

## Esercizi svolti

1. Utilizzando gli sviluppi fondamentali, calcolare gli sviluppi di Maclaurin (con resto di Peano) delle funzioni seguenti fino all'ordine  $n$  indicato:

a)  $f(x) = \ln(1 + 3x)$ ,  $n = 3$

b)  $f(x) = \cos(x^2)$ ,  $n = 10$

c)  $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ ,  $n = 3$

d)  $f(x) = \sin(x^2) - \sinh(x^2)$ ,  $n = 6$

e)  $f(x) = e^{x^3} - 1 - \sin(x^3)$ ,  $n = 12$

f)  $f(x) = (e^{3x} - 1) \sin 2x$ ,  $n = 4$

g)  $f(x) = (e^{-x} - 1)^3$ ,  $n = 4$

2. Calcolare lo sviluppo di Taylor con resto di Peano delle seguenti funzioni nel punto  $x_0$  indicato e fino all'ordine  $n$  richiesto:

a)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = -1$ ,  $n = 3$

b)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \pi/2$ ,  $n = 5$

c)  $f(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3$ ,  $x_0 = 1$ ,  $n = 2$

d)  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 2$ ,  $n = 3$

3. Calcolare lo sviluppo di Maclaurin con resto di Peano delle seguenti funzioni fino all'ordine  $n$  richiesto:

a)  $f(x) = \ln(1 + \sin x)$ ,  $n = 3$

b)  $f(x) = \ln(\cos x)$ ,  $n = 4$

c)  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ ,  $n = 4$

d)  $f(x) = \sqrt{\cosh x}$ ,  $n = 4$

4. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale (rispetto alla funzione campione usuale) delle seguenti funzioni:

a)  $f(x) = \sin x - x \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $x \rightarrow 0$

b)  $f(x) = \cosh^2 x - \sqrt{1 + 2x^2}$ ,  $x \rightarrow 0$

c)  $f(x) = e^{1/x} - e^{\sin(1/x)}$ ,  $x \rightarrow +\infty$

5. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{\tan x - x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \log \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right) \right)$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$

## Svolgimento

1. a) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} + o(z^n), \quad (1)$$

operando la sostituzione  $z = 3x$ .

Poiché  $z = 3x \asymp x$  per  $x \rightarrow 0$  si ha che  $o(x) = o(z)$ . Possiamo quindi arrestare lo sviluppo fondamentale a  $n = 3$ , ottenendo:

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3).$$

b) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n+1}) \quad (2)$$

e operiamo la sostituzione  $z = x^2$ . Ricordando che  $o((x^m)^n) = o(x^{mn})$ , si ha  $o(z^n) = o(x^{2n})$ ; possiamo quindi troncare lo sviluppo fondamentale al termine in  $z^4$ , ottenendo:

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}).$$

c) Consideriamo lo sviluppo della funzione  $(1+z)^\alpha$  per  $\alpha = 1/2$  arrestandolo al terzo ordine:

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + o(z^3). \quad (3)$$

Sostituendo in questo sviluppo dapprima  $z = x$  e poi  $z = -x$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} &= \left( 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right) + \\ &\quad - \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

d) Utilizziamo gli sviluppi fondamentali

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1}), \quad (4)$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1}), \quad (5)$$

sostituendo  $z = x^2$  e osservando che è sufficiente arrestarsi al termine cubico. Si ha

$$\begin{aligned} \sin x^2 - \sinh x^2 &= \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \right) - \left( x^2 + \frac{x^6}{3!} + o(x^6) \right) \\ &= -\frac{x^6}{3} + o(x^6). \end{aligned}$$

e) Utilizziamo lo sviluppo (4) e lo sviluppo della funzione esponenziale

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + o(z^n). \quad (6)$$

Lo sviluppo richiesto è di ordine 12; tenendo conto del fatto che dobbiamo operare la sostituzione  $z = x^3$ , possiamo arrestare lo sviluppo del seno all'ordine 3 e quello dell'esponenziale all'ordine 4. Otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^3} - 1 - \sin(x^3) \\ &= \left( 1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^4}{4!} + o((x^3)^4) - 1 \right) + \\ &\quad - \left( x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + o((x^3)^4) \right) \\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6} + \frac{x^{12}}{24} + \frac{x^9}{6} + o(x^{12}) \\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12}). \end{aligned}$$

f) Utilizziamo gli sviluppi (4) e (6). Viene richiesto lo sviluppo fino al quarto ordine; entrambi i fattori dovranno quindi essere sviluppati almeno fino a tale ordine:

