# Esercizi proposti

1. Calcolare la derivata prima $f'(x)$ per le seguenti funzioni:

$$a)\quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \qquad x \qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{\arctan x}$$

$$c)\quad f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad d)\quad f(x) = \cos\left((x^2+x)^5\right)$$

$$e)\quad f(x) = \frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} \qquad f)\quad f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$$

2. Determinare i punti di non derivabilità delle funzioni

$$a)\ f(x) = |x^3 - x^2| \qquad b)\ f(x) = |x^3 - 2x^2 + x| \qquad c)\ f(x) = \sqrt[5]{x}$$

3. Studiare la derivabilità in $x = 0$ della funzione $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$.

4. Verificare che le funzioni

$$a)\ f(x) = e^{-1/x^2} \qquad b)\ f(x) = \frac{\arctan(x^4 - x^2)}{x}$$

sono prolungabili con continuità per $x = 0$. Le funzioni $f$ così prolungate risultano derivabili in $x = 0$?

5. Trovare $k > 0$ tale che i grafici delle funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = kx^2$ siano tangenti in un punto di ascissa $x_0 > 0$. Utilizzare questo risultato per determinare il numero di soluzioni dell'equazione $e^x = kx^2$ al variare di $k > 0$.

6. Dire se si può applicare il teorema di Rolle alla funzione $f(x) = \sqrt{3x - x^2 - 2}$ nel suo dominio $[a, b]$. In caso affermativo, determinare i punti $c$ tali che $f'(c) = 0$.

7. Dimostrare che la funzione $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ è costante sul suo dominio e determinarne il valore.

8. Studiare la funzione $f(x) = x^3 - x$ e disegnarne il grafico. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione $g(x) = |f(x) + k|$ è derivabile in $(0, +\infty)$.

9. Determinare massimo e minimo relativi ed assoluti di $f(x) = x^2 - 3|x-1| + 2$ su $[-2, 3]$.

10. Utilizzando la regola di de l'Hopital calcolare

$$a) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log\cos x} \qquad b) \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log\sin x}{\log x}$$

$$c) \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) \qquad d) \quad \lim_{x\to 1} (x-1)\tan\frac{\pi}{2}x$$

$$e) \quad \lim_{x\to +\infty} x\left(\arctan x - \arccos\frac{1}{x^2}\right) \qquad f) \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin\sqrt{x^2-1}}{\log(x+3\sqrt{x^2-1})}$$

$$g) \quad \lim_{x\to +\infty} x^3\left(\arctan x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) \qquad h) \quad \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

11. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $f(x) = 3x^2 - a\log x$. a) Tracciare un grafico qualitativo della funzione $f$, e determinare i valori di $a$ per i quali l'equazione $f(x) = 0$ ammette due soluzioni distinte. b) Determinare i valori di $a$ per i quali $f$ risulta invertibile su tutto il suo dominio. Per tali $a$ calcolare $(f^{-1})'(3)$.

12. Determinare dominio, asintoti, intervalli di monotonia, massimi e minimi, e disegnare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

$a) \quad f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$

$b) \quad f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$c) \quad f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$

13. Discutere dominio, asintoti, monotonia e tracciare un grafico qualitativo delle seguenti funzioni:

$a) \quad f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}$

$b) \quad f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1} - 2\arctan x$

$c) \quad f(x) = x\dfrac{2\log x - 3}{\log x - 2}$

## Soluzioni

1. a) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)' = \dfrac{2}{(2-x^2)^{3/2}}$

   b) $\left(\dfrac{1}{\arctan x}\right)' = -\dfrac{1}{(1+x^2)\arctan^2 x}$

   c) $\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]' = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \left[\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}\right]$

   d) $\left[\cos((x^2+x)^5)\right]' = -10x(x^2+x)^4 \sin((x^2+x)^5)$

   e) $\left(\dfrac{1}{x} + \sin\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$

   f) $\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right)' = -\dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}, \qquad \forall x \neq 0$

2. a) La funzione $f(x) = x^2|x-1|$ ha un punto angoloso in $x=1$, con $f'_\pm(1) = \pm 1$.

   b) La funzione $f(x) = |x(x-1)^2| = (x-1)^2|x|$ ha un punto angoloso in $x=0$, con $f'_\pm(0) = \pm 1$.

   c) La funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ha un punto a tangente verticale in $x=0$.

