

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x^2+2x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3\sin 2x}{x-2\sin 3x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - \tan(2x^3)}{2x^5 + 5\sin^3 x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^3 + \sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^x - 3^x}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{5^x - 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x^3} - x^6}{4x^6 - \sqrt{x^4 + x^3}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \right)$$

$$\ell) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \log^3 x + x \log^7 x}{1+x^3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log^5 x + \sqrt[4]{x} \log x}{\sqrt{x}}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e+x) - 1}{x}$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{4+x} - 1 \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$$

2. Verificare che $f(x) = \sqrt{x+5} - \sqrt{5}$ e $g(x) = \sqrt{x+7} - \sqrt{7}$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \rightarrow 0$ e determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che $g(x) \sim k f(x)$.

3. Confrontare tra loro gli infinitesimi $x-2$, $\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$, $(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$ per $x \rightarrow 2$.

4. Calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x) = kx^\alpha$ rispetto

all'infinitesimo campione x per $x \rightarrow 0$ delle seguenti funzioni:

a) $e^{3x^4} - 1$

b) $e^{\sqrt{x^2+1}} - e$

c) $\frac{1 - \cos x}{\sqrt{x} + x^2}$

d) $\log(\cos x)$

e) $\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$

f) $e^{e^x} - e^{\cos x}$

g) $\log(x+3) - \log 3$

h) $\sin(2x^2) \left(\sqrt{1+3x} - 1 \right)$

i) $\sqrt{1 - \cos(x^2)}$

l) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$

m) $\frac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

n) $x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2}$

o) $\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right)$

p) $\frac{1 + \sin x}{1 - x} - 1$

q) $\frac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x} - 1$

r) $\log\left(\sqrt{9+x} - 2\right)$

5. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x) = \frac{k}{x^\alpha}$ rispetto all'infinitesimo campione $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

a) $\frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{x^3}$

b) $\arctan \frac{3}{x^2}$

c) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

d) $\sqrt{\frac{x-3}{x}} - 1$

e) $e^{\frac{x+1}{x}} - e$

f) $\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$

6. Determinare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $p(x) = k(x - x_0)^\alpha$ rispetto all'infinitesimo campione $x - x_0$ per x che tende al valore x_0 indicato delle seguenti funzioni:

a) $\log x - \log 2, \quad x \rightarrow 2$

b) $e^x - e, \quad x \rightarrow 1$

c) $1 - \sin x, \quad x \rightarrow \pi/2$

d) $1 + \cos(x^2), \quad x \rightarrow \sqrt{\pi}$

7. Determinare l'ordine di infinito α e la parte principale $p(x) = kx^\alpha$ rispetto all'infinito campione x per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$a) \frac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} \qquad b) \sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x}$$

8. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - (x+1)|x-2|}{2x+3} \qquad b) f(x) = |x|e^{\frac{x+1}{x}}$$

9. Determinare, per $x \rightarrow +\infty$, l'asintoto di

$$f(x) = \log(e^x + x).$$

Ha senso cercare l'asintoto per $x \rightarrow -\infty$?

10. Confrontare fra loro i seguenti infiniti per $x \rightarrow +\infty$ mettendoli in ordine crescente di infinito:

$$2^x, x^x, \frac{x^2}{\log^{100} x}, x \log^{10} x, 2^{5x}, x^2, 2^x \log x, x^2 2^x$$

11. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n + 1} \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2 + 1}} \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n} \\ g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1} \right)^n & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2} \\ i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)^n}{n^{2n}} & \ell) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} \\ m) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)^n & n) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \log n} \\ o) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 2^{-\sqrt{n}} & p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n \right) \end{array}$$

12. Verificare che per $n \rightarrow \infty$

$$a) \quad \frac{(n+3)! - n!}{(n+1)!} \sim n^2 \qquad b) \quad \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