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{3x} - 1) \sin 2x \\ &= \left( 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + o(x^4) - 1 \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4) \right) \\ &= \left( 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^4}{24} + o(x^4) \right) \left( 2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4) \right) \end{aligned}$$

Svolgiamo il prodotto, trascurando i termini di ordine superiore al quarto, ottenendo:

$$f(x) = (e^{3x} - 1) \sin 2x = 6x^2 + 9x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$

g) Riferendoci allo sviluppo (6) sviluppiamo la funzione  $g(x) = e^{-x} - 1$  fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-x} - 1 = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + o(x^4) - 1 \\ &= -x + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4). \end{aligned}$$

Lo sviluppo ottenuto deve essere elevato al cubo; tutti i termini che si ottengono sono di grado superiore al quarto, tranne due: il cubo di  $-x$  e il triplo prodotto tra il quadrato di  $-x$  e  $x^2/2$ . Lo sviluppo richiesto si riduce quindi a:

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^{-x} - 1)^3 = \left( -x + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^3 \\ &= -x^3 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. a) Consideriamo lo sviluppo di Maclaurin della funzione esponenziale (6); con la sostituzione  $x + 1 = z$  riconduciamo il calcolo dello sviluppo proposto a quello della funzione  $g(z) = f(z - 1) = e^{z-1}$  con centro  $z_0 = 0$  e arrestato al terzo ordine:

$$e^{z-1} = e^{-1}e^z = e^{-1} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3) \right).$$

Ritornando alla variabile  $x$  si ha

$$e^x = e^{-1} \left( 1 + (x + 1) + \frac{(x + 1)^2}{2!} + \frac{(x + 1)^3}{3!} + o((x + 1)^3) \right).$$

b) Con la sostituzione  $x - \frac{\pi}{2} = z$  ci riconduciamo al calcolo dello sviluppo della funzione  $g(z) = f(z + \frac{\pi}{2}) = \sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$  con centro  $z_0 = 0$ : possiamo utilizzare lo sviluppo (2) arrestato al quarto ordine. Quindi

$$\sin x = 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^4}{4!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right).$$

c) Presentiamo due metodi per trovare lo sviluppo richiesto.

Il primo metodo consiste nell'utilizzare direttamente la formula di Taylor, calcolando  $f(1)$ ,  $f'(1)$  e  $f''(1)$ :

$$f(1) = 5, f'(x) = 1 + 6x - 3x^2, f'(1) = 4, f''(x) = 6 - 6x, f''(1) = 0.$$

Lo sviluppo risulta quindi  $f(x) = 5 + 4(x - 1) + o(x - 1)^2$ .

Un metodo alternativo consiste nell'operare la sostituzione  $x - 1 = t$  e nel calcolare lo sviluppo della funzione  $g(t) = f(t+1) = 5 + 4t - t^3$ ; essendo richiesto

lo sviluppo al secondo ordine, trascuriamo il termine cubico e otteniamo  $g(t) = 5 + 4t + o(t^2)$ ; ritornando alla variabile  $x$  ritroviamo il risultato precedente.

d) Operiamo la sostituzione  $x - 2 = t$ ; dobbiamo sviluppare la funzione  $g(t) = f(t + 2) = \ln(t + 2)$  con centro  $t_0 = 0$ . Dobbiamo ricondurci allo sviluppo (1), arrestandolo al terzo ordine.

Per fare questo scriviamo

$$\ln(t + 2) = \ln 2 \left( 1 + \frac{t}{2} \right) = \ln 2 + \ln \left( 1 + \frac{t}{2} \right)$$

e utilizziamo (1) con la sostituzione  $z = t/2$ , ottenendo:

$$\ln(t + 2) = \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o(t^3).$$

3. a) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale (1); poiché la funzione  $\sin x$  è infinitesima per  $x \rightarrow 0$  possiamo operare la sostituzione  $z = \sin x$ , ottenendo lo sviluppo

$$\ln(1 + \sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + o((\sin x)^3). \quad (7)$$

Poiché  $\sin x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ , sia ha che  $o((\sin x)^3) = o(x^3)$ . Per ottenere lo sviluppo richiesto possiamo quindi sviluppare la (7), trascurando in essa i termini di ordine superiore al terzo:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \end{aligned}$$

- b) Utilizziamo ancora lo sviluppo fondamentale (1); in questo caso la sostituzione è meno immediata.

