

Esercizi svolti

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

a) Verificare che la funzione $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $(-2, 2)$.

b) Verificare che la funzione $G(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}$ è la primitiva di $f(x)$ sull'intervallo $(-2, 2)$ che passa per $P = (1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Verificare che le funzioni

$$F(x) = \sin^2 x + 7 \quad \text{e} \quad G(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) - 11$$

sono due primitive di una stessa funzione $f(x)$ su \mathbb{R} ; trovare $f(x)$ e dire di quale costante differiscono $F(x)$ e $G(x)$.

3. Usando le tabelle degli integrali elementari, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a) $\int \sqrt{2x+5} \, dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx$

c) $\int x^3 (8+x^4)^{-\frac{5}{3}} \, dx$

d) $\int \frac{3e^x}{1+e^{2x}} \, dx$

e) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2 x}} \, dx$

f) $\int \frac{1}{x(\log x)^{2/3}} \, dx$

g) $\int x e^{x^2} \, dx$

h) $\int \tan x \, dx$

i) $\int \frac{1}{\sin 2x} \, dx$

j) $\int 7x \cos(3x^2 - 5) \, dx$

k) $\int \cos x \sqrt{\sin x} \, dx$

l) $\int \frac{x}{\cos^2(3x^2+5)} \, dx$

4. Calcolare per parti i seguenti integrali:

a) $\int x \sin x \, dx$

b) $\int 2x e^{-x} \, dx$

c) $\int \log(1+x) \, dx$

d) $\int 2x \log(x-5) \, dx$

e) $\int x \log^2(5x) \, dx$

f) $\int (x+1)^2 \cos x \, dx$

g) $\int 2x \arctan x \, dx$

h) $\int e^x \sin x \, dx$

i) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

5. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$a) \int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} dx$$

$$b) \int \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 8} dx$$

$$c) \int \frac{3x}{x^3 - 1} dx$$

$$d) \int \frac{9x + 8}{x^3 + 2x^2 + x + 2} dx$$

$$e) \int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx$$

$$f) \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx$$

6. Calcolare i seguenti integrali, usando le opportune sostituzioni:

$$a) \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx$$

$$b) \int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} dx$$

$$c) \int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx$$

$$d) \int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x} + 1)} dx$$

$$e) \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$f) \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$g) \int \sqrt{x^2-1} dx$$

$$h) \int \frac{2}{(1 + \tan x)^2} dx$$

$$i) \int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x dx$$

$$j) \int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x} dx$$

7. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$a) \int_0^1 \frac{x-1}{x^2-4} dx$$

$$b) \int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx$$

$$c) \int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2} dt$$

$$d) \int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x dx$$

8. Calcolare le seguenti aree:

a) Area delimitata dall'asse della x , per $x \in [1, 4]$, e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

b) Area della regione piana R compresa tra l'asse x e il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{6} & \text{se } 0 \leq x < \pi, \\ \sin x & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

c) Area della regione R del piano xy compresa tra la curva di equazione $y = -e^x$ e la retta passante per i punti $A = (1, -e)$ e $B = (0, -1)$.

d) Area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = (x - 1) \log(x^2 + 4)$$

e l'asse delle x , per $x \in [0, 1]$.

e) Area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

e l'asse delle x , per $x \in \left[\log \frac{1}{\sqrt{3}}, \log \sqrt{3}\right]$.

9. Sia

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x < 1, \\ 16 - x^2 & \text{se } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

a) Calcolare la media integrale μ di f sull'intervallo $[-1, 3]$.

b) Dire se esiste un punto $c \in [-1, 3]$ per cui $f(c) = \mu$.

10. Data la funzione

$$h(x) = x \log(x^2 + 1)$$

a) trovare tutte le primitive di h ;

b) trovare la primitiva di $h(x)$ che passa per $P = (1, \log 2)$.

11. Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = x \sin x + \cos^2 x$$

che si annulla per $x = \frac{\pi}{2}$.

12. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{se } x < 1, \\ \frac{1}{4 + x^2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Determinare la primitiva generalizzata di f che si annulla per $x = 0$.

13. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 5)^3}} dx$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx$

c) $\int_0^{+\infty} \left(x^3 (8 + x^4)^{-5/3} + 2xe^{-x} \right) dx$

d) $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x + 1)} dx$

e) $\int_0^{+\infty} \frac{9x + 8}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx$

14. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x - 4)} dx .$$

15. Calcolare

$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + 3})^n} dx$$

per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'integrale converge.

16. a) Determinare tutti i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(4 + 9x)^{b+1}} dx .$$

b) Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4 + 9x)} dx$.

17. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{|x^2 - 2x - 3| - x^2 - 2x - 3}{x^\alpha} dx$

b) $\int_4^5 \frac{1 - 3x}{\sqrt{x} - 2} dx$

18. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio e calcolarlo per $\alpha = 0$:

$$\int_2^3 \frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} dx .$$

19. a) Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} dx .$$

- b) Calcolare l'integrale precedente per $a = 6$.

20. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} dx .$$

21. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} dx$

b) $\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} dx$

22. Data la funzione

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} ,$$

- a) studiarne il comportamento nell'origine e determinarne la parte principale.
b) Studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx .$$

Svolgimento

1. a) Per provare che $F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ sull'intervallo $(-2, 2)$ è sufficiente verificare che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in (-2, 2)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{2} \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} + 2 \frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{2\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2+4}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} = f(x). \end{aligned}$$

- b) Sicuramente $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$, in quanto differisce da $F(x)$ solo per la costante $-\frac{\pi}{3}$. Verifichiamo che $G(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$G(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} + 2 \arcsin \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Le funzioni $F(x)$ e $G(x)$ sono entrambe derivabili su \mathbb{R} ; esse sono entrambe primitive di una stessa funzione $f(x)$ se si ha $F'(x) = G'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Calcoliamo le derivate:

$$F'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin(2x) \quad G'(x) = -\frac{1}{2}(-2) \sin(2x) = \sin(2x).$$

Dunque $F'(x) = G'(x) = f(x) = \sin(2x)$.

