

Esercizi svolti

1. Discutendo graficamente la disequazione $2 - |x| > \sqrt{3+x}$, verificare che l'insieme delle soluzioni è un intervallo e trovarne gli estremi.
2. Descrivere in forma elementare l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x+1 > \sqrt{x^2-1}\}$.
3. Determinare il dominio di $f(x) = \log_3(2x - \sqrt{x^2-1})$.
4. Determinare dominio ed immagine di $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$.
5. Sia $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1}$; determinare il dominio, discutere eventuali simmetrie e l'iniettività della funzione f .
6. Sia $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$; determinare la controimmagine $f^{-1}([2, +\infty))$.
7. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 - 4x + 9$ non è invertibile. Individuare opportune restrizioni di f che siano invertibili e scrivere l'espressione delle loro inverse.
8. Individuare opportune restrizioni di $f(x) = x^2 - 2|x|$ che siano invertibili. Specificare dominio ed immagine delle inverse, per le restrizioni trovate.
9. Provare che le funzioni

$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad x \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}, \quad x \geq \frac{3}{4}$$

sono una l'inversa dell'altra. Utilizzare la rappresentazione grafica di f e f^{-1} per risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$.

10. Siano

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{1-x}.$$

Disegnare i grafici di f e di g e determinare dominio e immagine di $g \circ f$ e di $f \circ g$.

11. Data la funzione $h(x) = 2^{2x} - 2^x - 2$

- a) esprimere h come prodotto di composizione in cui uno dei fattori è la funzione $f(x) = 2^x$;
 b) determinare dominio ed immagine di h .

12. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3} & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} & d) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3} \\ e) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 - 1}} & f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \end{array}$$

13. Calcolare i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} \\ c) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} & d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\ e) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt[4]{x + 17} - 2} & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} \\ g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{\sqrt{x} - 1} & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + M(x)^*}{x + \sqrt{x}} \\ i) \lim_{x \rightarrow -1^\pm} [x^3 + 1]^* & \ell) \lim_{x \rightarrow 1^\pm} [x^4 - 2x^3 - x + 2]^* \\ m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[3x + 1]^*}{\sqrt{x^2 + 1}} & n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1} \end{array}$$

* $[x]$ e $M(x)$ denotano rispettivamente la parte intera e la mantissa di x .

14. Dire se esistono (ed eventualmente calcolare) i seguenti limiti:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \cos x) & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cos x \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x M(x) \end{array}$$

15. Determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} \left(\sqrt{x^2 + \lambda} + x \right) = 2$$

16. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x} \right)^{2x}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x}$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(2^x - 1)}{(2^x - 1)^2}$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^x - 1)^2}$$

$$e) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^x + x^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$f) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(e + \frac{2}{x} \right)^x$$

17. Calcolare i seguenti limiti:

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n} \right)^{2n}$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + 1}$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n}$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}$$

$$e) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{(n+1)(n+2)}$$

$$f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{n} - \log n}$$

18. Sia d_n una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$, e sia $a_n = (-1)^n d_n$. Studiare l'esistenza del $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ al variare di l in \mathbb{R} .

19. Determinare

$$\lim_{x \rightarrow k\pi/2} [\cos x]^*$$

al variare di k in \mathbb{Z} . Ove tale limite non esista, discutere l'esistenza dei limiti laterali. Identificare i punti di discontinuità della funzione $f(x) = [\cos x]$ ed il loro tipo.

* $[x]$ denota la parte intera di x .

20. Determinare per quale valore del parametro α la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ [x]^* + \alpha & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

è continua sull'intervallo $[-1, +\infty)$.

* $[x]$ denota la parte intera di x .

Svolgimento

1. L'unica intersezione della retta r_1 di equazione $y = 2 + x$ con il ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{3+x}$ è il punto $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. L'intersezione della retta r_2 di equazione $y = 2 - x$ con il ramo di parabola $y = \sqrt{3+x}$ è il punto $x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

Disegnando i grafici, si vede che la disequazione è soddisfatta per i valori di x compresi tra x_1 e x_2 , cioè per $x \in \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$.