3. Calcolando le derivate laterali in $x=0$ si ottiene $f'_\pm(0) = \mp\frac{1}{2}$, quindi $f$ non è derivabile nello zero.

4. a) Si ha $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$. Posto $f(0)=0$, si ottiene che $f$ è derivabile nello zero con $f'(0)=0$, essendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to+\infty}\sqrt{t}\,e^{-t} = 0.$$

   b) Essendo $\arctan(t) = t + o(t)$ per $t \to 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4-x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x} = 0.$$

   Posto $f(0)=0$, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x^4-x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2+o(x^2)}{x^2} = 1.$$

   Quindi $f$ è derivabile in zero con $f'(0)=1$.

5. Imponendo le condizioni di tangenza tra $f(x)$ e $g(x)$ si trova il valore critico $k = \frac{e^2}{4}$. Graficamente si vede allora che l'equazione $e^x = kx^2$ ha 1 soluzione per $0 < k < \frac{e^2}{4}$, 2 soluzioni per $k = \frac{e^2}{4}$, 3 soluzioni per $k > \frac{e^2}{4}$.

6. La funzione $f(x)$ è definita per $x \in [1,2]$, è continua su $[1,2]$ e derivabile su $(1,2)$ (agli estremi ha tangente verticale). Inoltre si ha $f(1) = f(2) = 0$. Le ipotesi del Teorema di Rolle sono dunque soddisfatte. Essendo $f'(x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2-2}}$, si ottiene $c = 3/2$.

7. Si ha $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, per ogni $x$ nell'intervallo $(-1,1)$. Dunque $f$ è costante sull'intervallo $(-1,1)$ per un corollario del Teorema di Lagrange. Essendo continua in $[-1,1]$, $f$ è costante su tutto il suo dominio $[-1,1]$. Si calcola facilmente che $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

8. La funzione $f$ è dispari, tende a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, e ha un punto di massimo e un punto di minimo relativo rispettivamente in $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e in $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$). Disegnando la funzione $g(x) = |f(x) + k|$ per alcuni valori di $k$, ci si rende conto che affinché $g$ sia derivabile in $\mathbb{R}^+$ è necessario traslare la funzione $f(x)$ almeno di una quantità $k_0 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Otteniamo così $k \geq \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

9. La funzione $f$ ha minimo assoluto $m = -\frac{13}{4} = f(-\frac{3}{2})$, e massimo assoluto $M = 5 = f(3)$. Il punto $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3}{2}) = \frac{11}{4}$. I punti $x = 1$ e $x = -2$ sono punti di massimo relativo (il primo è un punto angoloso) con $f(1) = 3$, $f(-2) = -3$.

10. a) $-2$ b) $1$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{2}{\pi}$ e) $-1$ f) $\frac{1}{3}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $\mp\sqrt{2}$

11. a) $a > 6e$

    b) $a < 0$. Essendo $f(1) = 3$ si ha $(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6-a}$.

12. a) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, la funzione è dispari. Le rette $x = \pm 2$ sono asintoti verticali, la retta $y = x$ è asintoto obliquo completo. I punti $x = -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ sono punti di massimo relativo e i punti $x = -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}$ sono punti di minimo relativo, dove $t_1 = \frac{11+\sqrt{105}}{2}$, $t_2 = \frac{11-\sqrt{105}}{2}$. La funzione è crescente sugli intervalli

$$(-\infty, -\sqrt{t_1}), \quad (-\sqrt{t_2}, \sqrt{t_2}), \quad (\sqrt{t_1}, +\infty),$$

e decrescente sugli intervalli

$$(-\sqrt{t_1}, -2), \quad (-2, -\sqrt{t_2}), \quad (\sqrt{t_2}, 2), \quad (2, \sqrt{t_1}).$$

Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 1.