13. Calcolare la parte principale per $n \rightarrow \infty$ di

$$a) \quad \binom{2n-1}{3} \qquad b) \quad \frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n \log n}{5n + \log n}$$

14. Dimostrare che 3^n è un infinito di ordine inferiore a $n!$ per $n \rightarrow \infty$.

Svolgimento

1. Si ha

a) Ricordando che $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+3x)}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{3}{2}.$$

b) Si ha $\sin t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, quindi

$$\begin{aligned} x^2 + 3 \sin 2x &= x^2 + 6x + o(x) = 6x + o(x) \\ x - 2 \sin 3x &= x - 6x + o(x) = -5x + o(x) \end{aligned}$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3 \sin 2x}{x - 2 \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + o(x)}{-5x + o(x)} = -\frac{6}{5}.$$

c) Essendo $\tan t = t + o(t)$, $t \rightarrow 0$, e $\sin x = x + o(x)$, $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} x^2 - \tan(2x^3) &= x^2 - 2x^3 + o(x^3) = x^2 + o(x^2) \\ 2x^5 + 5 \sin^3 x &= 2x^5 + 5x^3 + o(x^3) = 5x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - \tan(2x^3)}{2x^5 + 5 \sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 + o(x^2)}{5x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{5x} = \pm\infty.$$

d) Utilizzando lo sviluppo $e^t = 1 + t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{x^2}}{x^3 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + x^2 + o(x^2))}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} = 0.$$

e) Ricordando lo sviluppo $a^x = 1 + x \log a + o(x)$ per $x \rightarrow 0$, con $a = \pi$ e $a = 3$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \log \pi - 1 - x \log 3 + o(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\log \pi - \log 3) + o(x)}{x} = \log \pi - \log 3 = \log \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

f) Ricordando che $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, e $5^x = 1 + x \log 5 + o(x)$, $x \rightarrow 0$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}4x + o(x) - 1}{1 + x \log 5 + o(x) - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x \log 5 + o(x)} = \frac{2}{\log 5}.$$

g) Notiamo che $\sqrt{x^4 + x^3} = x^{3/2}\sqrt{1+x} = x^{3/2} + o(x^{3/2})$ per $x \rightarrow 0^+$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x^3} - x^6}{4x^6 - \sqrt{x^4 + x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2}x^{3/2} + o(x^{3/2})}{-x^{3/2} + o(x^{3/2})} = -\sqrt{2}.$$

h) Raccogliendo il termine $\sqrt[3]{1-x}$ e ricordando lo sviluppo $\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{1}{3}t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-x} \frac{\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2x}{1-x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \frac{2x}{1-x} \frac{1}{x} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

i) Procedendo come nell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \sqrt[3]{x-1} \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/6} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x-1}} - 1 \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{5/6} \frac{1}{3} \frac{2}{x-1} = 0. \end{aligned}$$

ℓ) Ricordiamo che per $x \rightarrow +\infty$ la funzione a^x con $a > 1$ è un infinito di ordine superiore a x^α , qualunque sia $\alpha > 0$. Si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^x} = 0.$$

Analogamente per $x \rightarrow -\infty$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(2^x - 2^{-x})}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 2^{-x}}{3^{-x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^t} = 0.$$

m) Per $x \rightarrow +\infty$ la funzione $(\log x)^\alpha$ è un infinito di ordine inferiore a x^β $\forall \alpha, \beta > 0$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \log^3 x + x \log^7 x}{1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \log^3 x}{x^3} \frac{1 + \frac{\log^4 x}{x}}{1 + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^3 x}{x} = 0.$$

n) Ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0$, per ogni $\alpha, \beta > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log^5 x + \sqrt[4]{x} \log x}{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \log^5 x + \frac{\log x}{x^{1/4}} \right) \\ &= 0 + (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

o) Si ha $\cos \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \rightarrow +\infty$, e $\log(1+t) = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, dunque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \log \cos \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \log \left(1 - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \left(-\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}) \right)} = e^{-1/2}. \end{aligned}$$

p) Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log \sqrt{1+x}}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{2} \frac{\log(1+x)}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x+o(x)}{2x+o(x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x)}{2x+o(x)}} = e^{1/2}. \end{aligned}$$

q) Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + o(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x) \right)}{x + o(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{2}x + o(x)}{x + o(x)} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

r) Essendo $3^x = 1 + x \log 3 + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ e $\sin t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sin(\pi 3^x) &= \sin(\pi + \pi x \log 3 + o(x)) = -\sin(\pi x \log 3 + o(x)) \\ &= -\pi x \log 3 + o(x), \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x} = -\pi \log 3.$$

s) Essendo $\tan^3 x = (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, abbiamo

$$e^{\tan^3 x} - 1 = e^{x^3 + o(x^3)} - 1 = 1 + x^3 + o(x^3) - 1 = x^3 + o(x^3)$$

$$x(\cos x - e^{x^2}) = x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - (1 + x^2 + o(x^2)) \right) = -\frac{3}{2}x^3 + o(x^3).$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan^3 x} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{3}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

t) Notiamo che

$$\begin{aligned} \log(e+x) - 1 &= \log e \left(1 + \frac{x}{e}\right) - 1 = \log e + \log \left(1 + \frac{x}{e}\right) - 1 \\ &= \log \left(1 + \frac{x}{e}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(e+x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(1 + \frac{x}{e}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e} + o(x)}{x} = \frac{1}{e}.$$

u) Usiamo gli sviluppi $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \rightarrow 0$ e $\sin t = t + o(t)$ per $t \rightarrow 0$, e l'identità $\sin(\pi - t) = \sin t$. Risulta

$$\begin{aligned} \sin(\pi \cos x) &= \sin \left(\pi - \pi \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \sin \left(\pi \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \pi \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ x \sin x &= x(x + o(x)) = x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{\pi}{2}.$$

v) Osserviamo che

$$\left(\sqrt{4+x} - 1\right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = e^{\frac{\log(\sqrt{4+x} - 1)}{e^x - 1}}.$$

Ma,

$$\sqrt{4+x} - 1 = 2\sqrt{1 + \frac{x}{4}} - 1 = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{x}{4} + o(x)\right) - 1 = 1 + \frac{x}{4} + o(x),$$

da cui

$$\frac{\log(\sqrt{4+x} - 1)}{e^x - 1} = \frac{\log \left(1 + \frac{x}{4} + o(x)\right)}{1 + x + o(x) - 1} = \frac{\frac{x}{4} + o(x)}{x + o(x)}.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{4+x} - 1\right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{x}{4} + o(x)}{x + o(x)}} = e^{1/4}.$$

2. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+7} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} (\sqrt{x+5} + \sqrt{5})}{\cancel{x} (\sqrt{x+7} + \sqrt{7})} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}},$$

quindi $g(x) \sim \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} f(x)$, $x \rightarrow 0$.

3. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})^2 (x - 2)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{1/3}} = -\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^{2/3} (2x)^{1/3} = 0.$$

Quindi $(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$ è un infinitesimo di ordine superiore a $x - 2$, e $x - 2$ è un infinitesimo di ordine superiore a per $\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$ per $x \rightarrow 2$. Possiamo anche calcolare l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x - 2)^\alpha$ per $x \rightarrow 2$ rispetto a $x - 2$ (l'infinitesimo campione di ordine 1). Infatti si ha

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} = \left(\frac{2-x}{2x}\right)^{\frac{1}{3}} \sim -\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}, \quad x \rightarrow 2,$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2 = \left(\frac{x-2}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}\right)^2 \sim \frac{(x-2)^2}{8}, \quad x \rightarrow 2,$$

e quindi $\sqrt[3]{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$ ha ordine $\frac{1}{3}$ e parte principale $-\frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}$, e $(\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$ ha ordine 2 e parte principale $\frac{(x-2)^2}{8}$.

