Esercizi svolti

1. Utilizzando gli sviluppi fondamentali, calcolare gli sviluppi di Maclaurin (con resto di Peano) delle funzioni seguenti fino all'ordine n indicato:

   a) $f(x) = \ln(1 + 3x)\,, \qquad n = 3$

   b) $f(x) = \cos(x^2)\,, \qquad n = 10$

   c) $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\,, \qquad n = 3$

   d) $f(x) = \sin(x^2) - \sinh(x^2)\,, \qquad n = 6$

   e) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3} - 1 - \sin(x^3)\,, \qquad n = 12$

   f) $f(x) = (\mathrm{e}^{3x} - 1)\sin 2x\,, \qquad n = 4$

   g) $f(x) = (\mathrm{e}^{-x} - 1)^3\,, \qquad n = 4$

2. Calcolare lo sviluppo di Taylor con resto di Peano delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato e fino all'ordine n richiesto:

   a) $f(x) = \mathrm{e}^x\,, \qquad x_0 = -1, \qquad n = 3$

   b) $f(x) = \sin x\,, \qquad x_0 = \pi/2, \qquad n = 5$

   c) $f(x) = 2 + x + 3x^2 - x^3\,, \qquad x_0 = 1, \qquad n = 2$

   d) $f(x) = \ln x\,, \qquad x_0 = 2, \qquad n = 3$

3. Calcolare lo sviluppo di Maclaurin con resto di Peano delle seguenti funzioni fino all'ordine n richiesto:

   a) $f(x) = \ln(1 + \sin x), \qquad n = 3$

   b) $f(x) = \ln(\cos x), \qquad n = 4$

   c) $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}, \qquad n = 4$

   d) $f(x) = \sqrt{\cosh x}, \qquad n = 4$

4. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare l' ordine di infinitesimo e la parte principale (rispetto alla funzione campione usuale) delle seguenti funzioni:

   a) $f(x) = \sin x - x \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$, $\qquad x \to 0$

   b) $f(x) = \cosh^2 x - \sqrt{1 + 2x^2}$, $\qquad x \to 0$

   c) $f(x) = \mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e}^{\sin(1/x)}$, $\qquad x \to +\infty$

5. Utilizzando gli sviluppi di Taylor, calcolare i seguenti limiti:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4} - 1}$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)\right)$

   e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{5^{1+\tan^2 x} - 5}{1 - \cos x}$

Svolgimento

1. a) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + o(z^n), \tag{1}$$

operando la sostituzione $z = 3x$.
Poiché $z = 3x \asymp x$ per $x \to 0$ si ha che $o(x) = o(z)$. Possiamo quindi arrestare lo sviluppo fondamentale a $n = 3$, ottenendo:

$$\ln(1+3x) = 3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3) = 3x - \frac{9x^2}{2} + 9x^3 + o(x^3).$$

b) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + o(z^{2n+1}) \tag{2}$$

e operiamo la sostituzione $z = x^2$. Ricordando che $o((x^m)^n) = o(x^{mn})$, si ha $o(z^n) = o(x^{2n})$; possiamo quindi troncare lo sviluppo fondamentale al termine in z^4, ottenendo:

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}).$$

c) Consideriamo lo sviluppo della funzione $(1+z)^\alpha$ per $\alpha = 1/2$ arrestandolo al terzo ordine:

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + o(z^3). \tag{3}$$

Sostituendo in questo sviluppo dapprima $z = x$ e poi $z = -x$, si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} &= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) + \\ &\qquad - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\right) \\ &= x + \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

d) Utilizziamo gli sviluppi fondamentali

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1}), \tag{4}$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(z^{2n+1}), \tag{5}$$

sostituendo $z = x^2$ e osservando che è sufficiente arrestarsi al termine cubico. Si ha

$$\begin{aligned}\sin x^2 - \sinh x^2 &= \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + o(x^6)\right) - \left(x^2 + \frac{x^6}{3!} + o(x^6)\right)\\ &= -\frac{x^6}{3} + o(x^6).\end{aligned}$$

e) Utilizziamo lo sviluppo (4) e lo sviluppo della funzione esponenziale

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + o(z^n). \tag{6}$$

Lo sviluppo richiesto è di ordine 12; tenendo conto del fatto che dobbiamo operare la sostituzione $z = x^3$, possiamo arrestare lo sviluppo del seno all'ordine 3 e quello dell'esponenziale all'ordine 4. Otteniamo

