Esercizi svolti

1. Sia
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)} & \text{se } x>0\\ a\,2^x+3 & \text{se } x\le 0;\end{cases}$$
determinare a in modo che f risulti continua nel suo dominio.

2. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x=2$ al grafico di
$$f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}-\log(2x-3)$$
e ricavare la parte principale di $f(x)-f(2)$ per $x\to 2$.

3. Determinare gli eventuali punti di non derivabilità delle seguenti funzioni
$$a)\quad f(x)=|x^2-1| \qquad b)\quad f(x)=e^{-|x|} \qquad c)\quad f(x)=\min(x^2,\frac{1}{x^2})$$

4. Sia
$$f(x)=\begin{cases}(x-\beta)^2-2 & x\ge 0\\ \alpha\sin x & x<0.\end{cases}$$
Determinare α e β in modo che f sia continua e derivabile su $\mathbb{R}$.

5. Verificare che le funzioni
$$a)\quad f(x)=x^2\log|x| \qquad b)\quad f(x)=|x|^x$$
sono prolungabili con continuità per $x=0$. Le funzioni f così prolungate risultano derivabili in $x=0$?

6. Tra tutte le rette $y=kx$ (con $k>0$) trovare quella tangente al grafico di $f(x)=e^x$ in un punto di ascissa $x_0>0$. Utilizzare questo risultato per determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^x=kx$ al variare di k in $\mathbb{R}$.

7. Verificare che si può applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\arcsin x$ nel suo dominio $[a,b]$, e determinare i "punti di Lagrange", cioè i punti c tali che $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

8. Sia $f(x)=x^7+x$. Verificare che f è invertibile su $\mathbb{R}$. Verificare che la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$ e calcolare $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(2)$.

9. Tra tutti i triangoli rettangoli di ipotenusa assegnata a trovare quello di area massima.

10. Utilizzando la regola di de l'Hopital calcolare

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin 2x} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x}$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\log(1+3x))}{e^x-3^x}$$

$$e)\quad \lim_{x\to 1^-}\frac{\arcsin x-\pi/2}{\sqrt{1-x}} \qquad f)\quad \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$$

11. Determinare il numero di punti critici di

$$f(x)=\frac{x\log x-1}{x^2}.$$

12. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^{x^9-9x+1}=a$ al variare di a in $\mathbb{R}$.

13. Studiare la funzione

$$f(x)=\frac{\log x-3}{\log x+2}.$$

Discutere l'invertibilità di f, e calcolare $(f^{-1})'(-\frac{3}{2})$. È possibile scrivere esplicitamente la funzione inversa f^{-1}?

14. Data la funzione

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}\,,$$

a) determinare il dominio, il segno, i limiti agli estremi e gli eventuali asintoti di f;

b) determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi di f;

c) tracciare un grafico qualitativo di f.

15. Sia

$$f(x)=e^{-x}-e^{-3x}\,.$$

a) Disegnare un grafico di f mettendone in evidenza gli zeri, i punti critici, gli intervalli di monotonia e convessità.

b) Verificare in particolare che f ha un unico punto di flesso e determinare il più grande intervallo contenente questo punto sul quale f risulta invertibile.

c) Si calcoli la derivata prima di tale funzione inversa nel punto di flesso.

16. Sia data la funzione reale di variabile reale $f(x) = 2^x - 5^x$.

a) Determinarne gli eventuali zeri.

b) Determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di massimo o di minimo.

c) Verificare che f è un infinito per $x \to +\infty$ e determinarne l'ordine rispetto alla funzione $g(x) = e^x$ assunta come infinito campione.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

17. Si consideri la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan(x-1)\,.$$

a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.

b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi di f.

c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

d) Tracciare un grafico qualitativo di f.

18. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}\,.$$

Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

b) determinarne gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabiltà e gli eventuali estremi;

c) determinare il più grande intervallo di invertibilità di f contenente il punto $x = 1$;

d) tracciare un grafico qualitativo della funzione $f(x)$ e della funzione $f(|x|)$.

19. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - 3x - x|x|}\,.$$

Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

b) determinarne gli intervalli di monotonia, i punti di non derivabiltà e gli eventuali estremi;

c) determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = -1$;

d) determinare l'immagine della funzione;

e) tracciare un grafico qualitativo di f.

20. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln|x| - 1}\,.$$

Si chiede di

a) determinarne il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti;

b) determinarne gli intervalli di monotonia e gli eventuali estremi;

c) determinare l'immagine della funzione;

d) tracciare un grafico qualitativo di f;

e) posto $f(0) = 0$, discutere la continuità e la derivabilità di f in $x = 0$.

21. Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)^3(2-x)\,.$$

Si chiede di

a) studiarne il comportamento e disegnarne un grafico qualitativo;

b) considerare le funzioni

$$g_1(x) = \sqrt[3]{f(x)}\,, \qquad g_2(x) = \sqrt[3]{|f(x)|}$$

e determinare, per ciascuna di esse, i punti di estremo e i punti di non derivabilità.

Svolgimento

1. La funzione è continua in tutti i punti escluso al più nello zero. Si ha
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\,2^x + 3) = a + 3 = f(0),$$
cioè f è continua in zero da sinistra. Calcolando il limite di $f(x)$ per $x \to 0^+$ abbiamo
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + o(x^2)}{x\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)} = 2.$$
Quindi f è continua in tutto il suo dominio se e solo se $a + 3 = 2$ cioè $a = -1$.