Essendo due primitive della stessa funzione sullo stesso intervallo, la loro differenza deve essere costante; risulta

$$\begin{aligned} F(x) - G(x) &= \sin^2 x + 7 + \frac{1}{2} \cos(2x) + 11 \\ &= \sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 x) + 18 = 18 + \frac{1}{2} = \frac{37}{2}. \end{aligned}$$

3. Si ha

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sqrt{2x+5} \, dx &= \frac{1}{2} \int 2(2x+5)^{1/2} \, dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+5)^{3/2}}{3/2} + c \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(2x+5)^3} + c \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot (x^2+5)^{-3/2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 5)^{-1/2}}{-1/2} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}} + c$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x^3(8 + x^4)^{-5/3} dx &= \frac{1}{4} \int 4x^3(8 + x^4)^{-5/3} dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{(8 + x^4)^{-2/3}}{-2/3} + c = -\frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{(8 + x^4)^2}} + c \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int \frac{3e^x}{1 + e^{2x}} dx = 3 \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} dx = 3 \arctan(e^x) + c$$

$$\text{e) } \int \frac{1}{x\sqrt{1 - \log^2 x}} dx = \int \frac{1/x}{\sqrt{1 - (\log x)^2}} dx = \arcsin(\log x) + c$$

$$\text{f) } \int \frac{1}{x(\log x)^{2/3}} dx = \int \frac{1}{x} (\log x)^{-2/3} dx = \frac{(\log x)^{1/3}}{1/3} + c = 3\sqrt[3]{\log x} + c$$

$$\text{g) } \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$\text{h) } \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + c$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \int \frac{1}{\sin 2x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin x \cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\tan x} dx = \frac{1}{2} \log |\tan x| + c \end{aligned}$$

$$\text{j) } \int 7x \cos(3x^2 - 5) dx = \frac{7}{6} \int 6x \cos(3x^2 - 5) dx = \frac{7}{6} \sin(3x^2 - 5) + c$$

$$\begin{aligned} \text{k) } \int \cos x \sqrt{\sin x} dx &= \int \cos x (\sin x)^{1/2} dx = \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + c \end{aligned}$$

$$\text{ℓ) } \int \frac{x}{\cos^2(3x^2 + 5)} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x}{\cos^2(3x^2 + 5)} dx = \frac{1}{6} \tan(3x^2 + 5) + c$$

4. Ricordiamo la regola di integrazione per parti:

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx .$$

a) Scegliamo

$$\begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + c.$$

b) Scegliamo

$$\begin{cases} f'(x) = e^{-x} \\ g(x) = x \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = 1 \end{cases}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} 2 \int x e^{-x} \, dx &= 2 \left(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) \, dx \right) \\ &= 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) + c = -2e^{-x}(x + 1) + c. \end{aligned}$$

c) In questo caso conviene vedere la funzione integranda $\log(1+x)$ come prodotto della funzione costante 1 per la funzione $\log(1+x)$ e scegliere

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \log(1+x) \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

Pertanto

$$\int \log(1+x) \, dx = x \log(1+x) - \int \frac{x}{1+x} \, dx.$$

Per calcolare l'ultimo integrale, conviene prima eseguire un "trucco algebrico", e poi sfruttare la linearità dell'integrale; nel prossimo esercizio vedremo un procedimento più completo che tratta l'integrazione delle funzioni razionali. Per ora, scriviamo:

$$\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x};$$

dunque

$$\int \frac{x}{1+x} \, dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x} \, dx = x - \log|1+x| + c.$$

Tornando all'integrale di partenza, si ha:

$$\int \log(1+x) \, dx = x \log(1+x) - x + \log(1+x) + c.$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che la funzione integranda è definita solo per $x > -1$.

d) Risulta

$$\int 2x \log(x-5) \, dx = x^2 \log(x-5) - \int \frac{x^2}{x-5} \, dx$$

Anche in questo caso, manipoliamo l'ultima funzione razionale, effettuando la divisione tra il monomio x^2 e il polinomio $x-5$; si ha

$$\frac{x^2}{x-5} = x + 5 + \frac{25}{x-5}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int 2x \log(x-5) \, dx &= x^2 \log(x-5) - \int \left(x + 5 + \frac{25}{x-5} \right) \, dx \\ &= x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log|x-5| + c \end{aligned}$$

La funzione integranda è definita solo per $x > 5$; pertanto si avrà $|x-5| = x-5$.
Dunque

$$\int 2x \log(x-5) \, dx = x^2 \log(x-5) - \frac{x^2}{2} - 5x - 25 \log(x-5) + c.$$

e) Risulta

$$\begin{aligned} \int x \log^2(5x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int \frac{x^2}{2} 2 \log(5x) \frac{5}{5x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \int x \log(5x) \, dx. \end{aligned}$$

Riapplicando nuovamente la formula di integrazione per parti all'ultimo integrale, ricaviamo

$$\begin{aligned} \int x \log^2(5x) \, dx &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \left(\frac{x^2}{2} \log(5x) - \frac{1}{2} \int x \, dx \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \log^2(5x) - \frac{x^2}{2} \log(5x) + \frac{x^2}{4} + c. \end{aligned}$$

f) Si ha

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 \cos x \, dx &= (x+1)^2 \sin x - \int 2(x+1) \sin x \, dx \\ &= (x+1)^2 \sin x + 2 \left[(x+1) \cos x - \int \cos x \, dx \right] \\ &= (x+1)^2 \sin x + 2(x+1) \cos x - 2 \sin x + c. \end{aligned}$$

g) Si ha

$$\begin{aligned}
 \int 2x \arctan x \, dx &= x^2 \arctan x - \int x^2 \frac{1}{x^2+1} \, dx \\
 &= x^2 \arctan x - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx \\
 &= x^2 \arctan x - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx \\
 &= x^2 \arctan x - x + \arctan x + c
 \end{aligned}$$

h) Si ha

$$\begin{aligned}
 \int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\
 &= e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx \right).
 \end{aligned}$$

Dunque

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

da cui

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c.$$

i) Risulta

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2+1-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
 &= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.
 \end{aligned}$$

Dunque

$$2 \int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$$

da cui

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c.$$

Lo stesso integrale può essere risolto per sostituzione (si veda l'Esercizio 6).

