattata a entrambe le funzioni a scala h_ε e g_ε. Consideriamo le funzioni $h_{\varepsilon,+}$ e $g_{\varepsilon,+}$, parte positiva rispettivamente di h_ε e g_ε. Fissato un intervallo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, esaminando le tre possibili situazioni $0 \leq g_\varepsilon \leq h_\varepsilon$, $g_\varepsilon \leq 0 \leq h_\varepsilon$ e $g_\varepsilon \leq h_\varepsilon \leq 0$, si verifica facilmente che

$$g_{\varepsilon,+} \le f_+ \le h_{\varepsilon,+} \qquad \text{e} \qquad \int_{I_k} h_{\varepsilon,+} - \int_{I_k} g_{\varepsilon,+} \le \int_{I_k} h_\varepsilon - \int_{I_k} g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Di conseguenza, si ha $h_{\varepsilon,+} \in \mathcal{S}^+_{f_+}$ e $g_{\varepsilon,+} \in \mathcal{S}^-_{f_+}$ e

$$\int_I h_{\varepsilon,+} - \int_I g_{\varepsilon,+} = \sum_{k=1}^n \Big(\int_{I_k} h_{\varepsilon,+} - \int_{I_k} g_{\varepsilon,+} \Big) \le \sum_{k=1}^n \Big(\int_{I_k} h_\varepsilon - \int_{I_k} g_\varepsilon \Big) < \varepsilon\,.$$

Pertanto, applicando il Lemma C.13.1, si ottiene l'integrabilità di f_+.
In modo analogo si verifica che anche f_- è integrabile. □

Pag. 341 ⟵ Dimostrazione del Teorema 9.33

Teorema 9.33 *Siano f e g funzioni integrabili su un intervallo limitato I della retta reale.*

i) (**Additività rispetto al dominio di integrazione**) *Per ogni $a, b, c \in I$, si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

ii) (**Linearità dell'integrale definito**) *Per ogni $a, b \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

iii) (**Positività dell'integrale definito**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \ge 0$ in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Inoltre, se f è continua, vale l'uguaglianza se e solo se f è identicamente nulla.

iv) (**Confronto tra integrali definiti**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Se $f \le g$ in $[a, b]$, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

v) (**Maggiorazione dell'integrale definito**) *Siano $a, b \in I$, con $a < b$. Allora*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Dimostrazione. Non è difficile verificare che le proprietà *i) -v)* valgono nel caso in cui le funzioni f e g sono funzioni a scala. Dimostriamolo pertanto per generiche funzioni integrabili.

i) Verifichiamo la proprietà nel caso $a < c < b$. Le altre possibili situazioni si studiano utilizzando tale risultato e le relazioni (9.19). Per la Proposizione 9.32

i), f è integrabile sugli intervalli $[a,b]$, $[a,c]$ e $[c,b]$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, siano $g_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^-$ e $h_\varepsilon \in \mathcal{S}_f^+$ tali che

$$\int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad \int_a^b g_\varepsilon \le \int_a^b f \le \int_a^b h_\varepsilon\,.$$

Poiché la proprietà vale per le funzioni a scala, si ha

$$\int_a^b g_\varepsilon = \int_a^c g_\varepsilon + \int_c^b g_\varepsilon \le \int_a^c f + \int_c^b f \le \int_a^c h_\varepsilon + \int_c^b h_\varepsilon = \int_a^b h_\varepsilon$$

e pertanto

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \le \int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon < \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, il risultato segue.

ii) Dividiamo la dimostrazione in due parti, verificando che

a) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\,.$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $a < b$. Nel primo caso, se $\alpha = 0$ la verifica è banale. Sia $\alpha > 0$. Osserviamo che se $g \in \mathcal{S}_f^-$ e $h \in \mathcal{S}_f^+$ allora $\alpha g \in \mathcal{S}_{\alpha f}^-$ e $\alpha h \in \mathcal{S}_{\alpha f}^+$; dunque

$$\begin{aligned}\alpha \int_a^b g(x)\,dx &= \int_a^b \alpha g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \\ &\le \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \le \int_a^b \alpha h(x)\,dx = \alpha \int_a^b h(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza $\alpha \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx$, prendendo l'estremo superiore degli integrali $\int_a^b g$ facendo variare $g \in \mathcal{S}_f^-$ e usando l'integrabilità di f su $[a,b]$, si ottiene

$$\alpha \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx\,;$$

analogamente dalla disuguaglianza $\displaystyle\overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \le \alpha \int_a^b h(x)\,dx$ si ha

$$\overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \le \alpha \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

In conclusione,

$$\alpha \int_a^b f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} \alpha f(x)\,dx \le \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

e quindi $\alpha \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx$.