2. Si ha $f(2) = 4/3$. Calcolando $f'(x)$ otteniamo $f'(2) = -31/9$. Quindi la retta tangente nel punto $x_0 = 2$ ha equazione $y = -\frac{31}{9}(x-2) + \frac{4}{3}$. Utilizzando la prima formula dell'incremento finito si ha
$$f(x) - f(2) = -\frac{31}{9}(x-2) + o(x-2)\,, \qquad x \to 2,$$
e quindi la parte principale di $f(x) - f(2)$ per $x \to 2$ è $p(x) = -\frac{31}{9}(x-2)$.

3. a) La funzione f ha due punti angolosi in $x = \pm 1$, come si vede facilmente anche disegnandone il grafico. Ad esempio calcolando le derivate laterali nel punto $x_0 = 1$ otteniamo
$$\begin{aligned} f'_\pm(1) &= \lim_{x\to 1^\pm} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x^2-1|}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x-1|\cdot|x+1|}{x-1} = \pm 2. \end{aligned}$$

   b) La funzione f ha un punto angoloso in $x = 0$, come si verifica anche disegnandone il grafico. Esplicitamente, le derivate laterali in $x_0 = 0$ sono date da:
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -\lim_{t\to 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = -1,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

   c) Risolvendo la disequazione $x^2 < \frac{1}{x^2}$, si vede facilmente che
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \le 1, \ \ x \ne 0, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Notiamo che f non è definita in $x = 0$. In tutti gli altri punti, escluso al più i punti "di raccordo" $x = \pm 1$, f è continua e derivabile perché restrizione di funzioni continue e derivabili. La funzione è chiaramente continua nei punti $x = \pm 1$. Calcolando le derivate laterali in tali punti si ottiene facilmente $f'_{\pm}(1) = \mp 2 = f'_{\pm}(-1)$. Quindi f ha due punti angolosi in $x = \pm 1$.

4. Imponendo la continuità in $x = 0$ si ottiene $\beta = \pm\sqrt{2}$. La funzione è chiaramente derivabile in ogni punto escluso al più il punto di raccordo $x = 0$, con
$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-\beta) & x > 0 \\ \alpha \cos x & x < 0. \end{cases}$$
Sia $\beta = \pm\sqrt{2}$, così che f è continua in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ calcoliamo il limite per x che tende a zero della funzione $f'(x)$. Per un noto teorema, se tale limite esiste ed è uguale a $l \in \mathbb{R}$ allora f è derivabile in zero e $f'(0) = l$. Essendo
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -2\beta, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \alpha,$$
vediamo che f è derivabile in $x = 0$ se e solo se $\alpha = -2\beta = \mp 2\sqrt{2}$. In definitiva f è continua e derivabile su $\mathbb{R}$ se e solo se $(\alpha, \beta) = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, oppure $(\alpha, \beta) = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

5. a) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per calcolare il limite di $f(x)$ per x che tende a zero ricordiamo il limite fondamentale
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0, \qquad \forall \alpha > 0.$$
Da questo otteniamo
$$\lim_{x\to 0} x^2 \log|x| = 0,$$
e quindi f si può prolungare con continuità nello zero ponendo $f(0) = 0$. Calcolando il limite del rapporto incrementale nello zero otteniamo che f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = 0$, essendo
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{2}} \log|x|}{\cancel{x}} = 0.$$
b) Si ha
$$\lim_{x\to 0} |x|^x = \lim_{x\to 0} e^{x\log|x|} = e^0 = 1.$$
Posto $f(0) = 1$ e calcolando il limite del rapporto incrementale per x che tende a zero otteniamo
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log|x|} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x\log|x|} - 1}{x \log|x|} \right) \cdot \log|x| = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$
Quindi in questo caso f non è derivabile in $x = 0$.

6. Imponendo le condizioni di tangenza tra $f(x) = e^x$ e $g(x) = kx$, cioè

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f'(x) = g'(x), \end{cases}$$

si ottiene facilmente $x = 1$ e $k = e$. Quindi la retta $y = ex$ è tangente a e^x nel punto di ascissa 1. Graficamente si deduce allora che l'equazione $e^x = kx$ ha 1 soluzione per $k < 0$ e per $k = e$, 2 soluzioni per $k > e$, nessuna per $0 \le k < e$.

Possiamo anche procedere in un altro modo, cioè studiamo la funzione $f(x) = e^x - kx$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Ci interessa trovare quanti zeri ha f, cioè il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$. Possiamo supporre $k \neq 0$. Sia $k > 0$. Si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Calcolando la derivata e studiandone il segno otteniamo

$$f'(x) = e^x - k \ge 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ge \log k.$$

Quindi f ha un punto di minimo assoluto in $x = \log k$. Per stabilire se questo minimo è positivo, negativo o nullo osserviamo che

$$f(\log k) = e^{\log k} - k\log k = k(1 - \log k) \le 0 \Longleftrightarrow k \ge e.$$

Quindi se $k > e$ il minimo sta al di sotto dell'asse x e f ha due zeri. In questo caso la retta $y = kx$ è secante al grafico di e^x. Se $k = e$ il minimo giace sull'asse x, f ha un solo zero, e la retta $y = ex$ è tangente a e^x. Infine se $0 < k < e$ il minimo è al di sopra dell'asse x e quindi f non ha zeri. In tal caso la retta $y = kx$ non incontra il grafico di e^x.