Dunque gli estremi dell'intervallo sono $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$.

2. Consideriamo separatamente i due insiemi

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2x+3} > 0\right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : x+1 > \sqrt{x^2-1}\right\}.$$

La disequazione $\frac{x-1}{2x+3} > 0$ è soddisfatta per $x < -\frac{3}{2}$ oppure per $x > 1$.

Pertanto $A = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

La disequazione $x+1 > \sqrt{x^2-1}$ è equivalente al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x^2-1 \geq 0 \\ (x+1)^2 > x^2-1 \end{cases}$$

che è soddisfatto da tutti i valori di $x \geq 1$. Dunque $B = [1, +\infty)$.

In definitiva $A \cap B = (1, +\infty)$.

3. Il dominio della funzione f è l'insieme

$$\text{dom } f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x - \sqrt{x^2-1} > 0 \text{ e } x^2-1 \geq 0\right\}.$$

Dunque dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 4x^2 > x^2-1 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema è soddisfatto per ogni valore di $x \geq 1$. Pertanto $\text{dom } f = [1, +\infty)$.

4. Il dominio della funzione f è l'insieme $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : \sin x - 1 \geq 0\}$. La disequazione $\sin x \geq 1$ è soddisfatta soltanto dai valori di x per cui $\sin x = 1$, dunque

$$\text{dom } f = \left\{ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In corrispondenza a tali valori di x , si ha $f(x) = 0$, pertanto $\text{im } f = \{0\}$.

5. Il dominio della funzione f è l'insieme

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \geq 0 \text{ e } x + 1 \geq 0\} = [-1, 1].$$

Poiché $f(-x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{-x+1} = f(x)$, la funzione è pari e pertanto non è iniettiva.

6. Per rispondere alla domanda dobbiamo risolvere la disequazione $\frac{x-1}{2-x} \geq 2$, che è equivalente alla $\frac{3x-5}{x-2} \leq 0$. Tale disequazione è soddisfatta per $\frac{5}{3} \leq x < 2$.

Pertanto $f^{-1}([2, +\infty)) = [\frac{5}{3}, 2)$.

In alternativa, si può osservare che la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{2-x} = -1 - \frac{1}{x-2}$$

è un'iperbole riferita alle rette $x = 2$ e $y = -1$; si può ottenere il risultato riferendosi al grafico della funzione e tenendo conto del fatto che $f(\frac{5}{3}) = 2$.

7. La funzione non è invertibile su \mathbb{R} in quanto è una parabola con asse di simmetria la retta $x = 2$ e dunque non è iniettiva. Il vertice della parabola è il punto $V=(2, 5)$. Due possibili restrizioni invertibili di f sono:

$$f_1 = f|_{(-\infty, 2]} : (-\infty, 2] \rightarrow [5, +\infty) \quad \text{e} \quad f_2 = f|_{[2, +\infty)} : [2, +\infty) \rightarrow [5, +\infty).$$

Per ottenere le espressioni delle funzioni inverse, è necessario ricavare x in funzione di y dall'equazione $y = x^2 - 4x + 9$. L'equazione $x^2 - 4x + 9 - y = 0$ ha soluzioni $x = 2 \pm \sqrt{y-5}$. Pertanto

$$f_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-5} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y-5}.$$

In definitiva, tornando alla variabile x , si ottengono le espressioni delle due funzioni inverse

$$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-5} \quad \text{e} \quad f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-5}.$$

8. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x < 0, \\ x^2 - 2x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Abbiamo quattro restrizioni invertibili massimali di f :

$$f_1 = f|_{(-\infty, -1]} : (-\infty, -1] \rightarrow [-1, +\infty), \quad f_2 = f|_{[-1, 0]} : [-1, 0] \rightarrow [-1, 0]$$

$$f_3 = f|_{[0, 1]} : [0, 1] \rightarrow [-1, 0], \quad f_4 = f|_{[1, +\infty)} : [1, +\infty) \rightarrow [-1, +\infty).$$