$$\begin{aligned}f(x) &= \mathrm{e}^{x^3} - 1 - \sin(x^3)\\ &= \left(1 + x^3 + \frac{(x^3)^2}{2!} + \frac{(x^3)^3}{3!} + \frac{(x^3)^4}{4!} + o\left((x^3)^4\right) - 1\right) +\\ &\qquad - \left(x^3 - \frac{(x^3)^3}{3!} + o\left((x^3)^4\right)\right)\\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6} + \frac{x^{12}}{24} + \frac{x^9}{6} + o(x^{12})\\ &= \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + \frac{x^{12}}{24} + o(x^{12}).\end{aligned}$$

f) Utilizziamo gli sviluppi (4) e (6). Viene richiesto lo sviluppo fino al quarto ordine; entrambi i fattori dovranno quindi essere sviluppati almeno fino a tale ordine:

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\mathrm{e}^{3x} - 1\right)\sin 2x\\ &= \left(1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^4}{4!} + o(x^4) - 1\right)\cdot\\ &\qquad \cdot\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^4)\right)\\ &= \left(3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(2x - \frac{4x^3}{3} + o(x^4)\right)\end{aligned}$$

Svolgiamo il prodotto, trascurando i termini di ordine superiore al quarto, ottenendo:

$$f(x) = \left(\mathrm{e}^{3x} - 1\right)\sin 2x = 6x^2 + 9x^3 + 5x^4 + o(x^4).$$

g) Riferendoci allo sviluppo (6) sviluppiamo la funzione $g(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$ fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathrm{e}^{-x} - 1 = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + o(x^4) - 1 \\ &= -x + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4). \end{aligned}$$

Lo sviluppo ottenuto deve essere elevato al cubo; tutti i termini che si ottengono sono di grado superiore al quarto, tranne due: il cubo di $-x$ e il triplo prodotto tra il quadrato di $-x$ e $x^2/2$. Lo sviluppo richiesto si riduce quindi a:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)^3 = \left(-x + \frac{x^2}{2!} + \frac{-x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^3 \\ &= -x^3 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. a) Consideriamo lo sviluppo di Maclaurin della funzione esponenziale (6); con la sostituzione $x + 1 = z$ riconduciamo il calcolo dello sviluppo proposto a quello della funzione $g(z) = f(z-1) = \mathrm{e}^{z-1}$ con centro $z_0 = 0$ e arrestato al terzo ordine:

$$\mathrm{e}^{z-1} = \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{-1}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + o(z^3)\right).$$

Ritornando alla variabile x si ha

$$\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{-1}\left(1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + o((x+1)^3)\right).$$

b) Con la sostituzione $x - \frac{\pi}{2} = z$ ci riconduciamo al calcolo dello sviluppo della funzione $g(z) = f\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$ con centro $z_0 = 0$: possiamo utilizzare lo sviluppo (2) arrestato al quarto ordine. Quindi

$$\sin x = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right).$$

c) Presentiamo due metodi per trovare lo sviluppo richiesto.
Il primo metodo consiste nell'utilizzare direttamente la formula di Taylor, calcolando $f(1)$, $f'(1)$ e $f''(1)$:
$f(1) = 5,\ f'(x) = 1 + 6x - 3x^2,\ f'(1) = 4,\ f''(x) = 6 - 6x,\ f''(1) = 0.$
Lo sviluppo risulta quindi $f(x) = 5 + 4(x-1) + o(x-1)^2$.

Un metodo alternativo consiste nell'operare la sostituzione $x - 1 = t$ e nel calcolare lo sviluppo della funzione $g(t) = f(t+1) = 5+4t-t^3$; essendo richiesto lo sviluppo al secondo ordine, trascuriamo il termine cubico e otteniamo $g(t) = 5 + 4t + o(t^2)$; ritornando alla variabile x ritroviamo il risultato precedente.

d) Operiamo la sostituzione $x - 2 = t$; dobbiamo sviluppare la funzione $g(t) = f(t+2) = \ln(t+2)$ con centro $t_0 = 0$. Dobbiamo ricondurci allo sviluppo (1), arrestandolo al terzo ordine.