4. a) Ricordando che $e^t - 1 \sim t$ ($t \rightarrow 0$) abbiamo

$$e^{3x^4} - 1 \sim 3x^4, \quad x \rightarrow 0,$$

quindi $\alpha = 4$ e $p(x) = 3x^4$.

b) Si ha

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{x^2+1}} - e &= e^{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - e = e \left(e^{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} - 1 \right) \\ &= e \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) \sim \frac{e}{2}x^2, \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dunque $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{e}{2}x^2$.

c) Risulta

$$\frac{1 - \cos x}{\sqrt{x} + x^2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})} \sim \frac{1}{2}x^{3/2}, \quad x \rightarrow 0;$$

pertanto $\alpha = 3/2$ e $p(x) = \frac{1}{2}x^{3/2}$.

d) Essendo $\log(1+t) = t + o(t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$), si ha

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim -\frac{1}{2}x^2, \quad x \rightarrow 0;$$

quindi $\alpha = 2$ e $p(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

e) Notiamo che $\sqrt[3]{x+x^2} \sim \sqrt[3]{x}$ ($x \rightarrow 0$), ma questo non ci permette di concludere che $\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$ è equivalente a x^2 per $x \rightarrow 0$. Infatti ricordando che $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x) \sim \alpha x$ ($x \rightarrow 0$), si ha

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x+x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2 &= \sqrt[3]{x} \left((1+x)^{1/3} - 1 \right) + x^2 = \sqrt[3]{x} \left(\frac{1}{3}x + o(x) \right) + x^2 \\ &= \frac{1}{3}x^{4/3} + o(x^{4/3}) \sim \frac{1}{3}x^{4/3}, \quad x \rightarrow 0;\end{aligned}$$

dunque $\alpha = 4/3$ e $p(x) = \frac{1}{3}x^{4/3}$.

f) Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\begin{aligned}e^{e^x} - e^{\cos x} &= e^{1+x+o(x)} - e^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e \left(e^{x+o(x)} - e^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} \right) \\ &= e \left(x + o(x) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) = ex + o(x) \sim ex;\end{aligned}$$

pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = ex$.

g) Si ha

$$\log(x+3) - \log 3 = \log \frac{x+3}{3} = \log \left(1 + \frac{x}{3} \right) \sim \frac{x}{3}, \quad x \rightarrow 0,$$

quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{3}$.

h) Essendo $\sin(2x^2) \sim 2x^2$ e $\sqrt{1+3x} - 1 \sim \frac{3}{2}x$ ($x \rightarrow 0$), si ha

$$\sin(2x^2) \left(\sqrt{1+3x} - 1 \right) \sim 3x^3, \quad x \rightarrow 0,$$

pertanto $\alpha = 3$ e $p(x) = 3x^3$.

i) Essendo $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$ ($t \rightarrow 0$), si ha

$$\sqrt{1 - \cos(x^2)} = (1 - \cos(x^2))^{1/2} \sim \left(\frac{1}{2}x^4 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2, \quad x \rightarrow 0;$$

pertanto $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$.

ℓ) Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x) \right) = x + o(x) \sim x,$$

e quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = x$.

m) Per $x \rightarrow 0$ si ha $\sin x = x + o(x)$ e quindi

$$\frac{\sin x + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} = \frac{2x^{1/3} + o(x^{1/3})}{x^{1/5} + o(x^{1/5})} \sim \frac{2x^{1/3}}{x^{1/5}} = 2x^{2/15}.$$

In definitiva $\alpha = 2/15$ e $p(x) = 2x^{2/15}$.

n) La funzione $\sin(2x^3) \sim 2x^3$ ($x \rightarrow 0$) è un infinitesimo di ordine 3, mentre $1 - e^{-x^2} \sim x^2$ ($x \rightarrow 0$) ha ordine 2, quindi

$$x^2 + \sin(2x^3) + 1 - e^{-x^2} = 2x^2 + o(x^2) \sim 2x^2 \quad (x \rightarrow 0).$$