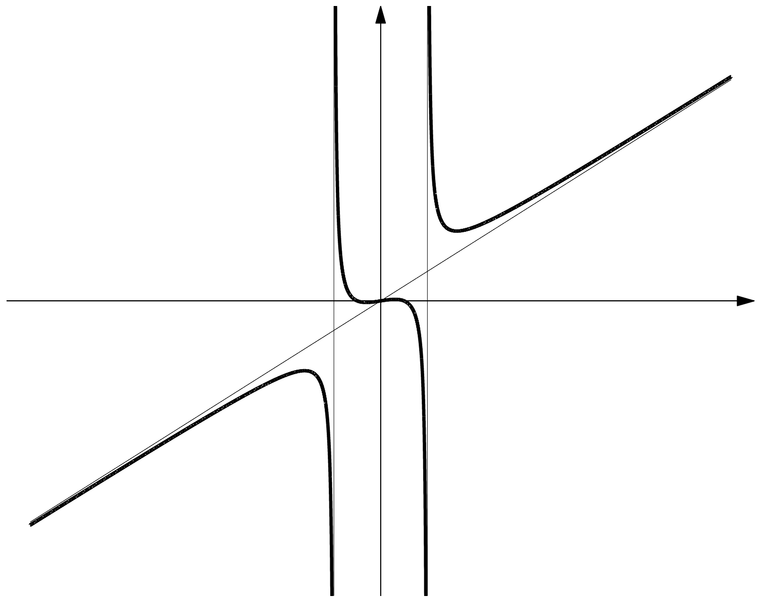

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-4}$

b) Si ha $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$. La retta $x = 0$ è asintoto verticale, la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale. La funzione ha un massimo relativo e assoluto nel punto $x = e$. La funzione è crescente sull'intervallo $(0, e)$, ed è decrescente sull'intervallo $(e, +\infty)$.
Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 2.

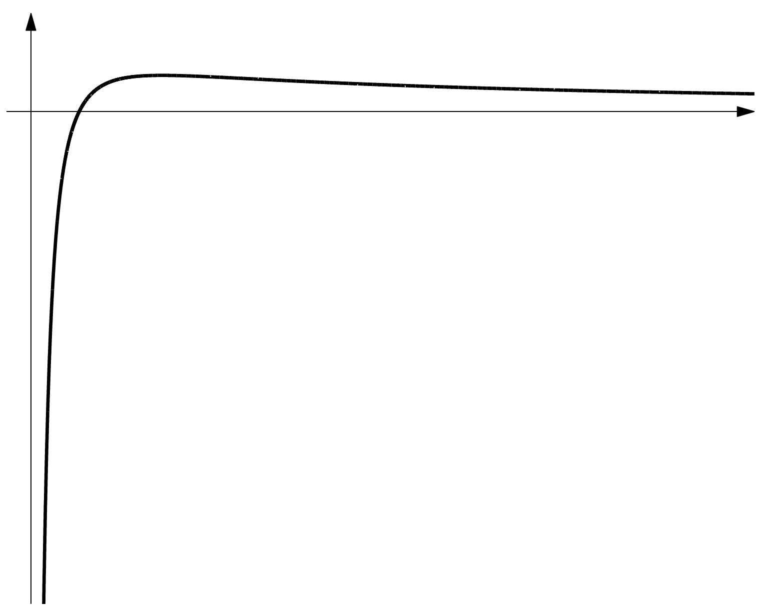

Figura 2: Grafico della funzione $f(x) = \frac{\log x}{x}$

c) Si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. La retta $y = 3x$ è asintoto obliquo destro, la retta $y = x$ è asintoto obliquo sinistro. Il punto $x = -\sqrt{4/3}$ è un punto di massimo relativo; i punti $x = \pm 1$ sono punti di minimo relativo. La funzione è crescente sugli intervalli

$$(-\infty, -\sqrt{4/3}), \quad (1, +\infty),$$

decrescente sull'intervallo

$$(-\sqrt{4/3}, -1).$$

Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 3.