Se $\alpha < 0$, la dimostrazione è analoga osservando che se $g \in \mathcal{S}_f^-$ e $h \in \mathcal{S}_f^+$ allora $\alpha g \in \mathcal{S}_{\alpha f}^+$ e $\alpha h \in \mathcal{S}_{\alpha f}^-$.

Verifichiamo ora il punto b). Siano $f_1 \in \mathcal{S}_f^-$, $f_2 \in \mathcal{S}_f^+$, $g_1 \in \mathcal{S}_g^-$ e $g_2 \in \mathcal{S}_g^+$; allora $f_1 + g_1 \in \mathcal{S}_{f+g}^-$ e $f_2 + g_2 \in \mathcal{S}_{f+g}^+$. Dunque

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b g_1(x)\,dx &= \int_a^b \big(f_1(x) + g_1(x)\big)\,dx \le \underline{\int_a^b} \alpha\big(f(x) + g(x)\big)\,dx \\
&\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \le \int_a^b \big(f_2(x) + g_2(x)\big)\,dx \\
&= \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b g_2(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Fissate g_1, f_2 e g_2 e prendendo l'estremo superiore degli integrali $\displaystyle\int_a^b f_1(x)\,dx$ al variare di f_1 in $\mathcal{S}_f^-$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g_1(x)\,dx &\le \underline{\int_a^b} \alpha\big(f(x) + g(x)\big)\,dx \\
&\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b g_2(x)\,dx\,;
\end{aligned}$$

facendo ora variare g_1 in $\mathcal{S}_g^-$ e prendendo ancora l'estremo superiore degli integrali $\displaystyle\int_a^b g_1(x)\,dx$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx &\le \underline{\int_a^b} \alpha\big(f(x) + g(x)\big)\,dx \\
&\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \le \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b g_2(x)\,dx\,.
\end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento prima fissando g_2 e facendo variare $f_2 \in \mathcal{S}_f^+$ e poi facendo variare $g_2 \in \mathcal{S}_g^+$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx &\le \underline{\int_a^b} \alpha\big(f(x) + g(x)\big)\,dx \\
&\le \overline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

da cui il risultato.

iii) La funzione g costante uguale a zero appartiene a $\mathcal{S}_f^-$, pertanto

$$0 = \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Supponiamo ora che f sia continua; ovviamente se $f(x) = 0$ allora $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Verifichiamo l'implicazione inversa, ossia che se $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ allora $f(x) = 0$. Se per assurdo fosse $f(\bar{x}) \neq 0$ per un certo $\bar{x} \in (a,b)$, applicando il Teorema C.4.2 esiste un intorno $I_\delta(\bar{x}) = (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \subset [a,b]$ e una costante $K_f > 0$, per ogni $x \in I_\delta(\bar{x})$. Pertanto la funzione a scala

$$g(x) = \begin{cases} K_f & \text{se } x \in I_\delta(\bar{x}) \\ 0 & \text{se } x \notin I_\delta(\bar{x}) \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{S}_f^-$ e

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx = \delta K_f > 0\,,$$

da cui l'assurdo. Quindi $f(x) = 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e, per continuità, f è nulla anche negli estremi a e b.

iv) Segue direttamente dal punto *iii)*, osservando che la funzione $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0$.

v) Per la Proposizione 9.32 ii), la funzione $|f|$ è integrabile su $[a,b]$. Ricordando che $f = f_+ - f_-$ (dove f_+ è la funzione parte positiva e f_- la funzione parte negativa di f) e usando la linearità dell'integrale dimostrata nel punto *ii)*, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx\,.$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, la positività dell'integrale dimostrata nel punto *iii)* (si ricordi che $f_+, f_- \geq 0$) e la relazione $|f| = f_+ + f_-$ si ottiene

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \left|\int_a^b f_+(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b f_-(x)\,dx\right| = \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx \\ &= \int_a^b \big(f_+(x) + f_-(x)\big)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx\,. \qquad \square\end{aligned}$$