
Funzioni continue
Pag. 114 ← Dimostrazione del Corollario 4.25

Corollario 4.25 *Sia f continua in un intervallo I . Supponiamo che f ammetta, per x tendente a ciascuno degli estremi dell'intervallo, limiti (finiti o infiniti) diversi da 0 e di segno opposto. Allora f ha uno zero in I ; tale zero è unico se f è strettamente monotona in I .*

Dimostrazione. Indichiamo con α e β (finiti o infiniti) gli estremi dell'intervallo I . Poniamo

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \ell_\alpha \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \ell_\beta.$$

Notiamo che tali notazioni, qualora uno o entrambi gli estremi dell'intervallo siano infiniti, indicano gli usuali limiti all'infinito.

Per fissare le idee, supponiamo che sia $\ell_\alpha < 0 < \ell_\beta$; in caso contrario, si scambiano i ruoli di ℓ_α e ℓ_β . Per il Teorema 4.2 (di permanenza del segno) esiste un intorno destro $I^+(\alpha)$ di α e un intorno sinistro $I^-(\beta)$ di β tali che

$$\forall x \in I^+(\alpha), f(x) < 0 \quad \text{e} \quad \forall x \in I^-(\beta), f(x) > 0.$$

Fissiamo un punto $a \in I^+(\alpha)$ e un punto $b \in I^-(\beta)$ con $\alpha < a$ e $b < \beta$. L'intervallo $[a, b]$ è contenuto in I , dunque f è ivi continua; inoltre, per costruzione $f(a) < 0 < f(b)$. Pertanto, l'esistenza di uno zero di f è garantita dal Teorema 4.23 (di esistenza degli zeri) applicato nell'intervallo $[a, b]$.

Se f è strettamente monotona, l'unicità dello zero segue dalla Proposizione 2.8 applicata nell'intervallo I . □

Pag. 117 ← Dimostrazione del Teorema di Weierstrass

Teorema 4.31 (di Weierstrass) *Sia f una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f è limitata su $[a, b]$ e ivi assume valori minimo e massimo*

$$m = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad e \quad M = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Dunque,

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Dimostrazione. Dimostriamo dapprima che f ammette massimo in $[a, b]$, ossia che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq f(\xi)$, $\forall x \in [a, b]$. Poniamo

$$M = \sup f([a, b]).$$

Notiamo che M può essere un numero reale oppure $+\infty$. Nel primo caso, dalla caratterizzazione dell'estremo superiore (condizione ii) in (1.7) si ha che, per ogni $n \geq 1$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M.$$

Facendo tendere n a $+\infty$, dal secondo teorema del confronto (Teorema 5. di pag. 142) si deduce che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M.$$

Nel secondo caso, dalla definizione di insieme superiormente illimitato deduciamo, per ogni $n \geq 1$, l'esistenza di un $x_n \in [a, b]$ tale che

$$f(x_n) \geq n$$

e dunque ancora, per il teorema del confronto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty = M.$$

In ogni caso, la successione $\{x_n\}_{n \geq 1}$ così ottenuta è limitata (perché contenuta in $[a, b]$). Dunque, possiamo applicare il Teorema C.5.3 di Bolzano-Weierstrass ed estrarre da essa una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}_{k \geq 0}$. Sia ξ il suo limite; siccome tutti gli x_{n_k} sono in $[a, b]$ sarà necessariamente anche $\xi \in [a, b]$. Si noti che $\{f(x_{n_k})\}_{k \geq 0}$ è una sottosuccessione di $\{f(x_n)\}_{n \geq 0}$, e dunque per la Proposizione C.5.2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Ora, usando la continuità di f in ξ si ha che

$$f(\xi) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Dunque scopriamo innanzitutto che non può essere $M = +\infty$. Inoltre, M sta nell'immagine di f e pertanto

$$M = \max f([a, b]).$$

Ragionando in modo del tutto analogo si prova che esiste finito

$$m = \min f([a, b]).$$

L'ultimo risultato segue allora dal Corollario 4.30. □

Pag. 118 ← Dimostrazione dei Teoremi 4.32 e 4.33

Stabiliamo dapprima il seguente risultato.