Sia ora $k < 0$. Si ha $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e $f'(x) = e^x - k > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dunque f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$ e si annulla in un solo punto x_0 (< 0 perchè $f(0) = 1$). Quindi per $k < 0$ la retta $y = kx$ incontra il grafico di e^x nel solo punto x_0.

7. La funzione $f(x) = \arcsin x$ è continua su $[-1, 1]$ ed è derivabile su $(-1, 1)$ (i punti $x = \pm 1$ sono punti a tangente verticale, essendo $\lim\limits_{x\to\pm 1} f'(x) = +\infty$). Si può quindi applicare il Teorema di Lagrange. I punti di Lagrange devono soddisfare la condizione

$$\frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{\pi}{2},$$

da cui

$$c = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}}.$$

8. La funzione f è continua e strettamente crescente su $\mathbb{R}$, essendo $f'(x) = 7x^6 + 1 > 0$ per ogni x. Quindi f è invertibile su $\mathbb{R}$. Poiché la sua derivata non si annulla mai, la funzione inversa f^{-1} è derivabile su $\mathbb{R}$. Essendo $f(0) = 0$ e $f(1) = 2$, si ha
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = 1, \quad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{8}.$$

9. Il problema si risolve facilmente senza calcoli osservando che i triangoli in questione si possono inscrivere in una semicirconferenza di diametro a. Quello di area massima si otterrà quando l'altezza relativa all'ipotenusa è massima, cioè quando è uguale al raggio $\frac{a}{2}$. Questo significa che il triangolo è isoscele, con cateti uguali a $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
Dal punto di vista analitico
$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$$
è l'area in funzione della misura x di un cateto. Si ha $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, con $f(0) = f(a) = 0$. Studiando il segno della derivata prima
$$f'(x) = \frac{a^2 - 2x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$$
si vede che $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ è punto di massimo relativo e assoluto, con $f(\frac{a}{\sqrt{2}}) = \frac{a^2}{4}$.

10. a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi\, 3^x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\pi\, 3^x)\, \pi\, 3^x\, \log 3}{1} = \pi \log 3.$$

c) $$\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(e^x+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1 + 3x))}{e^x - 3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\cos(\log(1+3x))}{1+3x}}{e^x - 3^x \log 3} = \frac{3}{1 - \log 3}.$$

e) $$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arcsin x - \pi/2}{\sqrt{1 - x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = -2 \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = -\sqrt{2}.$$

f) $$\lim_{x\to +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1.$$

11. Si ha $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$, e la derivata prima vale
$$f'(x) = \frac{x + 2 - x\log x}{x^3}.$$
Quindi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 + \frac{2}{x}$. Disegnando le due funzioni $\log x$ e $1 + \frac{2}{x}$ si vede facilmente che questa equazione ha un'unica soluzione $x_0 > 1$. Pertanto f ha un solo punto critico $x_0 > 1$.

12. Innanzitutto non ci sono soluzioni se $a \le 0$. Studiando la funzione $f(x) = e^{x^9 - 9x + 1}$ si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e si trova che f ha un punto di massimo relativo in $x = -1$, con $f(-1) = e^9$, e un punto di minimo relativo in $x = 1$, con $f(1) = e^{-7}$. Disegnando un grafico qualitativo di f si vede che l'equazione proposta ha
$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione per } 0 < a < e^{-7} \text{ e per } a > e^9, \\ 2 \text{ soluzioni per } a = e^{-7} \text{ e } a = e^9, \\ 3 \text{ soluzioni per } e^{-7} < a < e^9. \end{cases}$$

13. Si ha $\operatorname{dom} f = (0, e^{-2}) \cup (e^{-2}, +\infty)$,
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 1 = \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to\frac{1}{e^2}^{\pm}} f(x) = \frac{-5}{0^{\pm}} = \mp\infty.$$
Quindi la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale e la retta $x = e^{-2}$ è asintoto verticale. La derivata prima vale
$$f'(x) = \frac{5}{x(\log x + 2)^2} > 0\,, \qquad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$
Questo implica che f è strettamente crescente su $(0, e^{-2})$ e su $(e^{-2}, +\infty)$. Quindi f è invertibile in ognuno di questi due intervalli. Essendo poi
$$f((0, e^{-2})) = (1, +\infty), \qquad f((e^{-2}, +\infty)) = (-\infty, 1),$$
f è iniettiva e quindi invertibile in tutto il suo dominio. Questo si vede facilmente anche disegnando il grafico di f. Essendo $f(1) = -\frac{3}{2}$, si ha
$$(f^{-1})'(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{5}.$$
L'equazione $f(x) = y$ si risolve esplicitamente e si ottiene $x = e^{\frac{2y+3}{1-y}}$. Dunque la funzione inversa è
$$f^{-1}(x) = e^{\frac{2x+3}{1-x}}.$$

14. a) Per determinare il dominio di f, imponiamo che il denominatore sia diverso da zero, quindi $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.
Per studiare il segno di f risolviamo la disequazione

$$\frac{x-1}{x^2-x-6} > 0$$

ottenendo: $f(x) > 0$ per x in $(-2, 1)$ e $(3, +\infty)$.
Risulta

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x \to -3^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0\,.$$

Quindi, $x = -2$ e $x = 3$ sono asintoti verticali completi e $y = 0$ è un asintoto orizzontale completo.

b) Si ha

$$f'(x) = -\frac{x^2-2x+7}{(x^2-x-6)^2}\,.$$

La derivata prima è sempre negativa. Dunque la funzione f è decrescente negli intervalli $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$ e non vi sono punti di massimo o di minimo.

c) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 1.

