C.9

Teorema di de l'Hôpital

Pag. 204 ⟵ Dimostrazione del Teorema 6.40

Teorema 6.40 *Siano f e g due funzioni definite nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, e tali che*

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L,$$

con $L = 0$ oppure $+\infty$ oppure $-\infty$. Se f e g sono derivabili nell'intorno di c, tranne eventualmente in c, con $g' \neq 0$, e se esiste (finito o infinito)

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e tale limite è uguale al precedente.

Dimostrazione. L'enunciato del teorema comprende vari casi a seconda dei valori che possono assumere L e c. Gli argomenti che intervengono nella dimostrazione possono differire al variare della situazione. Pertanto nel seguito raggruppiamo i vari casi per omogeneità di dimostrazione.

a) Casi $L = 0$, $c = x_0^+$, x_0^-, x_0.
Supponiamo dapprima $c = x_0^+$. Per l'ipotesi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = 0$, possiamo prolungare (eventualmente ridefinendone il valore) entrambe le funzioni f e g in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$; in tal modo f e g risultano continue (da destra) anche in x_0. Detto $I^+(x_0)$ l'intorno destro di x_0 in cui le funzioni f e g verificano le ipotesi del teorema, sia $x \in I^+(x_0)$. Nell'intervallo $[x_0, x]$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema C.8.1 di Cauchy e dunque esiste $t = t(x) \in (x_0, x)$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

Poiché $x_0 < t(x) < x$, il secondo Teorema del confronto 4.5 garantisce che al tendere di x a x_0 anche $t = t(x)$ tende a x_0. Pertanto, applicando il Teorema di sostituzione 4.15, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} = \lim_{t\to x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

e la tesi è verificata.
Analogamente si procede nel caso $c = x_0^-$; il caso $c = x_0$ si ottiene combinando i due limiti unilateri.

b) Casi $L = 0$, $c = \pm\infty$.
Supponiamo $c = +\infty$. Mediante la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ siamo condotti a studiare il limite per $z \to 0^+$ del quoziente $\dfrac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$. Osservando che $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{1}{z^2} f'\left(\dfrac{1}{z}\right)$, e analogamente per la funzione g, si ha

$$\lim_{z\to 0^+} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f\left(\frac{1}{z}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dunque siamo ricondotti al caso precedente con $c = 0^+$ e il risultato segue. Similmente si procede nel caso $c = -\infty$.

c) Casi $L = \pm\infty$, $c = x_0^+, x_0^-, x_0$.
Supponiamo dapprima $c = x_0^+$ e poniamo $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$. Nel caso $\ell \in \mathbb{R}$, sia $I^+(x_0)$ l'intorno destro di x_0 in cui le funzioni f e g verificano le ipotesi del teorema. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$ e per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ si ha $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$. Nell'intervallo $[x, x_0 + \delta_1]$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema C.8.1 di Cauchy e dunque esiste $t = t(x) \in (x, x_0 + \delta_1)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0 + \delta_1)}{g(x) - g(x_0 + \delta_1)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,. \tag{C.9.1}$$

Scriviamo il quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nella forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x) \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

dove, ricordando la (C.9.1), si ha

$$\psi(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0+\delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0+\delta_1)}{f(x)}}\,, \qquad \text{con} \qquad \lim_{x\to x_0^+} \psi(x) = 1\,,$$

grazie all'ipotesi $L = \pm\infty$. Dall'ultimo limite ricaviamo che esiste $\delta_2 > 0$, con $\delta_2 < \delta_1$, tale che, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, si ha

$$|\psi(x)| \leq 2 \qquad \text{e} \qquad |\psi(x) - 1| < \varepsilon\,.$$

Allora, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, si ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| &= \left|\psi(x)\frac{f'(t)}{g'(t)} - \psi(x)\ell + \psi(x)\ell - \ell\right| \\ &= |\psi(x)|\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell\right| + |\psi(x) - 1||\ell| < \big(2 + |\ell|\big)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell\,.$$

Sia ora $\ell = +\infty$; per ogni $A > 0$, esiste $\delta_1 > 0$ tale che $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$ e per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$ si ha $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} > A$. Si procede come fatto sopra e, grazie al Teorema C.4.2, si osserva che $\lim\limits_{x \to x_0^+} \psi(x) = 1$ implica l'esistenza di $\delta_2 > 0$, con $\delta_2 < \delta_1$, tale che, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, si ha $\psi(x) \geq \frac{1}{2}$. Dunque, per ogni $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x)\frac{f'(t)}{g'(t)} \geq \frac{1}{2}A\,.$$

Ne segue che la tesi è verificata. Si procede alla stessa maniera per $\ell = -\infty$.

Il teorema si dimostra in modo analogo nel caso $c = x_0^-$; il caso $c = x_0$ si ottiene combinando i due limiti unilateri.

d) Casi $L = \pm\infty$, $c = \pm\infty$.

Come nel punto b), la sostituzione $z = \frac{1}{x}$ ci riconduce al caso precedente. □