Lemma C.6.1 *Sia f continua e invertibile su un intervallo I . Presi comunque tre punti $x_1 < x_2 < x_3$ appartenenti ad I , si verifica una e una sola delle seguenti alternative:*

$$(i) \quad o \quad f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$$

$$(ii) \quad oppure \quad f(x_1) > f(x_2) > f(x_3).$$

Dimostrazione. Poiché f è invertibile e dunque iniettiva su I , i valori $f(x_1)$ e $f(x_3)$ saranno diversi tra loro. Potrà essere $f(x_1) < f(x_3)$ oppure $f(x_1) > f(x_3)$. Facciamo vedere che nel primo caso vale l'alternativa (i), mentre nel secondo caso vale la (ii).

Per fissare le idee, supponiamo che sia $f(x_1) < f(x_3)$. Ragioniamo per assurdo, negando la (i): il valore $f(x_2)$ non sia strettamente compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$. Ad esempio, sia

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$$

(un analogo ragionamento si farà nel caso in cui $f(x_2) < f(x_1) < f(x_3)$). Poiché f è continua sull'intervallo chiuso $[x_1, x_2] \subseteq I$, per il Teorema 4.29 dei valori intermedi assumerà in tale intervallo tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$. In particolare, esisterà un punto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(\bar{x}) = f(x_3)$$

Ciò contraddice l'ipotesi di iniettività di f , in quanto \bar{x} e x_3 sono punti distinti (separati da x_2) di I . □

Teorema 4.32 *Sia f una funzione continua su un intervallo I . Allora f è iniettiva su I se e solo se f è strettamente monotona su I .*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 2.8, dobbiamo dimostrare soltanto l'implicazione

$$f \text{ invertibile su } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ strettamente monotona su } I.$$

Fissiamo arbitrariamente due punti $x_1 < x_2$ in I e facciamo vedere che se $f(x_1) < f(x_2)$ allora f risulterà monotona strettamente crescente su I (con analogo ragionamento si potrà vedere che se invece $f(x_1) > f(x_2)$, allora f risulterà monotona strettamente decrescente su I).

Siano $z_1 < z_2$ due punti qualunque in I . Consideriamo la situazione in cui entrambi i punti siano contenuti nell'intervallo (x_1, x_2) ; gli altri casi, in cui uno o entrambi i punti siano fuori dell'intervallo (x_1, x_2) si possono trattare in modo del tutto simile. Sia dunque

$$x_1 < z_1 < z_2 < x_2.$$

Applicando una prima volta il Lemma C.6.1 alla terna x_1, z_1 e x_2 , e ricordando che abbiamo supposto $f(x_1) < f(x_2)$, deduciamo che

$$f(x_1) < f(z_1) < f(x_2).$$

Applicando una seconda volta il Lemma C.6.1 alla terna z_1, z_2 e x_2 , deduciamo infine che

$$f(z_1) < f(z_2) < f(x_2).$$

La prima di tali disuguaglianze ci dice appunto che f è strettamente crescente. Il Teorema 4.32 è dunque dimostrato. \square

Teorema 4.33 *Sia f una funzione continua e invertibile su un intervallo I . Allora la funzione inversa f^{-1} è continua sull'intervallo $J = f(I)$.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che J è effettivamente un intervallo per il Corollario 4.30. Applicando invece il Teorema 4.32, deduciamo che f è strettamente monotona su I , ad esempio - per fissare le idee - strettamente crescente (si procederebbe in modo analogo se f fosse strettamente decrescente). Da ciò segue facilmente, in base alla definizione di monotonia, che anche f^{-1} è strettamente crescente su J . Ora, sappiamo che una funzione monotona può avere al più discontinuità di prima specie (Corollario 3.28). Facciamo vedere che f^{-1} non può avere neppure discontinuità di questo tipo. Per assurdo, supponiamo che esista $y_0 = f(x_0) \in J = f(I)$ punto di salto per f^{-1} , cioè, posto

$$z_0^- = \sup_{y < y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y \rightarrow y_0^-} f^{-1}(y)$$

e

$$z_0^+ = \inf_{y > y_0} f^{-1}(y) = \lim_{y \rightarrow y_0^+} f^{-1}(y),$$

supponiamo che si abbia $z_0^- < z_0^+$. Allora, nell'intervallo (z_0^-, z_0^+) cade al più l'elemento $x_0 = f^{-1}(y_0)$ dell'immagine $f^{-1}(J)$. Dunque, $f^{-1}(J)$ non è un intervallo. Ma, d'altra parte, per definizione di J , si ha che $f^{-1}(J) = I$, che è per ipotesi un intervallo. Siamo arrivati a una contraddizione, e dunque f^{-1} deve essere continua in ogni punto di J . \square

C.6.1 Continuità uniforme

Sia f una funzione definita su un intervallo I della retta reale. Ricordiamo che f dicesi continua su I se f è continua in ogni punto $x_0 \in I$, ossia se per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale

$$\forall x \in I, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

In generale $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, cioè δ dipende da anche x_0 . Quando, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare un $\delta = \delta(\varepsilon)$ indipendente da $x_0 \in I$, diciamo che f è uniformemente continua su I . Precisamente, diamo la seguente definizione.