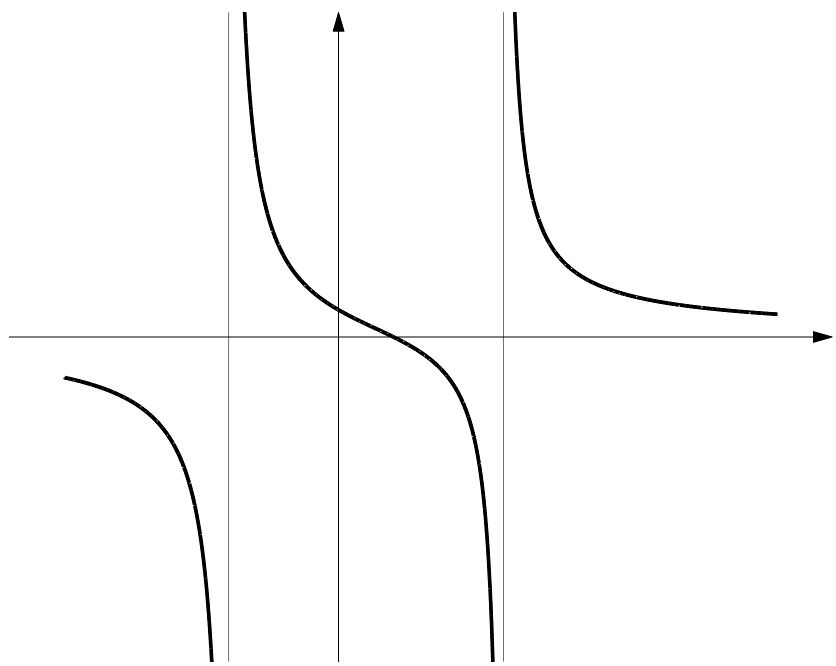

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6}$

15. a) Scriviamo

$$f(x) = e^{-x}(1 - e^{-2x})$$

e osserviamo che $e^{-x} > 0$ per ogni x, quindi $f(x) = 0$ se $1 - e^{-2x} = 0$, ossia per $x = 0$. Inoltre

$$f'(x) = -e^{-x} + 3e^{-3x} = -e^{-x}(1 - 3e^{-2x}),$$

dunque $f'(x) = 0$ se $1 - 3e^{-2x} = 0$, ossia per $x = \frac{\ln 3}{2}$; $f'(x) > 0$ se $x < \frac{\ln 3}{2}$ e quindi f è crescente in $(-\infty, \frac{\ln 3}{2})$ e decrescente in $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$. Si ha

$$f''(x) = e^{-x} - 9e^{-3x} = e^{-x}(1 - 9e^{-2x}),$$

dunque $f''(x) = 0$ se $1 - 9e^{-2x} = 0$, ossia per $x = \ln 3$; $f''(x) > 0$ se $x > \ln 3$, quindi f è concava in $(-\infty, \ln 3)$ ed è convessa in $(\ln 3, +\infty)$.
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 2.

b) Per quanto visto al punto precedente, $x = \ln 3$ è l'unico punto di flesso della funzione. Inoltre f risulta invertibile negli intervalli $(-\infty, \frac{\ln 3}{2})$ e $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$ e quindi il più grande intervallo che contiene il punto di flesso e in cui f è invertibile è $(\frac{\ln 3}{2}, +\infty)$.

c) Poiché $f(\ln 3) = \frac{8}{27}$, risulta

$$(f^{-1})'(\frac{8}{27}) = \frac{1}{f'(\ln 3)} = -\frac{27}{6}\,.$$

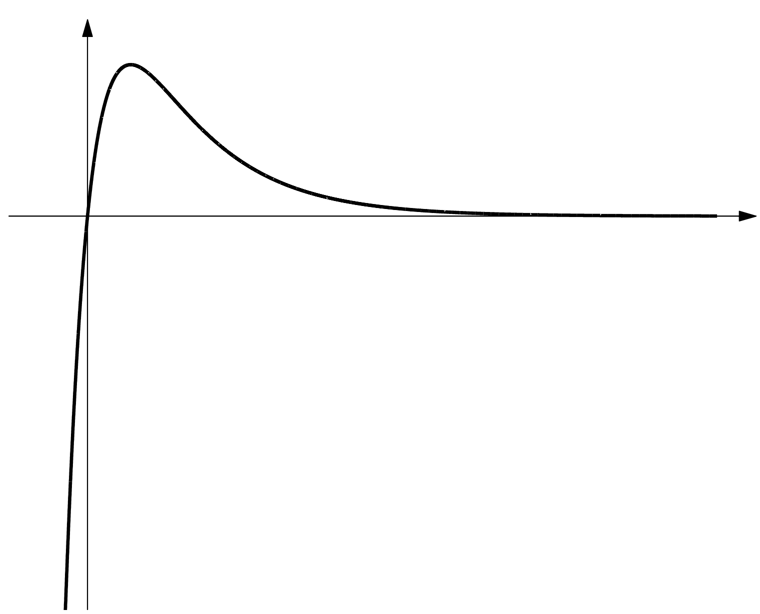

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = e^{-x} - e^{-3x}$

16. a) Possiamo scrivere $f(x) = 2^x\Big(1-(5/2)^x\Big)$, così $f(x) = 0$ per $1-(5/2)^x = 0$, ossia per $x = 0$.