5. a) Procediamo dapprima con la divisione del polinomio a numeratore per il polinomio a denominatore e troviamo

$$\frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} = 2x + 7 + \frac{42}{x - 5}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3x + 7}{x - 5} dx &= \int \left(2x + 7 + \frac{42}{x - 5} \right) dx \\ &= \int (2x + 7) dx + \int \frac{42}{x - 5} dx \\ &= x^2 + 7x + 42 \log |x - 5| + c. \end{aligned}$$

- b) Poiché $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{3x - 4}{(x - 4)(x - 2)} &= \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 4)}{(x - 4)(x - 2)} \\ &= \frac{(A + B)x - 2A - 4B}{(x - 4)(x - 2)}. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a numeratore, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - 4B = -4 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A = 4 \\ B = -1 \end{cases}.$$

In alternativa, per calcolare A e B , dall'uguaglianza $3x - 4 = A(x - 2) + B(x - 4)$, ponendo dapprima $x = 2$ si ricava $B = -1$ e ponendo $x = 4$, si ottiene $A = 4$. In ogni caso, si ha

$$\frac{3x - 4}{(x - 4)(x - 2)} = \frac{4}{x - 4} - \frac{1}{x - 2},$$

dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 4}{x^2 - 6x + 8} dx &= \int \left[\frac{4}{x - 4} - \frac{1}{x - 2} \right] dx \\ &= 4 \log |x - 4| - \log |x - 2| + c. \end{aligned}$$

- c) Ricordando che $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ e usando il metodo di decomposizione in fratti semplici, possiamo scomporre la frazione da integrare come

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^3 - 1} &= \frac{3x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (A - B + C)x + A - C}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

Uguagliando i numeratori della frazione iniziale e finale, si trova il sistema:

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ A - B + C &= 3 \\ A - C &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A &= 1 \\ B &= -1 \\ C &= 1 \end{cases} .$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{1}{x - 1} dx - \int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log|x - 1| - \frac{1}{2} \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx \\ &= \log|x - 1| - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx . \end{aligned}$$

Per risolvere l'ultimo integrale, usiamo il metodo di "completamento dei quadrati", allo scopo di ottenere il denominatore nella forma $k[1 + (ax + b)^2]$ (dove k, a, b sono costanti opportune da trovare):

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left[1 + \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right)^2\right] .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\frac{3}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]} dx \\ &= 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx = \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c . \end{aligned}$$

Riassumendo

$$\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx = \log|x - 1| - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + c .$$

d) Il polinomio $x^3 + 2x^2 + x + 2$ ammette la radice $x = -2$; dunque è divisibile per $x + 2$. Effettuando i calcoli si trova $x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x + 2)(x^2 + 1)$.

Dunque

$$\int \frac{9x + 8}{x^3 + 2x^2 + x + 2} dx = \int \frac{9x + 8}{(x + 2)(x^2 + 1)} dx .$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\begin{aligned} \frac{9x + 8}{(x + 2)(x^2 + 1)} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)}{(x + 2)(x^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (2B + C)x + A + 2C}{(x + 2)(x^2 + 1)} . \end{aligned}$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2B + C = 9 \\ A + 2C = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} A = -2 \\ B = 2 \\ C = 5 \end{cases} .$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{9x + 8}{x^3 + 2x^2 + x + 2} dx &= \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int \frac{-2}{x+2} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{5}{x^2+1} dx \\ &= -2 \log|x+2| + \log(x^2+1) + 5 \arctan x + c \\ &= \log \frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5 \arctan x + c. \end{aligned}$$

e) Poiché il grado del polinomio al numeratore è superiore a quello del denominatore, occorre preliminarmente procedere alla divisione dei due polinomi. Si ottiene

$$\frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} = x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} dx &= \int (x^3 - 3x^2 + x - 3) dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2 - 1| + c. \end{aligned}$$

f) Effettuando la necessaria divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore, si ottiene

$$\frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} = x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx &= \int \left(x - \frac{x^3 + x - 1}{x^4 + x^2} \right) dx \\ &= \int x dx - \int \frac{x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx . \end{aligned}$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{x^3 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 0 \\ D = 1 \end{cases} .$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x + 1}{x^4 + x^2} dx &= \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + c. \end{aligned}$$

6. a) L'integrale può essere trasformato nell'integrale di una funzione razionale effettuando la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx &= \int \frac{t}{t^2 - 3t + 2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t^2 - 3t + 2} dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t-2)} dt . \end{aligned}$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale il cui denominatore è decomposto in fattori irriducibili. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t-2)}{(t-1)(t-2)} .$$

Ponendo dapprima $t = 2$ e successivamente $t = 1$, nell'uguaglianza

$$1 = A(t-1) + B(t-2),$$

si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2} dx &= \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt \\ &= \log|t-2| - \log|t-1| + c \\ &= \log|e^x - 2| - \log|e^x - 1| + c. \end{aligned}$$

b) Risulta

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} dx = \int \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x} + 2} dx .$$

Effettuando, come sopra, la sostituzione $e^x = t$, da cui $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} dx &= \int \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t} + 2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1 + 2t} \frac{1}{t} dt \\ &= \int \frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)^2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t-1}{t(t+1)} dt. \end{aligned}$$

Con il metodo di decomposizione in fratti semplici si ottiene:

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)}.$$

Ponendo $t = 0$ e $t = -1$ nell'uguaglianza $t-1 = A(t+1) + Bt$, si ottiene $A = -1$ e $B = 2$. Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} dx &= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1} \right) dt = -\log |t| + 2 \log |t+1| + c \\ &= -\log |e^x| + 2 \log |e^x + 1| + c = \log (e^x + 1)^2 - x + c. \end{aligned}$$

c) L'integrale può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale operando la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$, da cui $x = 1 + t^2$ e $dx = 2t dt$. Pertanto

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx = \int \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 4} \cdot 2t dt = 2 \int \frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - 4} dt.$$

Eseguito la divisione tra polinomi si ottiene

$$\frac{t^3 + t^2 + t}{t^2 - 4} = t + 1 + \frac{5t + 4}{t^2 - 4}.$$

Dunque:

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx = 2 \int \left(t + 1 + \frac{5t + 4}{(t-2)(t+2)} \right) dt.$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{5t + 4}{(t-2)(t+2)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t-2)}{t^2 - 4}.$$