Per fare questo scriviamo

$$\ln(t+2) = \ln 2\left(1 + \frac{t}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right)$$

e utilizziamo (1) con la sostituzione $z = t/2$, ottenendo:

$$\ln(t+2) = \ln 2 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{24} + o(t^3)\,.$$

3. a) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale (1); poiché la funzione $\sin x$ è infinitesima per $x \to 0$ possiamo operare la sostituzione $z = \sin x$, ottenendo lo sviluppo

$$\ln(1 + \sin x) = \sin x - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} + o((\sin x)^3). \tag{7}$$

Poiché $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, sia ha che $o((\sin x)^3) = o(x^3)$. Per ottenere lo sviluppo richiesto possiamo quindi sviluppare la (7), trascurando in essa i termini di ordine superiore al terzo:

$$\begin{aligned}
\ln(1 + \sin x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).
\end{aligned}$$

b) Utilizziamo ancora lo sviluppo fondamentale (1); in questo caso la sostituzione è meno immediata.
Infatti bisogna scrivere la funzione $\cos x$ nella forma $1 + z$, dove z un infinitesimo per $x \to 0$: essendo $\cos x = 1 + (\cos x - 1)$, possiamo porre $z = \cos x - 1$. Osserviamo che $\cos x - 1 \asymp x^2$ per $x \to 0$, per cui $o(z^2) = o(x^4)$; possiamo quindi arrestare lo sviluppo (1) al secondo ordine:

$$\ln(1 + (\cos x - 1)) = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o(x^4)$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2 \\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4). \end{aligned}$$

c) Utilizziamo lo sviluppo fondamentale

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots+(-1)^{n+1}z^n+o(z^n), \tag{8}$$

operando la sostituzione $z=x+x^2$; poiché $x+x^2\sim x$ per $x\to 0$, dobbiamo arrestare lo sviluppo ai termini di quarto grado. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+x^2} &= 1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+o(x^4) \\ &= 1-(x+x^2)+(x^2+2x^3+x^4)-\big(x^3+3x^4+o(x^4)\big)+ \\ &\quad +\big(x^4+o(x^4)\big)+o(x^4) \\ &= 1-x+x^3-x^4+o(x^4). \end{aligned}$$

d) Dobbiamo tenere conto dello sviluppo (3) e di quello del coseno iperbolico:

$$\cosh z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+o(z^{2n+1}) \tag{9}$$

Da quest'ultimo sviluppo arrestato al secondo ordine possiamo dedurre che $\cosh x-1=\frac{x^2}{2!}+o(x^2)$, per cui $\cosh x-1\asymp x^2$ per $x\to 0$; operata la sostituzione $z=\cosh x-1$, è quindi sufficiente arrestarsi al secondo ordine. Si ha:

$$\begin{aligned} \sqrt{\cosh x} &= \sqrt{1+(\cosh x-1)} \\ &= 1+\frac{(\cosh x-1)}{2}-\frac{(\cosh x-1)^2}{8}+o((\cosh x-1)^2) \\ &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)^2+o(x^4) \\ &= 1+\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{96}+o(x^4) \end{aligned}$$

4. a) Si considera lo sviluppo (4) e lo sviluppo (2) con la sostituzione $z=\frac{x}{\sqrt{3}}$; non è immediato decidere a priori a quale termine arrestarsi, in quanto si possono avere cancellazioni dei primi termini; possiamo provare ad arrestare lo sviluppo

del seno al quinto grado e quello del coseno al quarto. Si ha:

$$\begin{aligned}
\sin x - x\cos\frac{x}{\sqrt{3}} &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) + \\
&\qquad -x\left(1 - \frac{(x/\sqrt{3})^2}{2!} + \frac{(x/\sqrt{3})^4}{4!} + o(x^4)\right) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) + \left(-x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{216} + o(x^5)\right) \\
&= \frac{x^5}{270} + o(x^5)
\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ è $x^5/270$ e che l'ordine di infinitesimo è 5.
Osserviamo che la nostra congettura sul termine a cui fermarsi si è rivelata corretta, in quanto ci ha permesso di ottenere la parte principale. Se ci fossimo fermati prima (al terzo grado in (4) e al secondo in (2)) avremmo invece ottenuto uno sviluppo nullo. Poiché, come abbiamo già detto, non è possibile determinare a priori l'ordine a cui fermarsi, si deve "provare", aggiungendo eventualmente nel calcolo altri termini, se il risultato non si rivela significativo.

b) La funzione $f(x)$ è pari, per cui nel suo sviluppo compaiono solamente potenze pari. Come tentativo, possiamo arrestare gli sviluppi al quarto ordine; tenendo conto di (9) e di (3), si ha:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 - \left(1 + \frac{2x^2}{2} - \frac{4x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&= \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - \left(1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right) \\
&= \frac{5x^4}{6} + o(x^4).
\end{aligned}$$

La funzione $f(x)$ è quindi infinitesima di ordine 4 per $x \to 0$ e la sua parte principale è $\frac{5x^4}{6}$.