b) Si ha $f'(x) = 2^x \ln 2 - 5^x \ln 5$ e $f'(x) = 0$ per $(5/2)^x = \ln 2/\ln 5$ ossia

$$x_0 = \frac{\ln \frac{\ln 2}{\ln 5}}{\ln \frac{5}{2}} < 0$$

è un punto critico di f. Per studiare il segno di f', scriviamo

$$f'(x) = 2^x \ln 2\Big(1-(5/2)^x\frac{\ln 5}{\ln 2}\Big)$$

e notiamo che $2^x \ln 2 > 0$, $\ln 5/\ln 2$ è positivo. Allora $f'(x) < 0$ per $x > x_0$ e $f'(x) > 0$ per $x < x_0$. Il punto x_0 è un punto di massimo assoluto e la funzione risulta crescente sull'intervallo $(-\infty, x_0)$ e decrescente sull'intervallo $(x_0, +\infty)$.

c) Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2^x\Big(1-(5/2)^x\Big) = -\infty\,,$$

la funzione è un infinito per $x \to +\infty$. Per determinarne l'ordine rispetto all'infinito campione $g(x) = e^x$, calcoliamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} &= \lim_{x\to+\infty} \Big(e^{x\ln 2} - e^{x\ln 5}\Big)e^{-\alpha x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln 5-\alpha)}\Big(e^{x(\ln 2-\ln 5)} - 1\Big) \\
&= -\lim_{x\to+\infty} e^{x(\ln 5-\alpha)}
\end{aligned}$$

poiché $\ln 2 - \ln 5 < 0$ e $\lim_{x\to+\infty}\Big(e^{x(\ln 2-\ln 5)} - 1\Big) = -1$. Affinché tale limite sia finito e diverso da zero, la quantità $\ln 5 - \alpha$ deve essere nulla. Allora $\alpha = \ln 5$ è l'ordine di infinito cercato.

d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 3.

17. a) Il dominio di f è l'intervallo $(0, +\infty)$. Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0\,;$$

e quindi la funzione ha soltanto un asintoto verticale (destro) di equazione $x = 0$ e non ha asintoti orizzontali od obliqui.

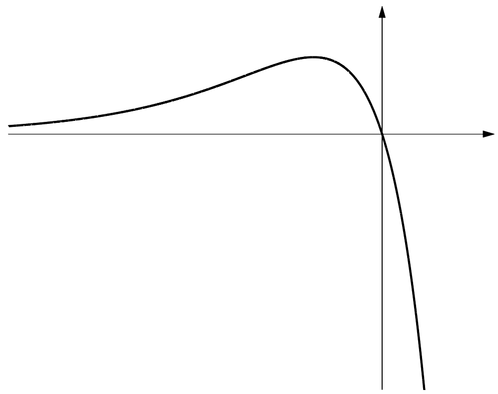

Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = 2^x - 5^x$

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x[1+(x-1)^2]}$$

e quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1$ e $x = 2$; $f'(x) > 0$ per x in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$. La funzione è crescente negli intervalli $(0, 1)$ e $(2, +\infty)$, decrescente nell'intervallo $(1, 2)$. Il punto $x = 1$ è un punto di massimo relativo con $f(1) = 0$ e il punto $x = 2$ è un punto di minimo relativo con $f(2) = \ln 2 - \pi/4 < 0$.

c) Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ sono due: $x = 1$ e un punto $x_0 > 2$, come risulta dall'applicazione del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $[2, K]$ con K numero reale sufficientemente grande e tale che $f(K) > 0$ (si ricordi che la funzione è infinita per $x \to +\infty$ e quindi tale punto esiste certamente).

d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 4.

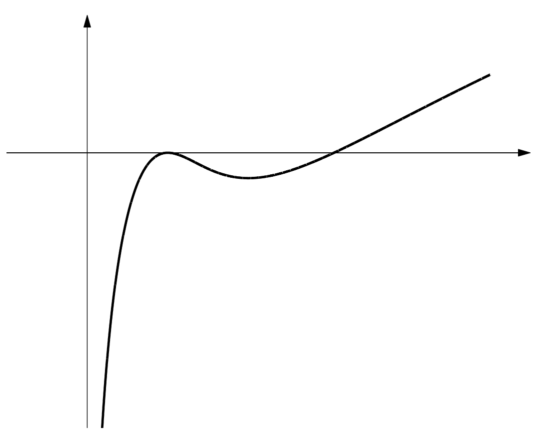

Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = \ln x - \arctan(x - 1)$

18. a) Il dominio di f è tutto l'asse reale. Risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} - x)\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}{(\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2)} +$$

$$+ \frac{x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2}{(\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4} + x\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} + x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3}.$$

e quindi la retta $y = x - \frac{5}{3}$ è un asintoto obliquo completo.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-4)(x-2)}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)^4}}\,;$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = \frac{4}{3}$ e $f'(x) > 0$ per x in $(-\infty, \frac{4}{3})$ e $(2, +\infty)$. Allora f è crescente negli intervalli $(-\infty, \frac{4}{3})$ e $(2, +\infty)$ e decrescente in $(\frac{4}{3}, 2)$; $x = \frac{4}{3}$ è un punto di massimo relativo con $f(\frac{4}{3}) = \frac{\sqrt[3]{2}}{3}$ e $x = 2$ è un punto di minimo relativo con $f(2) = 0$. Inoltre $x = 1$ e $x = 2$ sono punti di non derivabilità della funzione in quanto