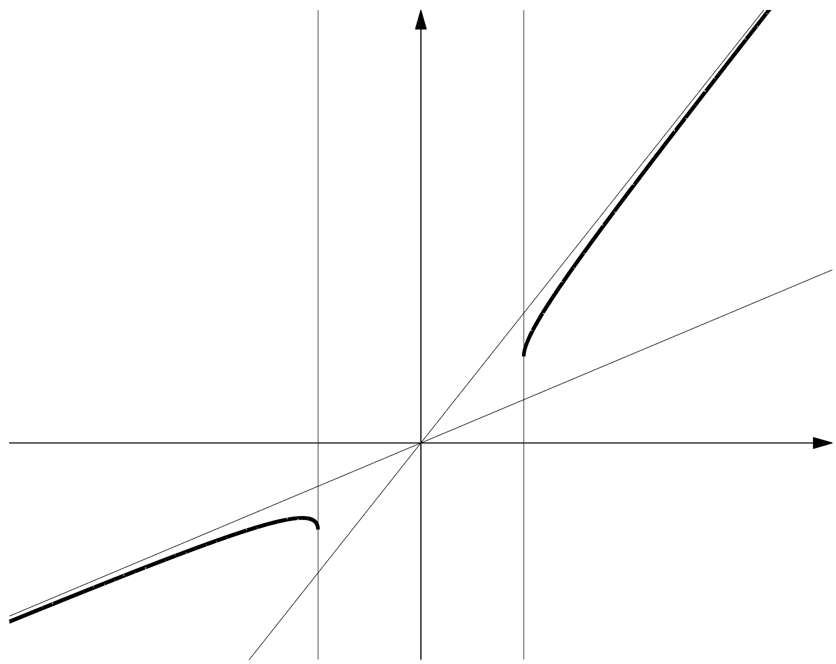

Figura 3: Grafico della funzione $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$

13. a) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, la funzione è pari. La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale. I punti $x = \pm(1 + \sqrt{5})$ sono punti di massimo relativo e assoluto, il punto $x = 0$ è un punto angoloso di minimo relativo e assoluto. La funzione è crescente sugli intervalli

$$(-\infty, -1 - \sqrt{5}), \quad (0, 1 + \sqrt{5}),$$

decrescente sugli intervalli

$$(-1 - \sqrt{5}, 0), \quad (1 + \sqrt{5}, +\infty).$$

Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 4.

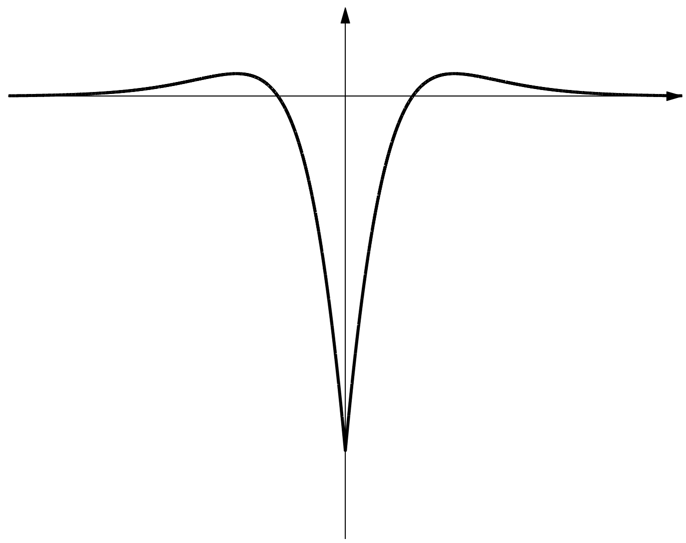

Figura 4: Grafico della funzione $f(x) = (x^2 - 4)e^{-|x|}$

b) Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La retta $x = -1$ è asintoto verticale, la retta $y = 3 - \pi$ è asintoto orizzontale destro, la retta $y = 3 + \pi$ è asintoto orizzontale sinistro. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo. La funzione è decrescente sull'intervallo $(0, +\infty)$, crescente sugli intervalli

$$(-\infty, 1), \quad (1, 0).$$

Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 5.