Ponendo $t = 2$ e $t = -2$ nell'uguaglianza $5t + 4 = A(t+2) + B(t-2)$, si ottiene $A = \frac{7}{2}$ e $B = \frac{3}{2}$. Dunque :

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx &= 2 \int (t+1) dt + 2 \int \left(\frac{7}{2} \frac{1}{t-2} + \frac{3}{2} \frac{1}{t+2} \right) dt \\ &= t^2 + 2t + 7 \log |t-2| + 3 \log |t+2| + c \\ &= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 7 \log |\sqrt{x-1} - 2| + \\ &\quad + 3 \log |\sqrt{x-1} + 2| + c. \end{aligned}$$

d) Per risolvere l'integrale, allo scopo di "eliminare i radicali" si può effettuare la sostituzione $2x = t^6$, da cui $dx = 3t^5 dt$; in tal modo si ha $\sqrt{2x} = t^3$ e $\sqrt[3]{2x} = t^2$. Dunque:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x}(\sqrt[3]{2x} + 1)} dx &= \int \frac{3t^5}{t^3(t^2 + 1)} dt = 3 \int \frac{t^2}{t^2 + 1} dt \\ &= 3 \int \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) dt = 3t - 3 \arctan t + c \\ &= 3\sqrt[6]{2x} - 3 \arctan \sqrt[6]{2x} + c \end{aligned}$$

e) L'integrale è già stato risolto precedentemente per parti; si può anche effettuare la sostituzione $x = \sin t$, da cui $dx = \cos t dt$. La funzione $x = \sin t$ non è iniettiva; pertanto, per poter effettuare la sostituzione inversa, dobbiamo restringerci a un opportuno intervallo di integrazione; conviene scegliere l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, in cui oltre a invertire la funzione $x = \sin t$, trovando $t = \arcsin x$, è anche possibile ricavare $\sqrt{1 - x^2} = \cos t$. Dunque

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) + c = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + c. \end{aligned}$$

f) Conviene effettuare la sostituzione $x = \sinh t$, da cui si ricava $dx = \cosh t dt$; si ha inoltre $\sqrt{1 + x^2} = \cosh t$, tenendo conto che i due membri dell'ultima uguaglianza sono funzioni sempre positive. Dunque

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + x^2} dx &= \int \cosh^2 t dt = \int \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} dt \\ &= \int \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} + 2t \right) + c \\ &= \frac{1}{4} \sinh(2t) + \frac{1}{2} t + c = \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} t + c \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{settsinh} x + c. \end{aligned}$$

g) Conviene effettuare la sostituzione $x = \cosh t$, da cui si ricava $dx = \sinh t dt$. Ponendoci su un opportuno intervallo di integrazione, possiamo invertire la funzione $x = \cosh t$; conviene scegliere l'intervallo $[0, +\infty)$, in cui si trova $t = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Inoltre è anche possibile ricavare $\sqrt{x^2 - 1} = \sinh t$. Dunque

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \sinh^2 t dt = \int (\cosh^2 t - 1) dt = \int \cosh^2 t dt - t.$$

Sfruttando il risultato appena trovato sopra

$$\int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} t + c$$

si ha

$$\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c.$$

h) Allo scopo di trasformare l'integrale in quello di una funzione razionale, possiamo usare la sostituzione $\tan x = t$, da cui $x = \arctan t$ e $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$. Quindi

$$\int \frac{2}{(1 + \tan x)^2} \, dx = \int \frac{2}{(1 + t)^2} \frac{1}{1 + t^2} \, dt.$$

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2}{(1 + t)^2(1 + t^2)} = \frac{A}{1 + t} + \frac{B}{(1 + t)^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2}.$$

Procedendo come sopra, si ottiene

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1, \quad D = 0.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(1 + \tan x)^2} \, dx &= \int \frac{1}{1 + t} \, dt + \int \frac{1}{(1 + t)^2} \, dt - \int \frac{t}{1 + t^2} \, dt \\ &= \log|1 + t| - \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{2} \log(1 + t^2) + c \\ &= \log|1 + \tan x| - \frac{1}{1 + \tan x} - \frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 x) + c. \end{aligned}$$

i) Utilizziamo la sostituzione $\cos x = t$, da cui $\sin x \, dx = dt$. Pertanto

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \, dx = \int \frac{t - 3}{1 - t^2 - t^3 + 1} \, dt = \int \frac{3 - t}{t^3 + t^2 - 2} \, dt.$$

Il polinomio a denominatore ammette la radice $t = 1$ e si fattorizza in $t^3 + t^2 - 2 = (t - 1)(t^2 + 2t + 2)$. Ricorrendo alla decomposizione in fratti semplici, si trova

$$\frac{3 - t}{(t - 1)(t^2 + 2t + 2)} = \frac{\frac{2}{5}}{t - 1} + \frac{-\frac{2}{5}t - \frac{11}{5}}{t^2 + 2t + 2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{3 - t}{t^3 + t^2 - 2} \, dt &= \frac{1}{5} \int \left(\frac{2}{t - 1} - \frac{2t + 11}{t^2 + 2t + 2} \right) \, dt \\ &= \frac{1}{5} \left(2 \log|t - 1| - \int \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 2} \, dt - \int \frac{9}{1 + (t + 1)^2} \, dt \right) \\ &= \frac{2}{5} \log|t - 1| - \frac{1}{5} \log(t^2 + 2t + 2) - \frac{9}{5} \arctan(t + 1) + c. \end{aligned}$$

Infine

$$\int \frac{\cos x - 3}{\sin^2 x - \cos^3 x + 1} \sin x \, dx = \frac{2}{5} \log |\cos x - 1| +$$

$$-\frac{1}{5} \log(\cos^2 x + 2 \cos x + 2) - \frac{9}{5} \arctan(\cos x + 1) + c.$$

j) L'integrale può essere ricondotto ad un integrale di funzione razionale mediante le formule di razionalizzazione delle funzioni trigonometriche, cioè operando la sostituzione $\tan \frac{x}{2} = t$, da cui $x = 2 \arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$; si ha inoltre $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Pertanto

$$\int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x} \, dx = \int \frac{1}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \, dt$$

$$= \int \frac{2}{8t + 3 - 3t^2} \, dt = -2 \int \frac{1}{(3t+1)(t-3)} \, dt.$$

Decomponendo l'ultima frazione in fratti semplici, si ha:

$$\frac{1}{(3t+1)(t-3)} = \frac{A}{3t+1} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3) + B(3t+1)}{(3t+1)(t-3)}.$$