In conclusione $\alpha = 2$ e $p(x) = 2x^2$.

o) Utilizzando l'identità $\sin(\pi + t) = -\sin t$ abbiamo per $x \rightarrow 0$

$$\sin\left(\pi\sqrt{1+x}\right) \sin\left(\pi + \pi\frac{x}{2} + o(x)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}x + o(x)\right) \sim \frac{\pi}{2}x.$$

Pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{\pi}{2}x$.

p) Ricordiamo che $\frac{1}{1+t} = 1 - t + o(t)$ ($t \rightarrow 0$), quindi si ha

$$\begin{aligned} (1 + \sin x) \frac{1}{1-x} - 1 &= (1 + x + o(x))(1 + x + o(x)) \\ &= 2x + o(x) \sim 2x, \quad x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = 2x$.

Possiamo anche procedere calcolando prima il denominatore comune:

$$\frac{1 + \sin x}{1-x} - 1 = \frac{\sin x + x}{1-x} = \frac{2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim 2x, \quad x \rightarrow 0.$$

q) Risulta

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x} - 1 &= \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1 - 2x}{1+2x} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) - 2x}{1+2x} \\ &= \frac{-2x + o(x)}{1 + o(1)} \sim -2x, \quad x \rightarrow 0; \end{aligned}$$

quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = -2x$.

r) Notiamo che

$$\begin{aligned} \sqrt{9+x} - 2 &= 3\sqrt{1 + \frac{x}{9}} - 2 = 3\left(1 + \frac{x}{18} + o(x)\right) - 2 \\ &= 1 + \frac{x}{6} + o(x), \quad x \rightarrow 0, \end{aligned}$$

e quindi

$$\log(\sqrt{9+x} - 2) = \log\left(1 + \frac{x}{6} + o(x)\right) = \frac{x}{6} + o(x) \sim \frac{x}{6}, \quad x \rightarrow 0.$$

Pertanto $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{6}$.

5. a) Si ha

$$\frac{2x^2 + \sqrt[3]{x}}{x^3} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^{8/3}} = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

essendo $\frac{1}{x^{8/3}}$ un infinitesimo di ordine superiore a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$. Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{2}{x}$.

b) Essendo $\arctan t \sim t$ ($t \rightarrow 0$), si ha

$$\arctan \frac{3}{x^2} \sim \frac{3}{x^2}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

quindi $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{3}{x^2}$.

c) Notiamo che $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ ($x \rightarrow +\infty$), ma ciò non ci consente di dire che la funzione $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ è equivalente a $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$. Infatti per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

e quindi essendo $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ per $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pertanto $\alpha = \frac{1}{2}$ e $p(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Essendo $\sqrt{1+t} - 1 \sim \frac{1}{2}t$ ($t \rightarrow 0$), si ha

$$\sqrt{\frac{x-3}{x}} - 1 = \sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1 \sim -\frac{3}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty;$$

dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = -\frac{3}{2x}$.

e) Essendo $e^t - 1 \sim t$ ($t \rightarrow 0$), si ha

$$e^{\frac{x+1}{x}} - e = e^{1+\frac{1}{x}} - e = e\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \sim \frac{e}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

In conclusione $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{e}{x}$.

f) Si ha $\log(1+t) \sim t$ ($t \rightarrow 0$), quindi

$$\log\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \sim \frac{2}{x+1} \sim \frac{2}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

In definitiva $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{2}{x}$.