Definizione C.6.2 Una funzione f dicesi **uniformemente continua** su I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x', x'' \in I, \quad |x' - x''| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (\text{C.6.1})$$

Esempi C.6.3

i) Sia $f(x) = x^2$ su $I = [0, 1]$. Si ha

$$|f(x') - f(x'')| = |(x')^2 - (x'')^2| = |x' + x''| |x' - x''| \leq 2|x' - x''|.$$

Dunque se $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{2}$ si ha $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. In altre parole, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ soddisfa la (C.6.1) su I , ossia f è uniformemente continua su I .

ii) Sia $f(x) = x^2$ su $I = [0, +\infty)$. Mostriamo con un ragionamento per assurdo che f non è uniformemente continua su I . Se lo fosse, fissato ad esempio $\varepsilon = 1$, esisterebbe $\delta > 0$ soddisfacente la (C.6.1). Scelto $x' \in I$ e posto $x'' = x' + \frac{\delta}{2}$, si ha $|x' - x''| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e dunque

$$|f(x') - f(x'')| = |x' + x''| |x' - x''| < 1,$$

cioè

$$\left(2x' + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta}{2} < 1.$$

Facendo tendere x' a $+\infty$ si ha un assurdo.

iii) Sia $f(x) = \sin x$ su $I = \mathbb{R}$. Dall'identità

$$\sin x' - \sin x'' = 2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2}$$

segue

$$|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''|, \quad \forall x', x'' \in \mathbb{R}$$

dunque, fissato $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon$ soddisfa la condizione di uniforme continuità.

iv) Sia $f(x) = \frac{1}{x}$ su $I = (0, +\infty)$. Notiamo che

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \frac{|x' - x''|}{x'x''}.$$

Facendo tendere x' e x'' a 0, non è difficile verificare che f non può essere uniformemente continua su I .

Se invece consideriamo $I_a = [a, +\infty)$ con $a > 0$ fissato, allora

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{|x' - x''|}{a^2}$$

e dunque, fissato $\varepsilon > 0$, $\delta = a^2\varepsilon$ soddisfa la condizione di uniforme continuità su I_a . \square

Vediamo ora una condizione che ci assicura l'uniforme continuità di una funzione f su un intervallo $I = [a, b]$.

Teorema C.6.4 (di Heine-Cantor) *Sia f continua sull'intervallo chiuso e limitato $I = [a, b]$. Allora f è uniformemente continua su I .*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua su I . Negando la definizione, si trova un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono $x', x'' \in I$ con $|x' - x''| < \delta$ e $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$. Scegliendo $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, si trovano due successioni di punti $\{x'_n\}_{n \geq 1}$, $\{x''_n\}_{n \geq 1}$ in I tali che

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Notiamo che la prima condizione implica che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n - x''_n) = 0,$$

mentre la seconda che $f(x'_n) - f(x''_n)$ non tende a 0 per $n \rightarrow \infty$. D'altro canto, la successione $\{x'_n\}_{n \geq 1}$ è limitata, $a \leq x'_n \leq b$ per ogni n , dunque per il Teorema C.5.3 di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{x'_{n_k}\}_{k \geq 0}$ convergente a un valore $\bar{x} \in I$, ossia

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = \bar{x}.$$

Anche la sottosuccessione $\{x''_{n_k}\}_{k \geq 0}$ converge a \bar{x} , infatti

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [x'_{n_k} + (x''_{n_k} - x'_{n_k})] = \lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} + \lim_{k \rightarrow \infty} (x''_{n_k} - x'_{n_k}) = \bar{x} + 0 = \bar{x}.$$

Ora, essendo f continua in \bar{x} , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k}\right) = f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k}\right) = f(\bar{x}).$$

Dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) = 0$$

che contraddice la condizione

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon > 0, \quad \forall k \geq 0. \quad \square$$