Infatti bisogna scrivere la funzione  $\cos x$  nella forma  $1 + z$ , dove  $z$  un infinitesimo per  $x \rightarrow 0$ : essendo  $\cos x = 1 + (\cos x - 1)$ , possiamo porre  $z = \cos x - 1$ . Osserviamo che  $\cos x - 1 \asymp x^2$  per  $x \rightarrow 0$ , per cui  $o(z^2) = o(x^4)$ ; possiamo quindi arrestare lo sviluppo (1) al secondo ordine:

$$\ln(1 + (\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 \\
 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
 &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).
 \end{aligned}$$

c) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^{n+1}z^n + o(z^n), \quad (8)$$

operando la sostituzione  $z = x + x^2$ ; poiché  $x + x^2 \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ , dobbiamo arrestare lo sviluppo ai termini di quarto grado. Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x+x^2} &= 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 + o(x^4) \\
 &= 1 - (x+x^2) + (x^2+2x^3+x^4) - (x^3+3x^4+o(x^4)) + \\
 &\quad + (x^4+o(x^4)) + o(x^4) \\
 &= 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

d) Dobbiamo tenere conto dello sviluppo (3) e di quello del coseno iperbolico:

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n+1}) \quad (9)$$

Da quest'ultimo sviluppo arrestato al secondo ordine possiamo dedurre che  $\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2!} + o(x^2)$ , per cui  $\cosh x - 1 \asymp x^2$  per  $x \rightarrow 0$ ; operata la sostituzione  $z = \cosh x - 1$ , è quindi sufficiente arrestarsi al secondo ordine. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\cosh x} &= \sqrt{1 + (\cosh x - 1)} \\
 &= 1 + \frac{(\cosh x - 1)}{2} - \frac{(\cosh x - 1)^2}{8} + o((\cosh x - 1)^2) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 + o(x^4) \\
 &= 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4)
 \end{aligned}$$

4. a) Si considera lo sviluppo (4) e lo sviluppo (2) con la sostituzione  $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ; non è immediato decidere a priori a quale termine arrestarsi, in quanto si possono avere cancellazioni dei primi termini; possiamo provare ad arrestare lo sviluppo

del seno al quinto grado e quello del coseno al quarto. Si ha:

$$\begin{aligned} \sin x - x \cos \frac{x}{\sqrt{3}} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) + \\ &\quad - x \left( 1 - \frac{(x/\sqrt{3})^2}{2!} + \frac{(x/\sqrt{3})^4}{4!} + o(x^4) \right) \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right) + \left( -x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{216} + o(x^5) \right) \\ &= \frac{x^5}{270} + o(x^5) \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la parte principale di  $f(x)$  per  $x \rightarrow 0$  è  $x^5/270$  e che l'ordine di infinitesimo è 5.

Osserviamo che la nostra congettura sul termine a cui fermarsi si è rivelata corretta, in quanto ci ha permesso di ottenere la parte principale. Se ci fossimo fermati prima (al terzo grado in (4) e al secondo in (2)) avremmo invece ottenuto uno sviluppo nullo. Poiché, come abbiamo già detto, non è possibile determinare a priori l'ordine a cui fermarsi, si deve "provare", aggiungendo eventualmente nel calcolo altri termini, se il risultato non si rivela significativo.

b) La funzione  $f(x)$  è pari, per cui nel suo sviluppo compaiono solamente potenze pari. Come tentativo, possiamo arrestare gli sviluppi al quarto ordine; tenendo conto di (9) e di (3), si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right)^2 - \left( 1 + \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^4}{8} + o(x^4) \right) \\ &= \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right) - \left( 1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) \\ &= \frac{5x^4}{6} + o(x^4). \end{aligned}$$

La funzione  $f(x)$  è quindi infinitesima di ordine 4 per  $x \rightarrow 0$  e la sua parte principale è  $\frac{5x^4}{6}$ .

