

## Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2})^x - 1}{2x + \sin x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \log^3 x - e^x}{3e^{-x} + 5e^x - x^{10}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10-x} - 2}{x-2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{2+x^3} - \sqrt[3]{1+2x^2+x^3} \right)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\log^2 x \sin x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \sin(e^{-x} \sin x)}{x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 3^x + 2^x}{x^4 4^x + 3^x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x + 1} \right)^{x+3}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \tan^4 x)}{e^{2 \sin^4 x} - 1}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left( \frac{x+3}{x} \right)$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} (3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x}$$

$$r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \log \left( e + \frac{1}{x} \right) \right]^x$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^{\frac{1}{\log x}}$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \sqrt{9 + \sin(2^x - 1)} - 3 \right)$$

$$u) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\sqrt{\cos x}}$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \sqrt{x^2 - 1}}{\log(x + 3\sqrt{x^2 - 1})}$$

2. Verificare che  $f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$  e  $g(x) = x - 1$  sono infiniti dello stesso ordine per  $x \rightarrow +\infty$  e determinare  $k \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) \sim k g(x)$ .

3. Confrontare tra loro gli infiniti  $x^3$  e  $\sqrt[3]{x^8 - 7x^2}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

4. a) Verificare che se  $f(x)$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ , allora  $\sin f(x) \sim f(x)$ .

b) Dedurre che  $\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x)$  è infinitesima dello stesso ordine di  $\frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$ .

5. Calcolare l'ordine di infinitesimo  $\alpha$  e la parte principale  $kx^\alpha$  rispetto all'infinitesimo campione  $x$  per  $x \rightarrow 0$  delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) & e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \\
 b) & 1 - \cos^3(2x) \\
 c) & \log(1 + \tan^3 x) \\
 d) & \sqrt{4 - 3x^2} - 2 \\
 e) & \sqrt{\cos x} - 1 \\
 f) & \sqrt[n]{1+x} - \sqrt[n]{1-x} \\
 g) & \frac{x^{3/2} + 5x^2}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \\
 h) & \sqrt[3]{1 + 2\sin^2 x} - \cos x \\
 i) & \frac{\cos x}{1+x^2} - 1 \\
 \ell) & \frac{1 + \sin x}{1 - \sqrt{x}} - 1 \\
 m) & \log(\sqrt{x^2 + 9}) - \log 3 \\
 n) & \arctan(\sqrt[4]{\cos x} - 1)
 \end{array}$$

6. Determinare l'ordine di infinitesimo  $\alpha$  e la parte principale  $\frac{k}{x^\alpha}$  rispetto all'infinitesimo campione  $\frac{1}{x}$  per  $x \rightarrow +\infty$  delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) & \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^{3/2} + 5x^2} \\
 b) & \arctan\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \\
 c) & \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} \\
 d) & \sqrt{x^2 + \sqrt{x}} - x + \frac{1}{x} \\
 e) & \log\left(e + \frac{3}{x}\right) - 1 \\
 f) & \sqrt{x+1} - \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}
 \end{array}$$

7. Determinare l'ordine di infinitesimo  $\alpha$  e la parte principale  $k(x-x_0)^\alpha$  rispetto all'infinitesimo campione  $x-x_0$  per  $x$  che tende al valore  $x_0$  indicato delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) & \sin x, \quad x \rightarrow \pi \\
 b) & \cos x, \quad x \rightarrow \pi/2 \\
 c) & \sqrt{x} - 1, \quad x \rightarrow 1 \\
 d) & \sqrt{1+2x} - \sqrt{5}, \quad x \rightarrow 2 \\
 e) & (x^2 - 1) \left(1 - \sin \frac{\pi}{2}x\right), \quad x \rightarrow 1 \\
 f) & \log(\sqrt{x+7} - 2), \quad x \rightarrow 2
 \end{array}$$

8. Determinare l'ordine di infinito  $\alpha$  e la parte principale  $kx^\alpha$  rispetto all'infinito campione  $x$  per  $x \rightarrow +\infty$  delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 a) & \log(e^{2x} + 3) \\
 b) & \frac{x^4}{\sqrt{x^2+1}} - x^3 + \sqrt{x}
 \end{array}$$

9. Determinare il parametro reale  $a$  in modo che la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + x}{3x^2 - ax + 1}$$

ammetta la retta  $y = \frac{1}{3}x + 2$  come asintoto obliquo.