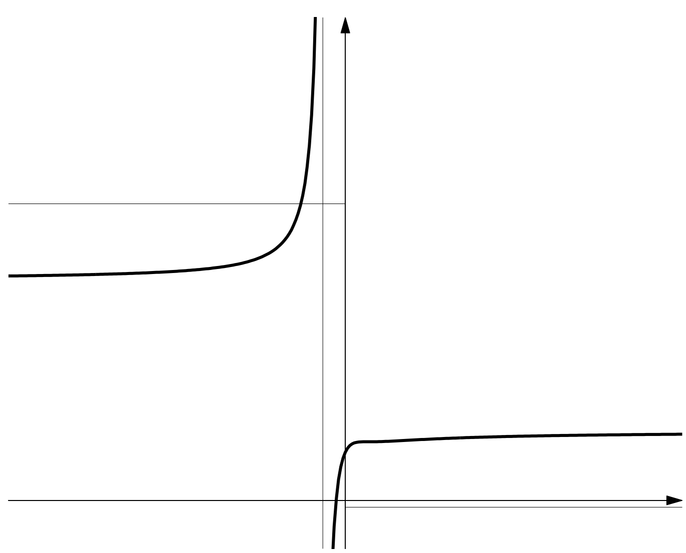

Figura 5: Grafico della funzione $f(x) = \frac{3x+1}{x+1} - 2\arctan x$ (si noti che il grafico di $f$ incontra l'asse delle $x$ per $x$ grande e questo non è evidenziato nella figura)

 

c) Si ha $\operatorname{dom} f = (0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, quindi $f$ si può prolungare per continuità nello zero ponendo $f(0) = 0$. La retta $x = e^2$ è asintoto verticale. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = +\infty,$$

quindi non c'è asintoto obliquo. Il punto $x = e$ è un punto di massimo relativo, i punti $x = 0$ e $x = e^{5/2}$ sono punti di minimo relativo. La funzione è crescente sugli intervalli

$$(0, e)\,, \quad (e^{5/2}, +\infty)\,,$$

decrescente sugli intervalli

$$(e, e^2)\,, \quad (e^2, e^{5/2})\,.$$

Il grafico qualitativo della funzione $f$ è mostrato in Figura 6.

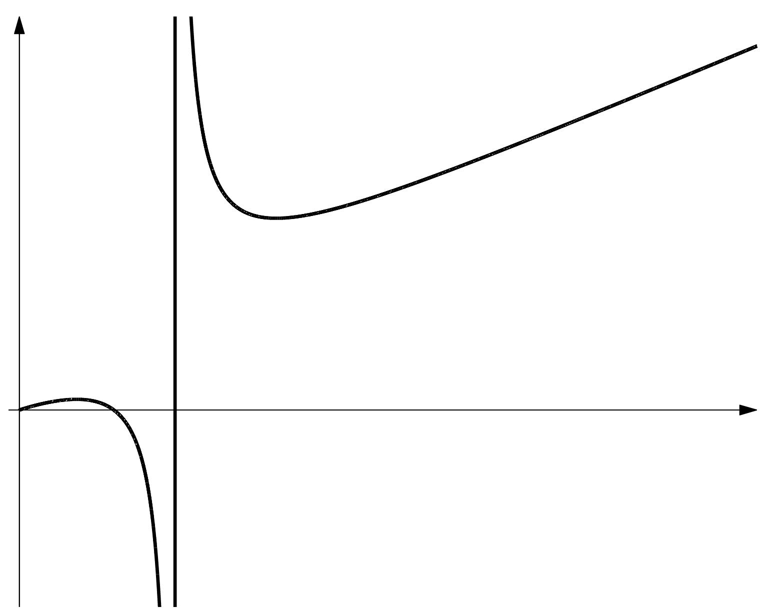

Figura 6: Grafico della funzione $f(x) = x\frac{2\log x - 3}{\log x - 2}$