Ponendo $t = 3$ e $t = -\frac{1}{3}$ nell'uguaglianza $1 = A(t-3) + B(3t+1)$, si ottiene $A = -\frac{3}{10}$ e $B = \frac{1}{10}$. Dunque

$$\int \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x} \, dx = -2 \int \left(-\frac{3}{10} \frac{1}{3t+1} + \frac{1}{10} \frac{1}{t-3} \right) \, dt$$

$$= \frac{1}{5} \log |3t+1| - \frac{1}{5} \log |t-3| + c$$

$$= \frac{1}{5} \log \left| \frac{3 \tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 3} \right| + c.$$

7. a) Per calcolare un integrale definito occorre dapprima calcolare una primitiva della funzione integranda. Cerchiamo dunque una primitiva della funzione razionale $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$. Usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici, ottenendo:

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-2)}{(x+2)(x-2)}.$$

Ponendo $x = 2$ e $x = -2$ nell'uguaglianza $x - 1 = A(x + 2) + B(x - 2)$, si ottiene $a = \frac{1}{4}$ e $B = \frac{3}{4}$. Dunque

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1/4}{x-2} + \frac{3/4}{x+2} \right) dx &= \left[\frac{1}{4} \log|x-2| + \frac{3}{4} \log|x+2| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \log 1 + \frac{3}{4} \log 3 - \frac{1}{4} \log 2 - \frac{3}{4} \log 2 \\ &= \frac{3}{4} \log 3 - \log 2. \end{aligned}$$

b) Utilizziamo dapprima la sostituzione $2x + 1 = u$ e dunque $dx = \frac{1}{2} du$, e in seguito applichiamo la formula di integrazione per parti; otteniamo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\log u}{u^2} du = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \log u - \int \frac{-1}{u^2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{u} \log u - \frac{1}{u} \right) + c. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx = -\frac{1}{2(2x+1)} [1 + \log(2x+1)] + c.$$

Dunque l'integrale cercato vale:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1 + \log(2x+1)}{2x+1} \right]_0^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 + \log 5}{5} - 1 \right) = \frac{4 - \log 5}{10}. \end{aligned}$$

c) Utilizziamo la sostituzione: $\sqrt{t} = y$, e dunque $t = y^2$ da cui $dt = 2y dy$. Allora:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{t}-3}{2-3\sqrt{t}+t} dt &= \int \frac{y-3}{2-3y+y^2} 2y dy = 2 \int \frac{y^2-3y}{y^2-3y+2} dy \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{2}{y^2-3y+2} \right) dy \\ &= 2 \int dy - 4 \int \frac{1}{(y-1)(y-2)} dy. \end{aligned}$$

Usiamo il metodo di decomposizione delle funzioni razionali in fratti semplici:

$$\frac{1}{(y-1)(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2} = \frac{A(y-2) + B(y-1)}{(y-1)(y-2)}$$

che porta a $A = -1$ e $B = 1$. Dunque:

$$\begin{aligned} 2 \int dy - 4 \int \frac{1}{(y-1)(y-2)} dy &= 2y - 4 \int \left(\frac{-1}{y-1} + \frac{1}{y-2} \right) dy \\ &= 2y + 4 \log |y-1| - 4 \log |y-2| + c. \end{aligned}$$

Applicando ora la sostituzione inversa, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2} dt &= 2\sqrt{t} + 4 \log |\sqrt{t}-1| - 4 \log |\sqrt{t}-2| + c \\ &= 2\sqrt{t} + 4 \log \left| \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}-2} \right| + c. \end{aligned}$$

Si può infine ricavare il valore dell'integrale definito

$$\begin{aligned} \int_9^{16} \frac{\sqrt{t}-3}{t-3\sqrt{t}+2} dt &= 2\sqrt{16} + 4 \log \left| \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-2} \right| - 2\sqrt{9} - 4 \log \left| \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}-2} \right| \\ &= 2 + 4 \log 3 - 8 \log 2. \end{aligned}$$

d) Dividiamo l'intervallo di integrazione $[0, \sqrt{3}]$ nei due sottointervalli $[0, 1]$ e $[1, \sqrt{3}]$, in quanto la funzione $|x-1|$ assume in essi due espressioni diverse; si ha dunque

$$\int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x dx = \int_0^1 4(1-x) \arctan x dx + \int_1^{\sqrt{3}} 4(x-1) \arctan x dx.$$

Possiamo ora utilizzare la formula di integrazione per parti per calcolare l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int (x-1) \arctan x dx &= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \arctan x - \int \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Poiché il polinomio a denominatore nell'ultimo integrale non ha grado superiore a quello a numeratore, procediamo con la divisione del numeratore per il denominatore:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} dx &= \int \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= x - \log(x^2+1) - \arctan x + c. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\int (x-1) \arctan x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \arctan x - \frac{1}{2} (x - \log(1+x^2) - \arctan x) + c.$$

Calcolando ora l'integrale definito, si ricava:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} 4|x-1| \arctan x \, dx &= -4 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \arctan x + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (x - \log(1+x^2) - \arctan x) \right]_0^1 + \\ &\quad + 4 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \arctan x - \frac{1}{2} (x - \log(1+x^2) - \arctan x) \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + 4(2 - \sqrt{3}) \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

8. a) Per $x \in [1, 4]$, $f(x)$ è senz'altro positiva (perché somma di quantità positive).
Dunque l'area A richiesta risulta essere:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 f(x) \, dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_1^4 \left(x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} + x^{-2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \log|x| + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^4 = \left[2\sqrt{x} + \log|x| - \frac{1}{x} \right]_1^4 \\ &= 4 + \log 4 - \frac{1}{4} - 2 - \log 1 + 1 = \frac{11}{4} + \log 4. \end{aligned}$$

- b) Tenendo conto che nell'intervallo $(0, \pi)$ la funzione $f(x)$ è positiva, mentre, tra π e 2π , $f(x)$ è negativa, l'area A della regione R è data da:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} \frac{x^2 + x}{6} \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = \frac{1}{6} \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^2}{2} \right] + [1 + 1] = \frac{\pi^3}{18} + \frac{\pi^2}{12} + 2. \end{aligned}$$

- c) Si osservi che i punti A e B appartengono alla curva di equazione $y = -e^x$.
Dunque sono i punti di intersezione tra la curva e la retta passante per A e B. La retta r passante per i punti A = $(1, -e)$ e B = $(0, -1)$ ha equazione $y = (1 - e)x - 1$. Notiamo inoltre che la funzione $f(x)$ è sempre negativa, e dunque la regione R è situata al di sotto dell'asse delle x ; osserviamo infine che la corda AB sta al di sotto del grafico della funzione $f(x)$.