c) Con la sostituzione $t = 1/x$ ci riconduciamo allo studio della funzione $g(t) = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\sin t}$ per $t \to 0$; possiamo quindi riferirci agli sviluppi (6) e (4). In questo caso non è sufficiente arrestare gli sviluppi al secondo ordine (si svolgano i calcoli per esercizio), ma si deve arrivare al terzo ordine:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{\sin t} &= \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right) + \\
&\qquad - \left(1 + \sin t + \frac{\sin^2 t}{2!} + \frac{\sin^3 t}{3!} + o((\sin t)^3)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)+\\
&\qquad -\left(1+t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)\\
&= \frac{t^3}{6}+o(t^3)
\end{aligned}
$$

Quindi

$$f(x)=\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right) \qquad (x\to+\infty).$$

5. a) Lo sviluppo di Maclaurin della funzione tangente, arrestato al quinto ordine, è:

$$\tan z = z+\frac{z^3}{3}+\frac{2z^5}{15}+o(z^5) \tag{10}$$

Lo sviluppo del denominatore è quindi $\tan x - x = \frac{x^3}{3}+o(x^3)$; anche il numeratore deve essere quindi sviluppato almeno al terzo ordine.
Utilizzando gli sviluppi (6) e (1) e arrestandoci al terzo ordine abbiamo:

$$
\begin{aligned}
e^x-1+\ln(1-x) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1\right)+\\
&\qquad +\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\
&= -\frac{x^3}{6}+o(x^3).
\end{aligned}
$$

Quindi possiamo concludere che

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}=-\frac{1}{2}.$$

b) Bisogna sviluppare la funzione al numeratore almeno fino al quarto ordine; tenendo conto degli sviluppi (6) e (2) otteniamo

$$
\begin{aligned}
e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2 &= \left(1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4)\right)+\\
&\qquad -\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)-\frac{3}{2}x^2\\
&= \frac{11}{24}x^4+o(x^4).
\end{aligned}
$$

Quindi

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-\cos x-\frac{3}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{11}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{11}{24}\,.$$

c) Essendo $\sqrt{1+2x^4}-1 = x^4 + o(x^4)$ per $x \to 0$, dobbiamo calcolare uno sviluppo del quarto ordine della funzione a numeratore. Osserviamo che, essendo $\arctan x \sim x$ per $x \to 0$ si ha che $x \arctan x \sim x^2$, per cui $o(x \arctan x) = o(x^2)$. Abbiamo quindi il seguente sviluppo per la funzione $h(x) = \ln(1+x\arctan x) + 1 - e^{x^2}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(x \arctan x - \frac{x^2 \arctan^2 x}{2} + o(x^4) \right) + 1 + \\ &\qquad - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) \right) \\ &= \left(x \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - \frac{x^2}{2} \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right)^2 + o(x^4) \right) + \\ &\qquad - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= x^2 - \frac{5x^4}{6} - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) \\ &= -\frac{4x^4}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Possiamo concludere che:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1+2x^4}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{4x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{4}{3}.$$

d) Il limite è della forma $x - g(x)$, dove $g(x) = x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)$; bisogna innanzitutto studiare il comportamento della funzione $g(x)$ per capire se ci troviamo di fronte a una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$.
Con la sostituzione $t = 1/x$ ci riconduciamo a studiare la funzione $h(t) = g(1/t) = \frac{\ln(1+\sin t)}{t^2}$ per $t \to 0$. Otteniamo (si tenga presente l'Esercizio 3a)):

$$h(t) = \frac{\ln(1+\sin t)}{t^2} = \frac{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} + o(1)$$

per cui

$$g(x) = x^2 \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{2} + o(1).$$

Questo risultato ci dice che effettivamente $x - g(x)$ è una forma indeterminata del tipo $\infty - \infty$ e nello stesso tempo ci fornisce lo strumento per risolverla; infatti si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{2}.$$

e) Sviluppiamo la funzione al denominatore ed eseguiamo alcuni passaggi algebrici:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{1+\tan^2 x}-5}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\left(5^{\tan^2 x}-1\right)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=10\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan^2 x\ln 5}-1}{x^2+o(x^2)}\ .$$

Tenendo conto dello sviluppo (6) e ricordando che $\tan x\sim x$ per $x\to 0$ si ha che:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\tan^2 x\ln 5}-1 &= 1+(\ln 5)\tan^2 x+o(x^2)-1=\\ &= \ln 5\left(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^2+o(x^2)\\ &= (\ln 5)x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{5^{1+\tan^2 x}-5}{1-\cos x} &= 10\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\tan^2 x\ln 5}-1}{x^2+o(x^2)}\\ &= 10\lim_{x\to 0}\frac{(\ln 5)x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}=10\ln 5.\end{aligned}$$