

C.1

Principio di induzione

Il Principio di induzione costituisce una *regola di dimostrazione* utile per stabilire proprietà valide per ogni intero n , o eventualmente a partire da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$.

Teorema C.1.1 (Principio di induzione) *Sia $n_0 \geq 0$ un intero e sia $P(n)$ un predicato definito per ogni intero $n \geq n_0$. Supponiamo che siano verificate le seguenti due condizioni:*

- i) $P(n_0)$ è vero;*
- ii) per ogni $n \geq n_0$, se $P(n)$ è vero allora $P(n+1)$ è vero.*

Allora $P(n)$ è vero per ogni $n \geq n_0$.

Dimostrazione. La dimostrazione utilizza la proprietà che ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} ammette elemento minimo; tale proprietà, intuitivamente evidente, può essere dedotta dagli assiomi che definiscono l'insieme \mathbb{N} .

Procediamo per assurdo, supponendo che esista almeno un intero $n \geq n_0$ per cui $P(n)$ sia falso. Ciò equivale a dire che il sottoinsieme

$$F = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ e } P(n) \text{ è falso}\}$$

non è vuoto. Sia $\bar{n} = \min F$. Poiché $P(\bar{n})$ è falso, non può essere $\bar{n} = n_0$ per la condizione i); dunque $\bar{n} > n_0$. Pertanto $\bar{n} - 1 \geq n_0$ e per definizione di minimo elemento, $P(\bar{n} - 1)$ è vero. Ma la condizione ii) applicata con $n = \bar{n} - 1$ implica che $P(\bar{n})$ è vero, cioè $\bar{n} \notin F$. Ciò contraddice il fatto che \bar{n} è il minimo elemento di F . \square

In pratica, il Principio di induzione si usa nel modo seguente: dapprima si controlla che $P(n_0)$ sia vero; successivamente, si assume che $P(n)$ sia vero per un generico n e, usando tale informazione, si dimostra che anche $P(n+1)$ è vero.

L'applicazione del Principio di induzione è illustrata nel seguito, in una serie di casi considerati nel testo.

Pag. 21 ← **Formula del binomio di Newton**

Dimostriamo la formula, valida per ogni $n \geq 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Per $n = 0$ si ha

$$(a+b)^0 = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{0} a^0 b^0 = a^0 b^0 = 1,$$

dunque la formula è vera.

Supponiamo la formula vera per un generico n e verifichiamo che vale per l'intero successivo, cioè che

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}; \end{aligned}$$

ponendo $k+1 = h$ nella seconda sommatoria, otteniamo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h$$

e, osservando che h è una variabile muta, possiamo tornare alla variabile k , scrivendo

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k.$$

Allora

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}. \end{aligned}$$

Usando la (1.12), con n sostituito da $n+1$, e ricordando le relazioni

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k,\end{aligned}$$

cioè la tesi. \square

Pag. 112 ← **Dimostrazione del Teorema di esistenza degli zeri**

Teorema 4.23 (di esistenza degli zeri) *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se $f(a)f(b) < 0$, cioè se f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste uno zero di f nell'intervallo aperto (a, b) .*

Se inoltre f è strettamente monotona in $[a, b]$, allora lo zero è unico nell'intervallo.

Si vuole giustificare l'esistenza di due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ soddisfacenti le relazioni

$$\begin{aligned}[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \\ f(a_n) < 0 < f(b_n) \quad \text{e} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n},\end{aligned}$$

a meno che per un certo n il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$ non sia uno zero della funzione.

Per $n = 0$ si ha, per ipotesi, $f(a_0) = f(a) < 0 < f(b) = f(b_0)$ e, banalmente, $b_0 - a_0 = \frac{b_0 - a_0}{2^0}$.

Supponiamo le relazioni vere sino a un certo n e verifichiamole per $n + 1$. Sia $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ il punto medio dell'intervallo $[a_n, b_n]$, con $f(c_n) \neq 0$. Se $f(c_n) > 0$, poniamo $a_{n+1} = a_n$ e $b_{n+1} = c_n$; se invece $f(c_n) < 0$, poniamo $a_{n+1} = c_n$ e $b_{n+1} = b_n$. L'intervallo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ è contenuto nell'intervallo $[a_n, b_n]$ e si ha

$$f(a_{n+1}) < 0 < f(b_{n+1}) \quad \text{e} \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \quad \square$$

Pag. 143 ← **Disuguaglianza di Bernoulli**

Dimostriamo che, per ogni $r \geq -1$, si ha

$$(1+r)^n \geq 1+nr, \quad \forall n \geq 0.$$

Per $n = 0$, si ha $(1+r)^0 = 1 = 1+0r$, e dunque la disuguaglianza non stretta è verificata.

Supponiamo vera la disuguaglianza per un certo n e verifichiamo che vale per $n + 1$. Si ha, osservando che $1+r \geq 0$,

$$\begin{aligned}(1+r)^{n+1} &= (1+r)(1+r)^n \geq (1+r)(1+nr) \\ &= 1+r+nr+nr^2 = 1+(n+1)r+nr^2 \\ &\geq 1+(n+1)r.\end{aligned} \quad \square$$

Pag. 144 ← **Disuguaglianza (5.16)**

Dimostriamo che se, per ogni $n > n_\varepsilon$, si ha

$$a_{n+1} < r a_n, \quad (\text{C.1.1})$$

allora $a_{n+1} < r^{n-n_\varepsilon} a_{n_\varepsilon+1}$.

Facendo riferimento alle notazioni del Principio di induzione, poniamo $n_0 = n_\varepsilon + 1$ e $P(n) = "a_{n+1} < r^{n+1-n_0} a_{n_0}"$. Per $n = n_0$, $P(n_0)$ è vero in quanto coincide con la (C.1.1). Supponendo vero $P(n)$, abbiamo, usando ancora la (C.1.1),

$$a_{n+2} < r a_{n+1} < r r^{n+1-n_0} a_{n_0} = r^{n+2-n_0} a_{n_0},$$

che è esattamente $P(n+1)$. □