Pertanto l'area A richiesta sarà data da:

$$\begin{aligned} A &= - \left(\int_0^1 [(1-e)x - 1] \, dx - \int_0^1 (-e^x) \, dx \right) \\ &= - \int_0^1 [(1-e)x - 1 + e^x] \, dx = - \left[\frac{1-e}{2} \cdot x^2 - x + e^x \right]_0^1 = \frac{3-e}{2}. \end{aligned}$$

d) Studiamo il segno di f in $(0, 1)$:

- i) il fattore $(x - 1)$ è negativo
- ii) il fattore $\log(x^2 + 4)$ è positivo, perché $x^2 + 4 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dunque nell'intervallo $(0, 1)$ la funzione $f(x)$ è negativa. Pertanto l'area richiesta è data da:

$$A = - \int_0^1 f(x) \, dx = - \int_0^1 (x - 1) \log(x^2 + 4) \, dx .$$

Risolviamo l'integrale indefinito, utilizzando il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int (x - 1) \log(x^2 + 4) \, dx &= \frac{(x - 1)^2}{2} \log(x^2 + 4) - \int \frac{(x - 1)^2}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 4} \, dx \\ &= \frac{(x - 1)^2}{2} \log(x^2 + 4) - \int \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 4} \, dx . \end{aligned}$$

Per risolvere il rimanente integrale, dividiamo il polinomio al numeratore per il denominatore, ottenendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + 4} \, dx &= \int \left[(x - 2) + \frac{-3x + 8}{x^2 + 4} \right] \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} \, dx + 8 \int \frac{1}{x^2 + 4} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{3}{2} \log(x^2 + 4) + 4 \arctan \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} A &= - \left[\frac{(x - 1)^2}{2} \log(x^2 + 4) - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{2} \log(x^2 + 4) - 4 \arctan \frac{x}{2} \right]_0^1 \\ &= - \left[-\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} \log 5 - 4 \arctan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log 4 - \frac{3}{2} \log 4 \right] \\ &= 2 \log 4 - \frac{3}{2} \log 5 + 4 \arctan \frac{1}{2} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

e) Studiamo dapprima il segno della funzione f . Poiché il denominatore è una quantità sempre positiva, è sufficiente studiare il segno del numeratore.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\iff e^x - e^{2x} > 0 \iff e^x(1 - e^x) > 0 \iff 1 - e^x > 0 \\ &\iff e^x < 1 \iff x < 0. \end{aligned}$$

Dunque: $f(x) > 0$ per $x < 0$; $f(x) < 0$ per $x > 0$.

Consideriamo ora l'intervallo $\left(\log \frac{1}{\sqrt{3}}, \log \sqrt{3}\right) = (-\log \sqrt{3}, \log \sqrt{3})$.

Per $x \in (-\log \sqrt{3}, 0)$ la funzione è positiva. Dunque l'area compresa tra il grafico di f e l'asse delle x è data da:

$$A_1 = \int_{-\log \sqrt{3}}^0 f(x) \, dx$$

Invece, per $x \in (0, \log \sqrt{3})$, la funzione è negativa, e l'area sarà data da:

$$A_2 = - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(x) \, dx$$

Pertanto l'area richiesta sarà la somma delle due aree:

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\log \sqrt{3}}^0 f(x) \, dx - \int_0^{\log \sqrt{3}} f(x) \, dx .$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int f(x) \, dx &= \int \frac{e^x - e^{2x}}{1 + e^{2x}} \, dx = \int \frac{e^x}{1 + (e^x)^2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \, dx \\ &= \arctan(e^x) - \frac{1}{2} \log(1 + e^{2x}) + c. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli integrali definiti:

$$\begin{aligned} A_1 &= \arctan(1) - \frac{1}{2} \log(1 + 1) - \arctan e^{-\log \sqrt{3}} + \frac{1}{2} \log(1 + e^{-2 \log \sqrt{3}}) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} \\ A_2 &= - \left[\arctan e^{\log \sqrt{3}} - \frac{1}{2} \log(1 + e^{2 \log \sqrt{3}}) - \arctan 1 + \frac{1}{2} \log 2 \right] \\ &= - \arctan \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(1 + 3) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2} \log 2. \end{aligned}$$

Dunque l'area richiesta è:

$$A = \frac{1}{2} \left(\log 2 + \log \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{4}{3}.$$

9. a) Per definizione di media integrale

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{3 - (-1)} \int_{-1}^3 f(x) \, dx = \frac{1}{4} \left(\int_{-1}^1 |x| \, dx + \int_1^3 (16 - x^2) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \int_0^1 x \, dx + \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_1^3 \right) = 6 + \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

b) Poiché $f(x)$ non è continua sull'intervallo $[-1, 3]$, non si può utilizzare il teorema della media integrale per affermare l'esistenza di un punto c con le caratteristiche richieste. Controlliamo pertanto direttamente se μ appartiene all'immagine di f . Si verifica facilmente che $\text{Im}(f) = [0, 1] \cup [7, 15]$. Dunque $\mu \notin \text{Im}(f)$ e non esiste nessun $c \in [-1, 3]$ tale che $f(c) = \mu$.

10. a) Le primitive di $h(x) = x \log(x^2+1)$ si trovano risolvendo l'integrale indefinito $\int h(x) \, dx$.