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty\,;$$

più precisamente $x = 1$ è un punto a tangente verticale e $x = 2$ è una cuspide.

c) Il più grande intervallo contenente $x = 1$ su cui la funzione è invertibile è l'intervallo $(-\infty, \frac{4}{3}]$.

d) I grafici qualitativi della funzione $f(x)$ e della funzione $f(|x|)$ sono mostrati nelle Figure 5 e 6.

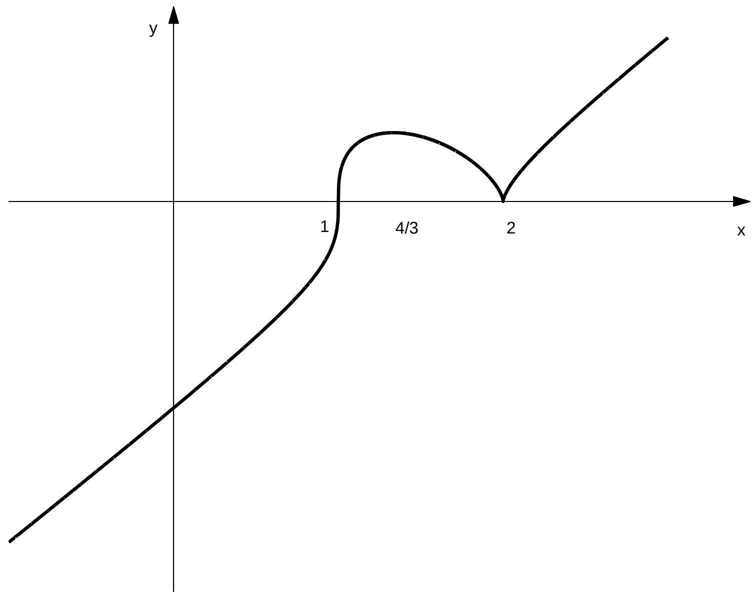

Figura 5: Grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}$

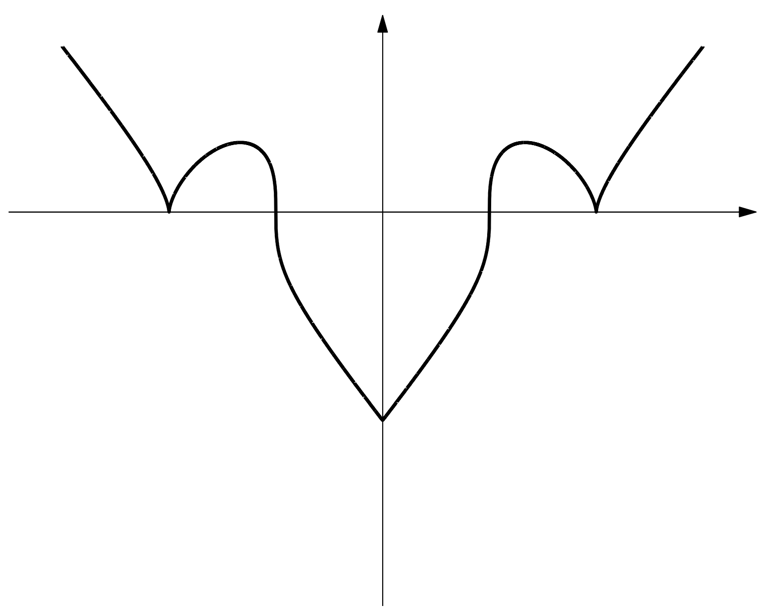

Figura 6: Grafico della funzione $f(|x|) = \sqrt[3]{(|x|-1)(|x|-2)^2}$

19. a) Per determinare il dominio, osserviamo che

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-3x-x^2} & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{1-3x+x^2} & x < 0\,, \end{cases}$$

inoltre $x^2+3x-1=0$ se $x = \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ e per $x \geq 0$ soltanto la radice $x_0 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}$ è da considerare, mentre $x^2-3x+1=0$ non ha soluzioni negative. Quindi il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Risulta

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp 1\,, \qquad \lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = \mp\infty\,;$$

dunque la retta $y=-1$ è un asintoto orizzontale destro, la retta $y=1$ è un asintoto orizzontale sinistro e la retta $x=x_0$ è un asintoto verticale completo.

b) Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(2-3x)}{(1-3x-x^2)^2} & x > 0\,,\ x \neq x_0 \\ \dfrac{x(2-3x)}{(1-3x+x^2)^2} & x < 0\,. \end{cases}$$

Allora $f'(x) = 0$ se $x = \frac{2}{3}$; $f'(x) > 0$ per $x \in (0, x_0) \cup (x_0, \frac{2}{3})$. Dunque, gli intervalli di monotonia di f sono: $(-\infty, 0)$, $(\frac{2}{3}, +\infty)$ dove la funzione è decrescente, $(0, x_0)$, $(x_0, \frac{2}{3})$ dove la funzione è crescente. La funzione ha un punto di minimo relativo in $x=0$ con $f(0)=0$ e un punto di massimo relativo in $x=\frac{2}{3}$ con $f(\frac{2}{3}) = -\frac{4}{13}$.