c) Con la sostituzione  $t = 1/x$  ci riconduciamo allo studio della funzione  $g(t) = e^t - e^{\sin t}$  per  $t \rightarrow 0$ ; possiamo quindi riferirci agli sviluppi (6) e (4). In questo caso non è sufficiente arrestare gli sviluppi al secondo ordine (si svolgono i calcoli per esercizio), ma si deve arrivare al terzo ordine:

$$\begin{aligned} e^t - e^{\sin t} &= \left( 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3) \right) + \\ &\quad - \left( 1 + \sin t + \frac{\sin^2 t}{2!} + \frac{\sin^3 t}{3!} + o((\sin t)^3) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) + \\
 &\quad - \left(1 + t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \\
 &= \frac{t^3}{6} + o(t^3)
 \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

5. a) Lo sviluppo di Maclaurin della funzione tangente, arrestato al quinto ordine, è:

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + o(z^5) \quad (10)$$

Lo sviluppo del denominatore è quindi  $\tan x - x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ ; anche il numeratore deve essere quindi sviluppato almeno al terzo ordine.

Utilizzando gli sviluppi (6) e (1) e arrendoci al terzo ordine abbiamo:

$$\begin{aligned}
 e^x - 1 + \ln(1 - x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1\right) + \\
 &\quad + \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\
 &= -\frac{x^3}{6} + o(x^3).
 \end{aligned}$$

Quindi possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1 - x)}{\tan x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -\frac{1}{2}.$$

- b) Bisogna sviluppare la funzione al numeratore almeno fino al quarto ordine; tenendo conto degli sviluppi (6) e (2) otteniamo

$$\begin{aligned}
 e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2 &= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) + \\
 &\quad - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{3}{2}x^2 \\
 &= \frac{11}{24}x^4 + o(x^4).
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{11}{24}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{11}{24}.$$

c) Essendo  $\sqrt{1+2x^4}-1 = x^4 + o(x^4)$  per  $x \rightarrow 0$ , dobbiamo calcolare uno sviluppo del quarto ordine della funzione a numeratore. Osserviamo che, essendo  $\arctan x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$  si ha che  $x \arctan x \sim x^2$ , per cui  $o(x \arctan x) = o(x^2)$ . Abbiamo quindi il seguente sviluppo per la funzione  $h(x) = \ln(1+x \arctan x) + 1 - e^{x^2}$ :

$$\begin{aligned} h(x) &= \left( x \arctan x - \frac{x^2 \arctan^2 x}{2} + o(x^4) \right) + 1 + \\ &\quad - \left( 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) \\ &= \left( x \left( x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{x^2}{2} \left( x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + o(x^4) \right) + \\ &\quad - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= x^2 - \frac{5x^4}{6} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= -\frac{4x^4}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Possiamo concludere che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{4}{3}.$$

d) Il limite è della forma  $x - g(x)$ , dove  $g(x) = x^2 \ln \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right)$ ; bisogna innanzitutto studiare il comportamento della funzione  $g(x)$  per capire se ci troviamo di fronte a una forma indeterminata del tipo  $\infty - \infty$ .

Con la sostituzione  $t = 1/x$  ci riconduciamo a studiare la funzione  $h(t) = g(1/t) = \frac{\ln(1+\sin t)}{t^2}$  per  $t \rightarrow 0$ . Otteniamo (si tenga presente l'Esercizio 3a)):

$$h(t) = \frac{\ln(1+\sin t)}{t^2} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + o(1)$$

per cui

$$g(x) = x^2 \ln \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right) = x - \frac{1}{2} + o(1).$$

Questo risultato ci dice che effettivamente  $x - g(x)$  è una forma indeterminata del tipo  $\infty - \infty$  e nello stesso tempo ci fornisce lo strumento per risolverla; infatti si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \ln \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}.$$

e) Sviluppriamo la funzione al denominatore ed eseguiamo alcuni passaggi algebrici:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \left( 5^{\tan^2 x} - 1 \right)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^2 x \ln 5} - 1}{x^2 + o(x^2)}.$$

Tenendo conto dello sviluppo (6) e ricordando che  $\tan x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$  si ha che:

$$\begin{aligned} e^{\tan^2 x \ln 5} - 1 &= 1 + (\ln 5) \tan^2 x + o(x^2) - 1 = \\ &= \ln 5 \left( x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + o(x^2) \\ &= (\ln 5)x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x} &= 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^2 x \ln 5} - 1}{x^2 + o(x^2)} \\ &= 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln 5)x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 10 \ln 5. \end{aligned}$$