

Integrali impropri

Pag. 375 ← Esempio di funzione integrabile ma non assolutamente integrabile

Vogliamo verificare che

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{converge, ma} \quad \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \quad \text{diverge.}$$

Verifichiamo dapprima che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge. Integriamo per parti su ogni intervallo $[1, a]$ con $a > 1$, ponendo $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g'(x) = \sin x$; in tal modo si ha $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $g(x) = -\cos x$. Pertanto

$$\int_1^a \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^a - \int_1^a \frac{\cos x}{x^2} dx;$$

l'ultimo integrale converge per quanto visto nell'Esempio 10.8. Dunque la funzione $\frac{\sin x}{x}$ risulta integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$.

Dimostriamo ora che $\frac{\sin x}{x}$ non è assolutamente integrabile su $[1, +\infty)$. Infatti, poiché, per ogni x , $|\sin x| \leq 1$, si ha

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2x}{x}.$$

Mostreremo che l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$ diverge e quindi per il Criterio del confronto (Teorema 10.5) anche l'integrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ diverge. Infatti si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Il primo integrale diverge, mentre con un procedimento analogo a quello usato sopra si verifica che il secondo integrale converge. Dunque $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx$ diverge e la funzione $\frac{\sin x}{x}$ non è assolutamente integrabile. \square

Pag. 375 ← Dimostrazione del Teorema 10.10

Teorema 10.10 (Criterio del confronto asintotico) *Sia $f \in \mathcal{R}_{\text{loc}}([a, +\infty))$. Supponiamo che f abbia ordine di infinitesimo α per $x \rightarrow +\infty$ rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$.*

i) Se $\alpha > 1$, allora $f \in \mathcal{R}([a, +\infty))$;

ii) se $\alpha \leq 1$, allora $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Dimostrazione. Poiché $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ per $x \rightarrow +\infty$, possiamo supporre che la funzione f sia di segno costante per x sufficientemente grande, ad esempio per $x > A > 0$. Non è restrittivo supporre f strettamente positiva, altrimenti operiamo un cambiamento di segno. Inoltre, per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} \quad \Rightarrow \quad f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \text{e} \quad \frac{1}{x^\alpha} = O(f(x)),$$

ovvero esistono due costanti c_1, c_2 positive tali che

$$\frac{c_1}{x^\alpha} \leq f(x) \leq \frac{c_2}{x^\alpha}, \quad \forall x > A.$$

È allora sufficiente applicare il Criterio del confronto (Teorema 10.5), usando i risultati dell'Esempio 10.4, per ottenere la tesi. \square