Inoltre, f è continua nell'origine, $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x) = 0$, e quindi la derivata prima nell'origine esiste e vale 0; la funzione risulta derivabile in tutto il suo dominio.

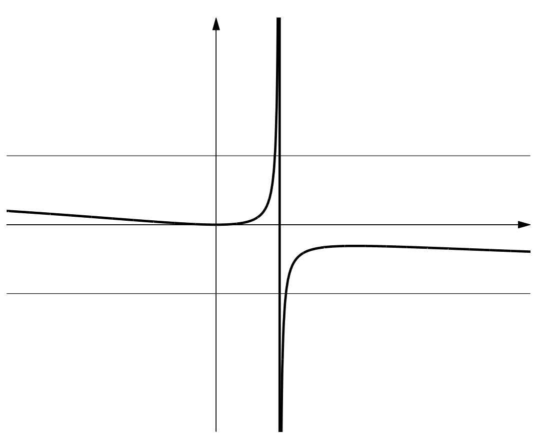

Figura 7: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2}{1-3x-x|x|}$

c) L'equazione $f(x) = -1$ ha una sola soluzione per $x = \frac{1}{3}$, come si può facilmente verificare imponendo l'equazione $\frac{x^2}{1-3x-x^2} = -1$.

d) Dal grafico, risulta im $f = (-\infty, -\frac{4}{13}] \cup [0, +\infty)$.

e) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 7.

20. a) Osserviamo che la funzione è pari, quindi la studieremo soltanto per $x > 0$. Si ha dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm e\}$ e

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to e^{\pm}} f(x) = \pm\infty\,, \qquad \lim_{x\to -e^{\pm}} f(x) = \mp\infty\,.$$

Le rette $x = e$ e $x = -e$ sono asintoti verticali completi; non vi sono asintoti obliqui.

b) Si ha

$$f'(x) = \frac{x(2\ln x - 3)}{(\ln x - 1)^2}\,, \qquad x > 0\,,$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = \pm e^{3/2}$; $f'(x) > 0$ per x negli intervalli $(-e^{3/2}, -e)$, $(-e, 0)$, $(e^{3/2}, +\infty)$ dove la funzione risulta crescente. Inoltre f è decrescente in $(-\infty, -e^{3/2})$, $(0, e)$, $(e, e^{3/2})$.
I punti $x = -e^{3/2}$ e $x = e^{3/2}$ sono punti di minimo relativo con ordinata $2e^3$.

c) Dal grafico si vede che im $f = (-\infty, 0) \cup [2e^3, +\infty)$.

d) Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 8.

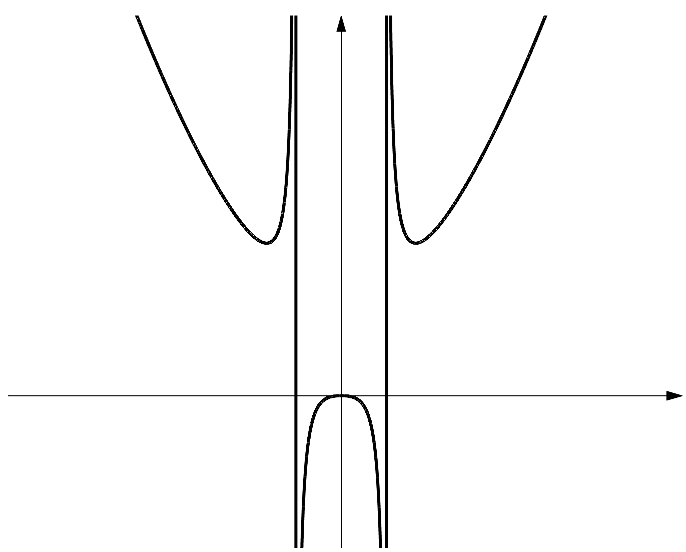

Figura 8: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2}{\ln|x|-1}$

e) Posto $f(0) = 0$, la funzione risulta continua e derivabile in $x = 0$, in quanto

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 0\,.$$

21. a) Non è difficile verificare che

$$\text{dom}\, f = \mathbb{R}\,, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty\,;$$

la funzione è crescente in $(-\infty, \frac{7}{4})$ e decrescente in $(\frac{7}{4}, +\infty)$, il punto $x = \frac{7}{4}$ è un punto di massimo assoluto con $f(\frac{7}{4}) = \frac{27}{256}$; f è convessa in $(1, \frac{3}{2})$, concava in $(-\infty, 1)$ e in $(\frac{3}{2}, +\infty)$, i punti $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ sono punti di flesso.
Il grafico qualitativo della funzione f è mostrato in Figura 9.

b) Possiamo scrivere

$$g_1(x) = (x-1)\sqrt[3]{2-x}\,, \qquad g_2(x) = |g_1(x)|\,.$$

La funzione g_1 ha un punto di massimo in $x = \frac{7}{4}$ e un punto di non derivabiltà in $x = 2$ (tangente verticale).
La funzione g_2 ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{7}{4}$ e due punti di minimo assoluto in $x = 1$ e $x = 2$. In tali punti di minimo risulta non derivabile.
I grafici delle funzioni g_1 e g_2 sono mostrati nelle Figure 10 e11.