10. Determinare il dominio e gli eventuali asintoti delle seguenti funzioni:

$$a) \quad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad b) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$$

11. Dire se esiste

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x^3 + \sin x}{\sqrt{2 + x^6 - \cos x} e^{\sin^2 x}}$$

12. Confrontare fra loro i seguenti infinitesimi per  $x \rightarrow 0^+$  mettendoli in ordine crescente di infinitesimo:

$$2^{-\frac{1}{x^2}}, x^2, x\sqrt{x}, \frac{x}{\log x}, x^2 \log x, e^{-\frac{1}{x}}, x \log^2 x, \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \frac{x^2}{\log x}, x^{\frac{1}{x}}, \frac{e^{x^2} - 1}{x}$$

13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 3n - 7}{n^2 + 2n + 2} \right)^{5n} & b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3n^4 + 5} \\ c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \log n + \sqrt{n}(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}} & d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{\log n + \cos n} \\ e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [(\sqrt{n})^n - 3^n] & f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} \end{array}$$

14. Verificare che per  $n \rightarrow \infty$

$$a) \quad \log(n^3 + \sin n) \sim \log(n^3 + n^2) \qquad b) \quad (2n + 1)^n \sim \sqrt{e} 2^n n^n$$

15. Calcolare la parte principale per  $n \rightarrow \infty$  di

$$a) \quad \frac{n^4 + 3}{n} - \frac{n^4 + 3n}{n - 2} \qquad b) \quad \frac{n\sqrt{n+1} + \sin n}{3n^{2/3} + \log n}$$

16. Sia per  $n \geq 2$ ,

$$a_n = \frac{(1 + \sin \alpha)^n}{\left(1 + \frac{\sin \alpha}{n}\right)^n}.$$

Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  al variare di  $\alpha$  nell'intervallo  $[0, 2\pi)$ .

**Soluzioni**

1. Si ha

- |                       |                       |                    |                   |
|-----------------------|-----------------------|--------------------|-------------------|
| a) $\frac{\log 2}{6}$ | b) $\frac{1}{5}$      | c) $-\frac{1}{12}$ | d) $-\frac{2}{3}$ |
| e) 0                  | f) 0                  | g) $+\infty$       | h) $e^3$          |
| i) $\sqrt{e}$         | l) $\frac{1}{2}$      | m) $-\frac{1}{2}$  | n) $\log 2$       |
| o) 3                  | p) $\frac{8}{9}$      | q) $-\infty$       | r) $e^{1/e}$      |
| s) $e$                | t) $\frac{\log 2}{6}$ | u) 1               | v) $\frac{1}{3}$  |

2. È immediato verificare che  $f(x) \sim \sqrt{2}g(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

3. L'infinito  $\sqrt[3]{x^8 - 7x^2} \sim x^{8/3}$ , per  $x \rightarrow +\infty$ , ha ordine  $8/3 < 3$ .

4. a) Con il cambio di variabile  $f(x) = t$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) Essendo

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \sim \frac{1}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty,$$

si ha

$$\sin(\sqrt{x^2 + 1} - x) \sim \frac{1}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty$$

per il punto a).

5. Si ha

- |   |   |
|---|---|
| a) $\alpha = 1, \quad p(x) = x$                 | b) $\alpha = 2, \quad p(x) = 6x^2$                                    |
| c) $\alpha = 3, \quad p(x) = x^3$               | d) $\alpha = 2, \quad p(x) = -\frac{3}{4}x^2$                         |
| e) $\alpha = 2, \quad p(x) = -\frac{1}{4}x^2$   | f) $\alpha = 1, \quad p(x) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)x$ |
| g) $\alpha = \frac{7}{6}, \quad p(x) = x^{7/6}$ | h) $\alpha = 2, \quad p(x) = \frac{7}{6}x^2$                          |
| i) $\alpha = 2, \quad p(x) = -\frac{3}{2}x^2$   | l) $\alpha = \frac{1}{2}, \quad p(x) = x^{1/2}$                       |
| m) $\alpha = 2, \quad p(x) = \frac{1}{18}x^2$   | n) $\alpha = 2, \quad p(x) = -\frac{1}{8}x^2$                         |

