C.4

Limiti

Pag. 87 ⟵ Dimostrazione del Teorema 3.27

Teorema 3.27 *Sia f una funzione definita e monotona in un intorno destro $I^+(c)$ del punto c (dove c può essere un numero reale oppure $-\infty$), escluso al più il punto c stesso. Allora esiste, finito o infinito, il limite destro per $x \to c$ e precisamente si ha*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\} & \textit{se } f \textit{ è crescente,} \\ \sup\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\} & \textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{cases}$$

Analogamente, se f una funzione definita e monotona in un intorno sinistro $I^-(c)$ del punto c (dove c può essere un numero reale oppure $+\infty$), escluso al più il punto c stesso, si ha

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in I^-(c),\, x < c\} & \textit{se } f \textit{ è crescente,} \\ \inf\{f(x) : x \in I^-(c),\, x < c\} & \textit{se } f \textit{ è decrescente.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che se f è crescente nell'intorno destro $I^+(c)$ di c allora

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I^+(c),\, x > c\}\,.$$

Tutti gli altri casi si dimostrano in maniera analoga.
Sia dapprima $\ell = \inf\{f(x) : x \in I^+(c), x > c\} \in \mathbb{R}$. Le condizioni che caratterizzano un estremo inferiore (analoghe alle (1.7)) sono le seguenti:

i) *per ogni $x \in I^+(c) \setminus \{c\}$, $f(x) \geq \ell$;*
ii) *per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un elemento $x_\varepsilon \in I^+(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$.*

Per la monotonia della funzione abbiamo

$$f(x) \leq f(x_\varepsilon)\,, \qquad \forall x \in I^+(c) \setminus \{c\},\, x < x_\varepsilon\,.$$

Ne segue che

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) < \ell + \varepsilon\,, \qquad \forall x \in I^+(c) \setminus \{c\},\, x < x_\varepsilon\,;$$

dunque ogni $f(x)$ appartiene all'intorno di ℓ di raggio ε se $x \neq c$ appartiene all'intorno destro di c di estremo superiore x_ε. Pertanto è verificata la condizione

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell\,.$$

Sia ora $\ell = -\infty$; ciò significa che per ogni $A > 0$ esiste $x_A \in I^+(c) \setminus \{c\}$ tale che $f(x_A) < -A$. Usando ancora la monotonia della funzione, abbiamo $f(x) \leq f(x_A) < -A$, $\forall x \in I^+(c) \setminus \{c\}$ e $x < x_A$. Dunque ogni $f(x)$ appartiene all'intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-A$ se $x \neq c$ appartiene all'intorno destro di c di estremo superiore x_A. Se ne conclude che

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty\,. \qquad \square$$

Premettiamo i seguenti risultati utili nel seguito.

Teorema C.4.1 (**di limitatezza locale**) *Se f ammette limite finito per $x \to c$, allora esiste un intorno $I(c)$ di c e una costante $M_f > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}\ ,\ |f(x)| \leq M_f\,.$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim_{x \to c} f(x) \in \mathbb{R}$; dalla definizione di limite con, ad esempio, $\varepsilon = 1$ si deduce che esiste un intorno $I(c)$ di c tale che

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < 1\,.$$

Ricordando la disuguaglianza triangolare (1.1), ne segue che, in tale insieme,

$$|f(x)| = |f(x) - \ell + \ell| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| < 1 + |\ell|\,.$$

Dunque è sufficiente porre $M_f = 1 + |\ell|$. $\square$

Teorema C.4.2 (**forma forte del Teorema di permanenza del segno**) *Se f ammette limite non nullo (finito o infinito) per $x \to c$, allora esiste un intorno $I(c)$ di c e una costante $K_f > 0$ tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}\,, \qquad |f(x)| > K_f\,. \tag{C.4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \lim_{x \to c} f(x)$. Se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, fissato ad esempio $\varepsilon = |\ell|/2$ nella definizione di limite per f, esiste un intorno $I(c)$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap I(c) \setminus \{c\}$, $|f(x) - \ell| < |\ell|/2$. Dunque si ha

$$|\ell| = |f(x) + \ell - f(x)| \leq |f(x)| + |f(x) - \ell| < |f(x)| + \frac{|\ell|}{2}$$

da cui

$$|f(x)| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}\,.$$

e il teorema è dimostrato con $K_f = \frac{|\ell|}{2}$.

Se $\ell \pm \infty$, si ha $\lim_{x \to c} |f(x)| = +\infty$ e dunque è sufficiente scegliere ad esempio $A = 1$ nella definizione di limite ed ottenere $|f(x)| > 1$ in un intorno $I(c)$ di c; pertanto in tal caso $K_f = 1$. □

Osservazione C.4.3 Notiamo che se $\ell > 0$, allora il Teorema di permanenza del segno 4.2 ci assicura che in un opportuno intorno di c, tranne al più nel punto c stesso, la funzione è strettamente positiva. Dunque la disuguaglianza in (C.4.1) può essere espressa in modo più preciso come $f(x) > K_f$. Analogamente se $\ell < 0$, la disuguaglianza (C.4.1) diventa $f(x) < -K_f$. In tale senso il Teorema C.4.2 è un rafforzamento del Teorema di permanenza del segno 4.2. □

La seguente proprietà rende talvolta più agevole la verifica della condizione di limite.