Per risolvere questo integrale, si può applicare la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx .$$

Nel nostro caso scegliamo $f(x) = \log(x^2 + 1)$ e $g'(x) = x$. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} \int x \log(x^2 + 1) \, dx &= \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \int \frac{x^3}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \int \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c. \end{aligned}$$

Dunque le primitive di h sono le funzioni:

$$F_c(x) = \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

b) Tra tutte le funzioni $F_c(x)$ si deve trovare quella per cui $F_c(1) = \log 2$.

$$F_c(1) = \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 2 + c = \log 2 - \frac{1}{2} + c.$$

Dunque $F_c(1) = \log 2$ se e solo se $c = \frac{1}{2}$. Pertanto la primitiva cercata è la funzione

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \log(x^2 + 1) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \frac{1}{2}.$$

11. Possiamo procedere come sopra, trovando tutte le primitive di $f(x)$ e poi quella che passa per $P = (\frac{\pi}{2}, 0)$.

In alternativa, possiamo sfruttare il teorema fondamentale del calcolo integrale; la primitiva cercata è la funzione integrale

$$F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) dt .$$

Scegliamo la seconda strada. Risolviamo prima l'integrale indefinito

$$\int f(t) dt = \int (t \sin t + \cos^2 t) dt .$$

Incominciamo con il separare l'integrale nella somma di due integrali, data la linearità dell'operazione di integrazione. Eseguiamo il primo integrale per parti, prendendo il fattore $\sin t$ come fattore differenziale:

$$\begin{aligned} \int t \sin t dt &= t(-\cos t) - \int (-\cos t) \cdot 1 dt = -t \cos t + \int \cos t dt \\ &= -t \cos t + \sin t + h. \end{aligned}$$

Per calcolare il secondo integrale possiamo usare l'identità trigonometrica $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$. Allora:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2 \cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + k. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^x (t \sin t + \cos^2 t) dt &= \left[-t \cos t + \sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{2}}^x \\ &= -x \cos x + \sin x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin \pi \\ &= -x \cos x + \sin x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x - 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

12. Data la presenza del valore assoluto, distinguiamo le due funzioni che formano la prima componente di $f(x)$, sui due intervalli $(-\infty, 0)$ e $[0, 1)$, e riscriviamo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4+x^2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Iniziamo a trovare tutte le primitive di ciascuna delle tre funzioni che compongono $f(x)$.

$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \int \sqrt{-x} \, dx = \int (-x)^{1/2} \, dx = -\frac{(-x)^{3/2}}{3/2} + c_1 \\
 &= -\frac{2}{3}\sqrt{(-x)^3} + c_1, \quad \text{se } x < 0. \\
 F_2(x) &= \int \sqrt{x} \, dx = \int (x)^{1/2} \, dx = \frac{(x)^{3/2}}{3/2} + c_1 \\
 &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_2, \quad \text{se } x \in (0, 1). \\
 F_3(x) &= \int \frac{1}{4+x^2} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{1+(x/2)^2} \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c_3, \quad \text{se } x > 1.
 \end{aligned}$$

Le primitive generalizzate devono essere funzioni continue. Dunque deve essere

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F_2(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F_3(x).$$

Pertanto

$$c_1 = c_2 \quad \text{e} \quad \frac{2}{3} + c_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + c_3$$

da cui

$$c_1 = c_2 = c \quad \text{e} \quad c_3 = c + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}.$$

Dunque tutte le primitive generalizzate di $f(x)$ sono le funzioni

$$F_c(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{-x^3} + c & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Cerchiamo tra esse quella tale che $F_c(0) = 0$, ovvero $0 = \frac{2}{3}0^{3/2} + c$. Si ricava $c = 0$. Pertanto la primitiva cercata è la funzione

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}\sqrt{-x^3} & \text{se } x < 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{x^3} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

13. a) Per definizione di integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$$

Calcoliamo l'integrale indefinito:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx &= \frac{1}{2} \cdot \int 2x \cdot (x^2+5)^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c \end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} \right]_1^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

b) Risulta

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)(\arctan x)' dx = \frac{1}{2} \arctan^2 x + c.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (\arctan^2 t - 0) = \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

c) Calcoliamo l'integrale indefinito sfruttandone la linearità e la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x} \right) dx &= \int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} dx + 2 \int xe^{-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} dx + 2 \int xe^{-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 2 \left(-x \cdot e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx \right) \\ &= -\frac{3}{8} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x} \right) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x} \right) dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{3}{8} \frac{x}{1} \sqrt[3]{(8+t^4)^2} - 2 \cdot e^{-t}(t+1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} + 2 \right] \\ &= \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32}. \end{aligned}$$

(Si ricordi che $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}(t+1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{e^t} = 0$, in quanto il denominatore ha ordine di infinito superiore al numeratore).

d) Per risolvere l'integrale indefinito, effettuiamo la sostituzione $\sqrt{2x} = t$, da cui $2x = t^2$, e infine $dx = t dt$. Dunque:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx &= \int \frac{1}{t(t^2+1)} \cdot t dt = \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \arctan t + c = \arctan \sqrt{2x} + c. \end{aligned}$$

Passiamo ora al calcolo dell'integrale improprio:

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{1/2}^b \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\arctan \sqrt{2x} \right]_{\frac{1}{2}}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\arctan \sqrt{2b} - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

e) Per calcolare l'integrale indefinito, dobbiamo risolvere un integrale di funzione razionale, il cui denominatore è già scomposto nel prodotto di fattori irriducibili.