6. a) Posto $x - 2 = t$, quando x tende a 2, t tende a 0, e quindi

$$\log x - \log 2 = \log \frac{2+t}{2} = \log\left(1 + \frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2} = \frac{1}{2}(x-2), \quad x \rightarrow 2.$$

Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{1}{2}(x-2)$.

b) Posto $x - 1 = t$, si osservi che per $x \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$; dunque si ha

$$e^x - e = e(e^{x-1} - 1) = e(e^t - 1) \sim et = e(x-1), \quad x \rightarrow 1.$$

Quindi $\alpha = 1$ e $p(x) = e(x-1)$.

c) Posto $x - \pi/2 = t$, si osservi che per $x \rightarrow \pi/2$, $t \rightarrow 0$; quindi si ha

$$1 - \sin x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = 1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2, \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2};$$

pertanto $\alpha = 2$ e $p(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$.

d) Poniamo $x - \sqrt{\pi} = t$. Ricordando che $1 - \cos z \sim \frac{1}{2}z^2$ ($z \rightarrow 0$), si ha per $x \rightarrow \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} 1 + \cos(x^2) &= 1 + \cos(\sqrt{\pi} + t)^2 = 1 + \cos(\pi + 2\sqrt{\pi}t + t^2) \\ &= 1 - \cos(2\sqrt{\pi}t + t^2) \sim \frac{1}{2}(2\sqrt{\pi}t)^2 = 2\pi(x - \sqrt{\pi})^2. \end{aligned}$$

In conclusione $\alpha = 2$ e $p(x) = 2\pi(x - \sqrt{\pi})^2$.

7. a) Per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\frac{x^{3/2} + 5x^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \frac{5x^2 + o(x^2)}{x^{1/2} + o(x^{1/2})} \sim \frac{5x^2}{x^{1/2}} = 5x^{3/2}.$$

Pertanto $\alpha = \frac{3}{2}$ e $p(x) = 5x^{3/2}$.

b) Notiamo che per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{x}{2} + o(x),$$

e quindi essendo $\sqrt{x} = o(x)$ ($x \rightarrow +\infty$), sarà

$$\sqrt{x^4 + x^3} - x^2 + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) + \sqrt{x} = \frac{x}{2} + o(x) \sim \frac{x}{2}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Dunque $\alpha = 1$ e $p(x) = \frac{x}{2}$.

8. a) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2x+3} & \text{se } x \geq 2 \\ \frac{2x^2 - x - 2}{2x+3} & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

dunque $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^\pm} \frac{2x^2 - x - 2}{2x + 3} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty,$$

la retta $x = -\frac{3}{2}$ è asintoto verticale per f . Essendo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1/2$, la retta $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale destro per f . Infine si verifica facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = -2,$$

e quindi la retta $y = x - 2$ è asintoto obliquo sinistro per f .

b) Si ha $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. I limiti laterali per $x \rightarrow 0^\pm$ valgono

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1+\frac{1}{x}} = e \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = e \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -e \lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = (-e) \cdot 0 \cdot e^{-\infty} = 0,$$

quindi la retta $x = 0$ è asintoto verticale (destro) per f . Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x| e^{1+\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1+\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ex) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ex \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = e \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = e,$$

e la retta $y = ex + e$ è asintoto obliquo destro per f . In modo analogo si verifica che la retta $y = -ex - e$ è asintoto obliquo sinistro per f .

9. Notando che

$$\log(e^x + x) = \log\left(e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)\right) = x + \log\left(1 + \frac{x}{e^x}\right),$$

si verifica facilmente che la retta $y = x$ è asintoto obliquo destro per f .

Non ha senso cercare l'asintoto per $x \rightarrow -\infty$ in quanto la funzione è definita su $(x_0, +\infty)$, per un certo $x_0 < 0$.