6. Si ha

- |  |   |
|--|---|
| a) $\alpha = \frac{3}{2}, \quad p(x) = \frac{1}{5x^{3/2}}$ | b) $\alpha = 1, \quad p(x) = \frac{2}{x}$                   |
| c) $\alpha = \frac{2}{3}, \quad p(x) = \frac{2}{3x^{2/3}}$ | d) $\alpha = \frac{1}{2}, \quad p(x) = \frac{1}{2x^{1/2}}$  |
| e) $\alpha = 1, \quad p(x) = \frac{3}{ex}$                 | f) $\alpha = \frac{3}{2}, \quad p(x) = -\frac{1}{8x^{3/2}}$ |

7. Si ha

$$\begin{array}{ll} a) \alpha = 1, & p(x) = -(x - \pi) \\ b) \alpha = 1, & p(x) = -(x - \frac{\pi}{2}) \\ c) \alpha = 1, & p(x) = \frac{1}{2}(x - 1) \\ d) \alpha = 1, & p(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2) \\ e) \alpha = 3, & p(x) = \frac{\pi^2}{4}(x - 1)^3 \\ f) \alpha = 1, & p(x) = \frac{1}{6}(x - 2) \end{array}$$

8. Si ha

$$a) \alpha = 1, \quad p(x) = 2x \qquad b) \alpha = 1, \quad p(x) = -\frac{1}{2}x$$

9. Risulta  $a = \frac{9}{2}$ .

10. a)  $\text{dom } f = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ . La retta  $y = e$  è asintoto orizzontale completo per  $f$ . La retta  $x = -1$  è asintoto verticale per  $f$ .

b)  $\text{dom } f = \mathbb{R}$ . La retta  $y = x - \frac{1}{2}$  è asintoto obliquo destro per  $f$ . La retta  $y = -x + \frac{1}{2}$  è asintoto obliquo sinistro per  $f$ .

11. Il limite non esiste. Infatti posto  $f(x) = \frac{x-2x^3+\sin x}{\sqrt{2+x^6-\cos x}e^{\sin^2 x}}$ , consideriamo le due successioni  $x_n = n\pi$  e  $y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ , che divergono a  $+\infty$ . Essendo  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -2$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -\frac{2}{e}$ , il limite non esiste.

12. In ordine crescente di infinitesimo per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}}, x \log^2 x, \frac{e^{x^2} - 1}{x} \frac{x}{\log x}, x\sqrt{x}, x^2 \log x, x^2, \frac{x^2}{\log x}, e^{-\frac{1}{x}}, x^{\frac{1}{x}}, 2^{-\frac{1}{x^2}}$$

13. Si ha a)  $e^5$  b) 1 c) 0 d)  $+\infty$  e)  $+\infty$  f)  $+\infty$

14. a) Si ha

$$\frac{\log(n^3 + \sin n)}{\log(n^3 + n^2)} = \frac{\log [n^3 (1 + \frac{\sin n}{n^3})]}{\log [n^3 (1 + \frac{1}{n})]} = \frac{\log(n^3) + \log (1 + \frac{\sin n}{n^3})}{\log(n^3) + \log (1 + \frac{1}{n})},$$

da cui, raccogliendo a numeratore e denominatore  $\log(n^3)$ , e passando al limite, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^3 + \sin n)}{\log(n^3 + n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{\log(n^3)} \log (1 + \frac{\sin n}{n^3})}{1 + \frac{1}{\log(n^3)} \log (1 + \frac{1}{n})} = 1.$$

b) Risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n + 1)^n}{2^n n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n + 1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)^n = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

15. Si ha      a)  $p(n) = -2n^2$       b)  $p(n) = \frac{n^{5/6}}{3}$

16. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \in (0, \pi) \\ 0 & \text{se } \alpha \in (\pi, 2\pi) \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \pi \end{cases}$$