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)}.$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = 5.$$

Pertanto:

$$\int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{-2}{x+2} dx + \int \frac{2x+5}{x^2+1} dx \\
 &= \int \frac{-2}{x+2} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{5}{x^2+1} dx \\
 &= -2 \log|x+2| + \log(x^2+1) + 5 \arctan x + c \\
 &= \log(x^2+1) - \log(x+2)^2 + 5 \arctan x + c.
 \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'integrale improprio :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} dx \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5 \arctan x \right]_0^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\log \frac{t^2+1}{(t+2)^2} + 5 \arctan t - \log \frac{1}{4} \right] \\
 &= \log 1 + 5 \frac{\pi}{2} + \log 4 = \log 4 + \frac{5\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

14. Risulta

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)} dx.$$

I due integrali impropri convergono entrambi, perché, per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} \sim \frac{-1}{4\sqrt{|x|}}.$$

Calcoliamo il primo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{-x} = t$, da cui $x = -t^2$, $dx = -2t dt$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)} dx &= \int \frac{1}{t(-t^2-4)} (-2t) dt = 2 \int \frac{1}{t^2+4} dt \\
 &= \arctan \frac{t}{2} + c = \arctan \frac{\sqrt{-x}}{2} + c
 \end{aligned}$$

Calcoliamo il secondo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{x} = t$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)} dx &= \int \frac{1}{t(t^2-4)} 2t dt = 2 \int \frac{1}{(t-2)(t+2)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + c \\
 &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right| + c
 \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \int_{-1}^a \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)} dx + \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_b^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^-} \left(\arctan \frac{\sqrt{-a}}{2} - \arctan \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\log \frac{1}{3} - \log \left| \frac{\sqrt{b}-2}{\sqrt{b}+2} \right| \right) \\ &= -\frac{1}{2} \log 3 - \arctan \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

15. Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$$

quindi l'integrale converge se $n-1 > 1$, cioè se $n > 2$. Pertanto il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'integrale converge è $n = 3$. In tal caso:

$$\int \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^3} dx = \frac{1}{2} \int 2x(x^2+3)^{-3/2} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + c.$$

Dunque:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}} dx \\ &= -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

16. a) Per $x \rightarrow 0^+$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{4^{b+1}x^a}$$

quindi l'integrale converge in un intorno destro di $x = 0$ se $a < 1$.

Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{9^{b+1}x^{a+b+1}}$$

quindi l'integrale converge se $a+b+1 > 1$, cioè se $b > -a$.

Globalmente l'integrale converge per $a < 1$ e $b > -a$.

b) Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(4+9t^2)} 2t dt = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{4+9t^2} dt \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} \arctan \frac{3t}{2} \right]_0^b = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan \frac{3b}{2} = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

17. a) Si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{|x^2 - 2x - 3| - x^2 - 2x - 3}{x^\alpha} dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}} \right) dx + \int_3^{+\infty} \left(\frac{-4x - 6}{x^\alpha} \right) dx .$$

L'integrale

$$\int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}} \right) dx$$

converge per $\alpha < 3$ mentre l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \left(\frac{-4x - 6}{x^\alpha} \right) dx$$

converge per $\alpha > 2$.

Pertanto l'integrale assegnato converge per $\alpha \in (2, 3)$.

b) Risulta

$$\int_4^5 \frac{1 - 3x}{\sqrt{x} - 2} dx = \int_4^5 \frac{(1 - 3x)(\sqrt{x} + 2)}{x - 4} dx .$$

Per $x \rightarrow 4$, si ha: $\frac{(1-3x)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \sim \frac{-44}{x-4}$. Poiché l'integrale improprio

$\int_4^5 \frac{1}{x-4} dx$ diverge, anche l'integrale di partenza diverge.

18. Per $x \rightarrow 2^+$ si ha

$$\frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} \sim \frac{2(x-2)^\alpha}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$$

quindi l'integrale converge se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Per $\alpha = 0$ dobbiamo calcolare:

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\sqrt{x^2-4} \right]_t^3 = \lim_{t \rightarrow 2^+} (\sqrt{5} - \sqrt{t^2-4}) = \sqrt{5}.$$

19. a) Se $a \leq 2$, l'integrale diverge, data la presenza del fattore $\frac{1}{x-2}$. Se $a > 2$, l'integrale converge perché il fattore $\frac{1}{\sqrt{|x-3|}}$ non dà problemi di integrazione impropria (al finito), mentre all'infinito la frazione integranda si comporta come $\frac{1}{x^{3/2}}$ e dunque converge.

b) Per $a = 6$, mediante la sostituzione $\sqrt{x-3} = t$ l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int_6^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}} dx &= \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)t} dt = 2 \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{3}}^b \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

20. Dobbiamo studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2 + x + 1} dx .$$

Utilizziamo il criterio del confronto; osserviamo che

$$\frac{|\sin x|}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

e che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx$$

è convergente. Infatti, il primo addendo non è un integrale improprio; quanto al secondo addendo, per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \sim \frac{1}{x^2}$$

e l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

Pertanto l'integrale assegnato converge assolutamente.

21. a) Nell'intervallo $[0, 1]$ la funzione integranda $f(x) = \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}$ presenta solo una singolarità in $x = 0$. Per capire il comportamento di $f(x)$ in $x = 0$, utilizziamo le seguenti equivalenze, valide per $x \rightarrow 0^+$:

$$\log(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \quad \text{e} \quad \sin x \sim x \quad \implies \quad \frac{\log(1 + \sqrt{x})}{\sin x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche il nostro integrale (si osservi che, per $x \in [0, 1]$, $\sin x \geq 0$ e dunque $f(x) \geq 0$ e si può applicare il criterio del confronto asintotico).

b) Nell'intervallo $[3, +\infty)$ la funzione integranda $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}}$ non presenta singolarità, ed è positiva. Pertanto conta solo il suo comportamento per $x \rightarrow +\infty$. Ora, per $x \rightarrow +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \sim \frac{x}{x\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge, anche l'integrale di partenza risulta divergente.

22. Per $x \rightarrow 0$, si ha:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad \log(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x}$$

dunque

$$\frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \sim \frac{x^2/2}{x^2 \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}, \quad x \rightarrow 0.$$

Dunque, per $x \rightarrow 0$, $f(x)$ ha ordine di infinito $\frac{1}{3}$, e la sua parte principale è la funzione $g(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$.

Prima di studiare la convergenza dell'integrale improprio, osserviamo che, per $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} dx &= \int_0^\beta \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} dx + \\ &+ \int_\beta^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} dx, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

In base allo studio fatto in precedenza, possiamo affermare che il primo addendo converge, perché, per $x \rightarrow 0$, $f(x) \sim g(x)$ e l'integrale improprio $\int_0^\beta g(x) dx$ è convergente.

Per studiare la convergenza del secondo integrale, utilizziamo il criterio del confronto:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2},$$

per β abbastanza grande (deve essere $\beta > (e - 1)^3$). Poiché l'integrale improprio $\int_\beta^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, anche il secondo integrale converge.

Pertanto l'integrale assegnato è convergente.