10. In ordine crescente di infinito per $x \rightarrow +\infty$ si ha

$$x \log^{10} x, \frac{x^2}{\log^{100} x}, x^2, 2^x, 2^x \log x, 2^x x^2, x^x, 2^{5^x}.$$

Per verificare che 2^{5^x} è infinito di ordine superiore a x^x osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{5^x}}{x^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{5^x \log 2}}{e^{x \log x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5^x \log 2 - x \log x} = e^{+\infty} = +\infty.$$

11. a) Il limite vale zero perché la successione $(-1)^n$ è limitata mentre $\frac{n}{n^2+1}$ è infinitesima.

b) Il limite non esiste perché la successione dei termini di indice pari tende a $+\infty$, mentre quella dei termini di indice dispari tende a $-\infty$. Notiamo che non è sufficiente dire che “ $(-1)^n$ è oscillante e $\frac{n^2+1}{n+1}$ tende a $+\infty$ ” per concludere che il limite non esiste. Per esempio la successione $a_n = ((-1)^n + 5)n$ tende a $+\infty$ perché $a_n \geq 4n \forall n$, pur essendo il prodotto di una successione oscillante per una successione infinita.

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 3.$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{2}}{(\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{3 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

e)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(3^n - 3^{-n})}{4^n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 3^n (1 - 3^{-2n})}{4^n (1 + \frac{n^2}{4^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(4/3)^n} = 0.$$

f)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + \log n + 3^n}{2^n + n^4 + \log^5 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n (1 + \frac{n^6}{3^n} + \frac{\log n}{3^n})}{2^n (1 + \frac{n^4}{2^n} + \frac{\log^5 n}{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

g)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{2n}{n+1}} = e^2.$$

h) Poiché $1/e < 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \right]^n = (e^{-1})^{+\infty} = 0.$$

i)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

ℓ) Si ha

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{\log[n(1 + \frac{1}{n})]}{\log n} = \frac{\log n + \log(1 + \frac{1}{n})}{\log n},$$

e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\log n} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = 1.$$

m)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{3} - 1 \right)^n = 0^{+\infty} = 0.$$

n) È facile verificare che per ogni $n \geq 3$ vale $1 \leq \log n \leq n$. Moltiplicando per n abbiamo che $n \leq n \log n \leq n^2$, e dunque

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n \log n} \leq (\sqrt[n]{n})^2, \quad \forall n \geq 3.$$

Ricordando che $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \log n} = 1.$$

o) Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 2^{-\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2 \log n - \sqrt{n} \log 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n}(-\log 2 + 2 \frac{\log n}{\sqrt{n}})} = e^{-\infty} = 0.$$

p) Si ha

$$n^{\sqrt{n}} - 2^n = e^{\sqrt{n} \log n} - e^{n \log 2} = -e^{n \log 2} \left(1 - e^{\sqrt{n} \log n - n \log 2} \right).$$

Ma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n} \log n - n \log 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(-\log 2 + \frac{\log n}{\sqrt{n}})} = e^{-\infty} = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\sqrt{n}} - 2^n \right) = - \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \log 2} = -\infty.$$

$$12. \text{ a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1) - 1}{n^2(n+1)} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right] = \log e = 1. \end{aligned}$$

13. a) Si ha

$$\binom{2n-1}{3} = \frac{(2n-1)!}{3!(2n-4)!} = \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{6} \sim \frac{4}{3}n^3,$$

quindi la parte principale è $\frac{4}{3}n^3$.

b) Si ha

$$\frac{\sqrt{n} - 2n^3 + n \log n}{5n + \log n} = -\frac{2n^3}{5n} \frac{1 - \frac{\sqrt{n}}{2n^3} - \frac{\log n}{2n^2}}{1 + \frac{\log n}{5n}} \sim -\frac{2}{5}n^2,$$

dunque la parte principale è $-\frac{2}{5}n^2$.

14. Scrivendo per esteso $3^n/n!$ possiamo effettuare la seguente maggiorazione:

$$0 < \frac{3^n}{n!} = \frac{3 \cdot 3 \cdots 3}{1 \cdot 2 \cdots n} = 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{3}{n-1} \cdot \frac{3}{n} \leq 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{2n}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e applicando il teorema del doppio confronto otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$