Proprietà C.4.4 *Per dimostrare che* $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *è sufficiente trovare una opportuna costante* $C > 0$ *tale che per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un intorno* $I(c)$ *tale che*

$$\forall x \in \operatorname{dom} f, \qquad x \in I(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < C\varepsilon\,. \tag{C.4.2}$$

Dimostrazione. Infatti la condizione (3.8) si deduce dalla (C.4.2) scegliendo ε/C in luogo di ε. □

Pag. 99 ⟵ Dimostrazione del Teorema 4.10

Teorema 4.10 *Supponiamo che, per* x *tendente a* c, *la funzione* f *ammetta limite* ℓ *(finito o infinito) e la funzione* g *ammetta limite* m *(anch'esso finito o infinito). Allora, ogniqualvolta l'espressione a secondo membro è definita, si ha*

$$\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \ell \pm m,$$
$$\lim_{x \to c} [f(x)\, g(x)] = \ell\, m,$$
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$$

(in quest'ultimo caso supponiamo inoltre che $g(x) \neq 0$ *in un intorno di* c *escluso al più il punto* c*).*

Dimostrazione. Dimostriamo i seguenti casi:

a) se $\ell \in \mathbb{R}$ e $m = -\infty$, allora $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$;
b) se $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) \ = \ell\, m \in \mathbb{R}$;
c) se $\ell, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, allora $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m} \in \mathbb{R}$;
d) se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oppure $\ell \pm \infty$ e $m = 0$, allora $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Lasciamo la dimostrazione dei casi rimanenti per esercizio.

a) Sia $A > 0$ arbitrariamente fissato.
Dal Teorema di limitatezza locale C.4.1, applicato alla funzione f, esiste un intorno $I'(c)$ di c e una costante $M_f > 0$ tale che per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap I'(c) \setminus \{c\}$, $|f(x)| \leq M_f$.
Inoltre, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$ equivale al fatto che per ogni $B > 0$ esiste un intorno $I''(c)$ di c tale che per ogni $x \in \operatorname{dom} g \cap I''(c) \setminus \{c\}$ si ha $g(x) < -B$, ossia $-g(x) > B$.
Se scegliamo $B = A + M_f$ e poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$, abbiamo, per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\}$,

$$f(x) - g(x) > -M_f + B \geq A\,.$$

Dunque si è dimostrato che $\lim\limits_{x\to c} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$.

b) Sia $\varepsilon > 0$ fissato.
Dall'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'(c) : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon\,,$$

mentre dal Teorema di limitatezza locale C.4.1 si ottiene

$$\exists I''(c),\, \exists M_f > 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \in I''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < M_f\,.$$

Similmente, dall'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'''(c) : \forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I'''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Poniamo allora $I(c) = I'(c) \cap I''(c) \cap I'''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell m| &= |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - \ell m| \\ &= |f(x)\big(g(x) - m\big) + \big(f(x) - \ell\big)m| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |f(x) - \ell|\,|m| < (M_f + |m|)\varepsilon\,. \end{aligned}$$

È dunque verificata la (C.4.2) con $C = M_f + |m|$.

c) Sia $\varepsilon > 0$ fissato.
Dall'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to c} g(x) = m \in \mathbb{R}$, si ha

$$\exists I'(c) : \forall x \in \operatorname{dom} f,\ x \in I'(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

e

$$\exists I''(c) : \forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I''(c) \setminus \{c\} \quad \Rightarrow \quad |g(x) - m| < \varepsilon\,.$$

Inoltre, poiché $m \neq 0$, il Teorema C.4.2 assicura l'esistenza di un intorno $I'''(c)$ di c e di una costante $K_g > 0$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} g,\ x \in I'''(c) \setminus \{c\}$ si ha $|g(x)| > K_g$. Poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c) \cap I'''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g,\ x \in I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{m}\right| &= \left|\frac{f(x)m - \ell g(x)}{mg(x)}\right| = \frac{|f(x)m - \ell m + \ell m - \ell g(x)|}{|m||g(x)|} \\ &= \frac{\big|\big(f(x)-\ell\big)m + \ell\big(m - g(x)\big)\big|}{|m||g(x)|} \leq \frac{|f(x)-\ell|\,|m| + |\ell|\,|g(x)-m|}{|m||g(x)|} \\ &< \frac{|m| + |\ell|}{|m|K_g}\,\varepsilon\,.\end{aligned}$$

È dunque verificata la (C.4.2) con $C = \dfrac{|m| + |\ell|}{|m|K_g}$.

d) Sia $A > 0$ fissato.
Applicando il Teorema C.4.2 alla funzione f, esiste un intorno $I'(c)$ di c e una costante $K_f > 0$ tale che $\forall x \in \operatorname{dom} f \cap \in I'(c) \setminus \{c\},\ |f(x)| > K_f$.
Dall'ipotesi $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, scegliendo $\varepsilon = K_f/A$, deduciamo l'esistenza di un intorno $I''(c)$ di c tale che $|g(x)| < K_f/A$, per ogni $x \in \operatorname{dom} g \cap I''(c) \setminus \{c\}$. Poniamo $I(c) = I'(c) \cap I''(c)$; per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap I(c) \setminus \{c\}$, si ha

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| > K_f \frac{A}{K_f} = A\,.$$

Ciò mostra che $\lim\limits_{x\to c} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, che è precisamente la tesi. □