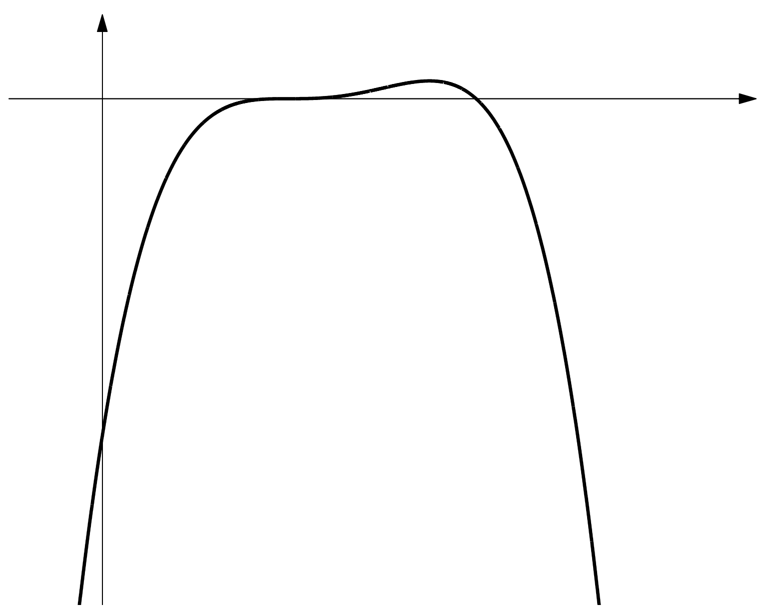

Figura 9: Grafico della funzione $f(x) = (x-1)^3(2-x)$

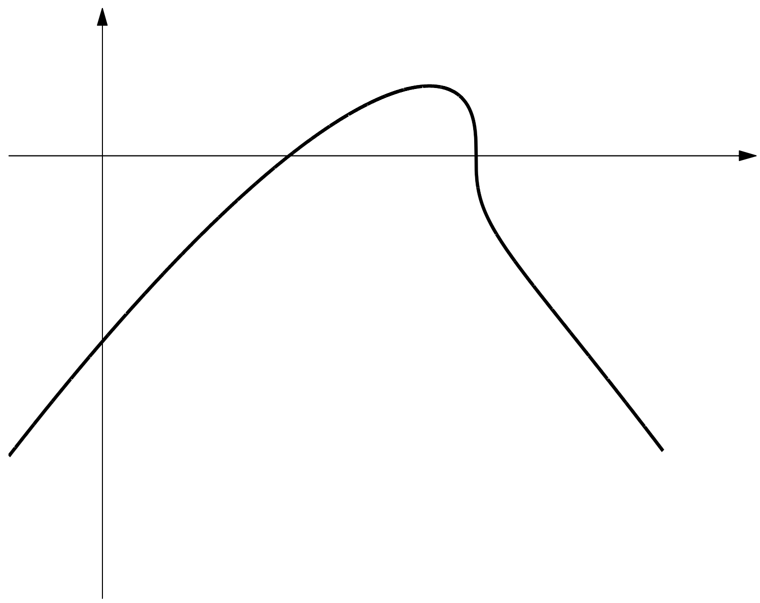

Figura 10: Grafico della funzione $g_1(x)$

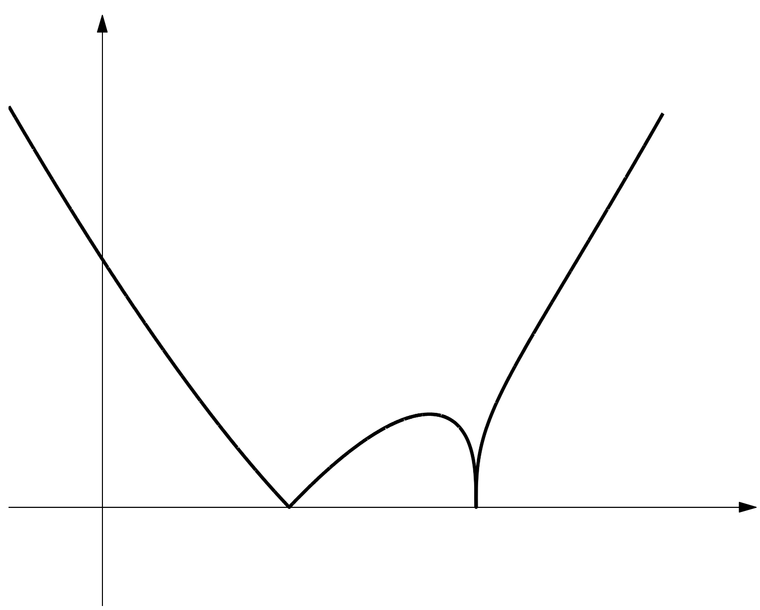

Figura 11: Grafico della funzione $g_2(x)$