

Esercizi proposti

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor (con resto di Peano) delle seguenti funzioni nel punto x_0 indicato e all'ordine n indicato:

a) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 2$, $n = 3$

b) $f(x) = \log(2 - x)$, $x_0 = 1$, $n = 3$

c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $n = 2$

2. Calcolare lo sviluppo di Maclaurin delle seguenti funzioni nel punto $x_0 = 0$ e all'ordine n indicato:

a) $f(x) = \sin^2 x$, $n = 6$

b) $f(x) = \sin^2 x - \sin x^2$, $n = 4$

c) $f(x) = (e^x - 1)^2$, $n = 5$

d) $f(x) = \log(1 - \sin^2 x)$, $n = 4$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + 3x - x^2}$, $n = 4$

f) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $n = 3$

g) $f(x) = \log(2 - \cos x)$, $n = 4$

h) $f(x) = \cos(\log(1 + x))$, $n = 4$

3. Calcolare l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \rightarrow 0$, delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = e^{-x \cos x} + \sin x - \cos x$

b) $f(x) = \sin x(\cos 3x - 1)$

c) $f(x) = e^{\cos x} - e^{\cosh x}$

d) $f(x) = \tan x(x - \log(1 + x))$

e) $f(x) = \sin(\sinh x) - x \cos(x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - x^2/2}$

4. Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{e^{x^2} - e^{x^3}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 + \cos(3x) - 3 \cosh x)^4}{\log(1 + x^2)}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^2 \log(\cos x)}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 - 5x^2 + x^4} - 1 + x^2}{x^4}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1 + x^8} - \sqrt[3]{1 + x^8}}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin x - x^2}{\sqrt{1 + x^4} - \cos(x^2)}$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

$$\ell) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

Soluzioni

1. a) $f(x) = 4 + 4 \ln 2(x-2) + 2 \ln^2 2(x-2)^2 + \frac{2}{3} \ln^3 2(x-2)^3 + o((x-2)^3)$
b) $f(x) = -(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$
c) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{\pi}{3})^2 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2\right)$
2. a) $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6)$
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$
c) $f(x) = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^5 + o(x^5)$
d) $f(x) = -x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$
e) $f(x) = 1 - 3x + 10x^2 - 33x^3 + 109x^4 + o(x^4)$
f) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$
g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$
h) $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$
3. a) $p(x) = x^2$; ord. = 2
b) $p(x) = \frac{9}{2}x^3$; ord = 3
c) $p(x) = -ex^2$; ord = 2
d) $p(x) = \frac{1}{2}x^3$; ord = 3
e) $p(x) = \frac{13}{30}x^5$; ord = 5
f) $p(x) = \frac{1}{48}x^4$; ord = 4
4. a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$
f) $\frac{1}{5}$ g) -3 h) $\frac{1}{6}$ i) $-\frac{e}{2}$ l) $\frac{1}{6}$