

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti “immediati”:

$$a) \int \frac{\log^3 x}{x} dx$$

$$b) \int \frac{dx}{x \log^3 x}$$

$$c) \int x^2 e^{x^3} dx$$

$$d) \int \frac{\arctan^4 x}{1+x^2} dx$$

$$e) \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

$$f) \int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$$

$$g) \int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

$$h) \int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Utilizzando la proprietà di linearità, calcolare i seguenti integrali:

$$a) \int (4x^4 + 3x^2 + 5x) dx$$

$$b) \int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} dx$$

$$c) \int (1 + 2x^3)^2 dx$$

$$d) \int (1 + \cos x)^2 dx$$

$$e) \int \cot^2 x dx$$

$$f) \int \cos^3 x dx$$

3. Calcolare i seguenti integrali con la tecnica di integrazione per parti:

$$a) \int x^3 \sinh x dx$$

$$b) \int x^3 \sin(x^2) dx$$

$$c) \int x^4 \cos(2x) dx$$

$$d) \int e^{2x} \sin(3x) dx$$

$$e) \int e^{-3x} \cos(2x) dx$$

$$f) \int \arcsin x dx$$

$$g) \int x^3 \log x dx$$

$$h) \int x^5 e^{-x^3} dx$$

$$i) \int \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$j) \int \log^2 x dx$$

$$k) \int x \sin^2 x dx$$

$$l) \int \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) dx$$

4. Calcolare i seguenti integrali di funzioni razionali:

$$a) \int \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$b) \int \frac{x^2 - 10x + 10}{x^3 + 2x^2 + 5x} dx$$

$$c) \int \frac{3x^2 - x}{(x + 1)^2(x + 2)} dx$$

$$d) \int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

$$e) \int \frac{x^3 - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx$$

$$f) \int \frac{x^3}{x^2 + 7x + 12} dx$$

5. Calcolare i seguenti integrali effettuando le opportune sostituzioni:

$$a) \int \frac{dx}{x(2 + \log^2 x)}$$

$$b) \int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$c) \int \frac{x^5}{\sqrt{x^3 - 1}} dx$$

$$d) \int \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$e) \int \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} dx$$

$$f) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$g) \int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x}{e^x + 1} dx$$

$$h) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

$$i) \int \frac{1 - 3x}{\sqrt{x} - 2} dx$$

$$j) \int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x - 1}$$

$$k) \int \frac{\sin 2x}{6 \sin x - \cos 2x + 5} dx$$

$$\ell) \int \cot^5 x dx$$

$$m) \int \frac{\tan^3 x + \tan x}{\tan x + 4} dx$$

$$n) \int \frac{\tan x}{\sin^2 x + 1} dx$$

6. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$a) \int_6^8 \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} dx$$

$$b) \int_0^1 x^2 \arctan x dx$$

$$c) \int_0^1 \frac{2x^2 + x + 4}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$$

$$d) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (x + 1)^2 |\cos x| dx$$

7. Calcolare l'area A delle seguenti regioni del piano:

a) regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \frac{9x}{(x + 1)(x - 2)}$ e l'asse delle x , per $x \in [0, 1]$;

b) regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x \sin 2x$ e l'asse delle x , per $x \in [0, \pi]$;

c) regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ e l'asse delle x , per $x \in [\sqrt{2}, 2]$.

8. Sia $f(x) = \sin^3 x \cos^2 x$. Si calcoli la media integrale μ di f sull'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$; si dica se esiste un punto $c \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ per cui $f(c) = \mu$.

9. Sia $g(x) = (1 + x^2)e^{-|x+1|}$. Si calcoli la primitiva G di g in \mathbb{R} tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$.

10. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\pi x^2) & x \leq 1 \\ x^2 - 8x + 16 & x > 1, \end{cases}$$

determinare la primitiva generalizzata di f che si annulla in $x_0 = 0$.

11. a) Si calcoli $I_n = \int_1^2 \frac{nx}{(x^2 + \frac{1}{n})^n} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.

b) Si calcoli $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

12. Si calcoli la primitiva che si annulla in $x_0 = 0$ della seguente funzione definita su $(-\infty, 3)$

$$f(x) = \frac{x + 2}{(|x| + 3)(x - 3)}.$$

13. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x|6x - 2| + 1 & x \leq 0 \\ (x + 1)e^{x/2} & x > 0, \end{cases}$$

a) determinare la primitiva F di f tale che $F(-1) = 0$;

b) calcolare $\int_{-1}^2 f(t) dt$;

c) calcolare $\int_{-1/3}^{2/3} f(3t) dt$.

14. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

a) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

b) $\int_0^1 \log x dx$

c) $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} + xe^{-x} \right) dx$

d) $\int_0^2 \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx$

f) $\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^{3/2}} dx$

15. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^3} dx$$

16. Stabilire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ converge l'integrale improprio

$$I_n = \int_2^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2-1)^3} dx$$

Calcolarlo per il più grande di essi.

17. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri; se converge, calcolare il secondo:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|^\alpha} dx$

b) $\int_0^1 x \log \left| \frac{x}{x-1} \right| dx$

18. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 - x - 1} dx$$

19. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x^2-2}} dx$

b) $\int_0^3 \frac{1 - \cos x}{x^2 \sin \sqrt{x}} dx$

c) $\int_0^{12} \frac{1 - \cos x}{x^2 \sin \sqrt{x}} dx$

Soluzioni

1. Si ha

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \frac{\log^4 x}{4} + c & b) \quad -\frac{1}{2 \log^2 x} + c \\
 c) \quad \frac{e^{x^3}}{3} + c & d) \quad \frac{\arctan^5 x}{5} + c \\
 e) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + c & f) \quad \log|x + \sin x| + c \\
 g) \quad \frac{\arctan(x^4)}{4} + c & h) \quad \frac{\arcsin^3 x}{3} + c
 \end{array}$$

2. Si ha

$$\begin{array}{ll}
 a) \quad \frac{4}{5}x^5 + x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c & b) \quad \frac{x^2}{2} + \arctan x + c \\
 c) \quad \frac{4}{7}x^7 + x^4 + x + c & d) \quad \frac{3}{2}x + 2 \sin x + \frac{\sin x \cos x}{2} + c \\
 e) \quad -x - \cot x + c & f) \quad \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c
 \end{array}$$

3. Si ha

$$\begin{array}{l}
 a) \quad = (x^3 + 6x) \cosh x - 3(x^2 + 2) \sinh x + c \\
 b) \quad \frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c \\
 c) \quad \frac{1}{2} \sin(2x) \left(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}\right) + \cos(2x) \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right) + c \\
 d) \quad \frac{2}{13} e^{2x} \left[\sin(3x) - \frac{3}{2} \cos(3x)\right] \\
 e) \quad -\frac{3}{13} e^{-3x} \left[\cos(2x) - \frac{2}{3} \sin(2x)\right] \\
 f) \quad x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \\
 g) \quad \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + c \\
 h) \quad \frac{e^{-x^3}(-x^3 - 1)}{3} + c
 \end{array}$$

- i) $\frac{4}{3}x^{3/4} \log x - \frac{16}{9}x^{3/4} + c$
- j) $x(\log^2 x - 2 \log x + 2) + c$
- k) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x) + c$
- ℓ) $x \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + c$

4. Si ha

- a) $x + 2 \log|x-2| + \frac{1}{x-2} + c$
- b) $2 \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 5) - \frac{13}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + c$
- c) $14 \log|x+2| - 11 \log|x+1| - \frac{4}{x+1} + c$
- d) $\frac{1}{4} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + c$
- e) $\frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \frac{2}{x} + 2 \arctan x + c$
- f) $\frac{x^2}{2} - 7x + 64 \log|x+4| - 27 \log|x+3| + c$

5. Si ha

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left(\frac{\log x}{\sqrt{2}} \right) + c$
- b) $-\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1-x^2} + c$
- c) $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3-1)^3} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3-1} + c$
- d) $2\sqrt{e^x-1} - 2 \arctan \sqrt{e^x-1} + c$
- e) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$
- f) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c$
- g) $\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + 2 \log(e^x + 1) + c$

$$h) \quad 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(1 + \sqrt[6]{x}) + c$$

$$i) \quad -22\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - 44\log(\sqrt{x} - 2) - 6x + c$$

$$j) \quad \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\log\left|\tan\frac{x}{2} - 2\right| + c$$

$$k) \quad 2\log|\sin x + 2| - \log|\sin x + 1| + c$$

$$\ell) \quad -\frac{1}{4\tan^4 x} + \frac{1}{2\tan^2 x} + \log|\sin x| + c$$

$$m) \quad \tan x - 4\log|\tan x + 4| + c$$

$$n) \quad \frac{1}{4}\log(1 + 2\tan^2 x) + c$$

$$6. \quad a) \quad 14 + 4\log 3 \quad b) \quad \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}(\log 2 - 1) \quad c) \quad \frac{\pi}{4} + 2\log\frac{3}{2} \quad d) \quad 3\pi^2 + 4\pi - 4$$

$$7. \quad a) \quad 3\log 2 \quad b) \quad \pi \quad c) \quad \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

8. La media vale $\mu = \frac{47}{160\pi}$. Inoltre esiste un punto $c \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ per cui $f(c) = \mu$, perché $f(x)$ è continua nell'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

$$9. \quad G(x) = \begin{cases} -e^{-(x+1)}(x^2 + 2x + 3) + 3, & \text{se } x \geq -1 \\ e^{x+1}(x^2 - 2x + 3) - 5, & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

$$10. \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} [-\pi x^2 \cos(\pi x^2) + \sin(\pi x^2)], & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x + \frac{1}{2\pi} - \frac{37}{3}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$11. \quad a) \quad I_n = \begin{cases} \frac{n}{2-2n} \left[\left(4 + \frac{1}{n}\right)^{1-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-n} \right], & \text{se } n \neq 1 \\ \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}, & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \frac{1}{2e}$$

$$12. \quad F(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \log(x+3) + \frac{5}{6} \log(3-x) - \log 3, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ \frac{5}{x-3} - \log(3-x) + \frac{5}{3} + \log 3, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$13. \text{ a) } \quad F(x) = \begin{cases} -2x^3 + x^2 + x - 2, & \text{se } x \leq 0 \\ 2(x-1)e^{x/2}, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \quad \int_{-1}^2 f(t) dt = 2e$$

$$\text{c) } \quad \int_{-1/3}^{2/3} f(3t) dt = \frac{2}{3}e$$

14. Si ha

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 & \text{b) } -1 & \text{c) } 1 + \frac{2}{e} \\ \text{d) } 2 \log(1 + \sqrt{2}) & \text{e) } \frac{\pi}{\sqrt{5}} & \text{f) } 2\pi \end{array}$$

15. L'integrale converge e vale $\frac{1}{2}$.

16. L'integrale converge per $n \leq 2$ e per $n = 2$ vale $\frac{7}{36}$.

17. a) L'integrale converge per $\alpha \in (1, 2)$.

b) L'integrale converge e vale $\frac{1}{2}$.

18. L'integrale converge assolutamente.

19. a) converge b) converge c) diverge