

---

**Teorema di de l'Hôpital**

**Pag. 204** ← **Dimostrazione del Teorema 6.40**

**Teorema 6.40** *Siano  $f$  e  $g$  due funzioni definite nell'intorno di  $c$ , tranne eventualmente in  $c$ , e tali che*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L,$$

*con  $L = 0$  oppure  $+\infty$  oppure  $-\infty$ . Se  $f$  e  $g$  sono derivabili nell'intorno di  $c$ , tranne eventualmente in  $c$ , con  $g' \neq 0$ , e se esiste (finito o infinito)*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*allora esiste anche*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

*e tale limite è uguale al precedente.*

**Dimostrazione.** L'enunciato del teorema comprende vari casi a seconda dei valori che possono assumere  $L$  e  $c$ . Gli argomenti che intervengono nella dimostrazione possono differire al variare della situazione. Pertanto nel seguito raggruppiamo i vari casi per omogeneità di dimostrazione.

a) Casi  $L = 0$ ,  $c = x_0^+$ ,  $x_0^-$ ,  $x_0$ .

Supponiamo dapprima  $c = x_0^+$ . Per l'ipotesi  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = 0$ , possiamo

prolungare (eventualmente ridefinendone il valore) entrambe le funzioni  $f$  e  $g$  in  $x_0$  ponendo  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ; in tal modo  $f$  e  $g$  risultano continue (da destra) anche in  $x_0$ . Detto  $I^+(x_0)$  l'intorno destro di  $x_0$  in cui le funzioni  $f$  e  $g$  verificano le ipotesi del teorema, sia  $x \in I^+(x_0)$ . Nell'intervallo  $[x_0, x]$  sono soddisfatte le ipotesi del Teorema C.8.1 di Cauchy e dunque esiste  $t = t(x) \in (x_0, x)$  tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Poiché  $x_0 < t(x) < x$ , il secondo Teorema del confronto 4.5 garantisce che al tendere di  $x$  a  $x_0$  anche  $t = t(x)$  tende a  $x_0$ . Pertanto, applicando il Teorema di sostituzione 4.15, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(t(x))}{g'(t(x))} = \lim_{t \rightarrow x_0^+} \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

e la tesi è verificata.

Analogamente si procede nel caso  $c = x_0^-$ ; il caso  $c = x_0$  si ottiene combinando i due limiti unilateri.

b) Casi  $L = 0$ ,  $c = \pm\infty$ .

Supponiamo  $c = +\infty$ . Mediante la sostituzione  $z = \frac{1}{x}$  siamo condotti a studiare il limite per  $z \rightarrow 0^+$  del quoziente  $\frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$ . Osservando che  $\frac{d}{dz} f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} f'\left(\frac{1}{z}\right)$ , e analogamente per la funzione  $g$ , si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dz} f\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{d}{dz} g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dunque siamo ricondotti al caso precedente con  $c = 0^+$  e il risultato segue. Similmente si procede nel caso  $c = -\infty$ .

c) Casi  $L = \pm\infty$ ,  $c = x_0^+$ ,  $x_0^-$ ,  $x_0$ .

Supponiamo dapprima  $c = x_0^+$  e poniamo  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ . Nel caso  $\ell \in \mathbb{R}$ , sia

$I^+(x_0)$  l'intorno destro di  $x_0$  in cui le funzioni  $f$  e  $g$  verificano le ipotesi del teorema. Per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta_1 > 0$  tale che  $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$  e per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$  si ha  $\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$ . Nell'intervallo  $[x, x_0 + \delta_1]$  sono soddisfatte le ipotesi del Teorema C.8.1 di Cauchy e dunque esiste  $t = t(x) \in (x, x_0 + \delta_1)$  tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0 + \delta_1)}{g(x) - g(x_0 + \delta_1)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (\text{C.9.1})$$

Scriviamo il quoziente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  nella forma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x) \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

dove, ricordando la (C.9.1), si ha

$$\psi(x) = \frac{1 - \frac{g(x_0 + \delta_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0 + \delta_1)}{f(x)}}, \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi(x) = 1,$$

grazie all'ipotesi  $L = \pm\infty$ . Dall'ultimo limite ricaviamo che esiste  $\delta_2 > 0$ , con  $\delta_2 < \delta_1$ , tale che, per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ , si ha

$$|\psi(x)| \leq 2 \quad \text{e} \quad |\psi(x) - 1| < \varepsilon.$$

Allora, per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ , si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| &= \left| \psi(x) \frac{f'(t)}{g'(t)} - \psi(x)\ell + \psi(x)\ell - \ell \right| \\ &= |\psi(x)| \left| \frac{f'(t)}{g'(t)} - \ell \right| + |\psi(x) - 1| |\ell| < (2 + |\ell|)\varepsilon. \end{aligned}$$

Concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Sia ora  $\ell = +\infty$ ; per ogni  $A > 0$ , esiste  $\delta_1 > 0$  tale che  $x_0 + \delta_1 \in I^+(x_0)$  e per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$  si ha  $\frac{f'(x)}{g'(x)} > A$ . Si procede come fatto sopra e, grazie al Teorema C.4.2, si osserva che  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \psi(x) = 1$  implica l'esistenza di  $\delta_2 > 0$ , con  $\delta_2 < \delta_1$ , tale che, per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ , si ha  $\psi(x) \geq \frac{1}{2}$ . Dunque, per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$ ,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \psi(x) \frac{f'(t)}{g'(t)} \geq \frac{1}{2}A.$$

Ne segue che la tesi è verificata. Si procede alla stessa maniera per  $\ell = -\infty$ .

Il teorema si dimostra in modo analogo nel caso  $c = x_0^-$ ; il caso  $c = x_0$  si ottiene combinando i due limiti unilateri.

d) Casi  $L = \pm\infty$ ,  $c = \pm\infty$ .

Come nel punto b), la sostituzione  $z = \frac{1}{x}$  ci riconduce al caso precedente.  $\square$