Scambiando tra loro il ruolo del dominio e dell'immagine, si ottiene

$$f_1^{-1} : [-1, +\infty) \rightarrow (-\infty, -1], \quad f_2^{-1} : [-1, 0] \rightarrow [-1, 0]$$

$$f_3^{-1} : [-1, 0] \rightarrow [0, 1], \quad f_4^{-1} : [-1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty).$$

9. Anzitutto si ha $\text{dom } f = [\frac{1}{2}, +\infty) = \text{im } g$, e $\text{dom } g = [\frac{3}{4}, +\infty) = \text{im } f$.

Per provare che le funzioni f e g sono l'una l'inversa dell'altra, dobbiamo verificare che $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{3}{4}$, e che $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \geq \frac{1}{2}$. Ma

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}\right) + 1 = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x + 1) = \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x.$$

Disegnando il grafico di f e di g si vede che la bisettrice $y = x$ è tangente ai grafici di f e g nel punto di ascissa 1, e che $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1$.

10. Il grafico di f è un'iperbole equilatera riferita alle rette $x = -2$ e $y = 2$. Le intersezioni con gli assi cartesiani sono i punti $A = (-\frac{1}{2}, 0)$ e $B = (0, \frac{1}{2})$.

Il grafico di g è un ramo della parabola avente l'asse delle x come asse di simmetria e il vertice nel punto $V = (1, 0)$, rivolta verso la parte negativa dell'asse delle ascisse; l'intersezione con l'asse delle y è il punto $C = (0, 1)$.

Risulta pertanto

$$\text{dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty), \quad \text{im } f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty),$$

$$\text{dom } g = (-\infty, 1], \quad \text{im } g = [0, +\infty).$$

Poiché $\text{im } f \cap \text{dom } g = (-\infty, 1] \neq \emptyset$, è definita $g \circ f$ e si ha

$$\text{dom } (g \circ f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x+2} \leq 1 \right\} = (-2, 1]$$

e

$$\text{im } (g \circ f) = g((-\infty, 1]) = [0, +\infty).$$

In definitiva $g \circ f : (-2, 1] \rightarrow [0, +\infty)$.

Inoltre, poiché $\text{im } g \cap \text{dom } f = [0, +\infty) \neq \emptyset$, è definita $f \circ g$ e si ha

$$\text{dom } (f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1 \wedge \sqrt{1-x} + 2 \neq 0\} = (-\infty, 1]$$

e

$$\text{im } (f \circ g) = f([0, +\infty)) = \left[\frac{1}{2}, 2\right).$$

Pertanto si avrà $f \circ g : (-\infty, 1] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 2\right)$.

11. a) Si ha $h(x) = (g \circ f)(x)$, dove $g(x) = x^2 - x - 2$.

b) Si ha $\text{dom } f = \text{dom } g = \mathbb{R}$, $\text{im } f = (0, +\infty)$, $\text{im } g = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

Pertanto $\text{dom } h = \mathbb{R}$ e $\text{im } h = g(0, +\infty) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$; riassumendo, $h : \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

12. Si ha

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{\sqrt{x} + x^2 - x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{-x^3} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{(3x^2 - 4)(3x + 2)} = \frac{2}{9}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 4x}{x^5 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x + 4)}{x(x^4 - 1)} = -4$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 - x^3 + 1}{1 - x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{2x^2}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) Decomponendo in fattori numeratore e denominatore con la regola di Ruffini otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 12}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(2x+3)}{(x-2)^2(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{7}{5}.$$

g) Moltiplicando e dividendo per la somma delle radici si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1-x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1. \end{aligned}$$

h) Procedendo come nell'esercizio precedente otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x} + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

13. Si ha

a) Utilizzando il limite fondamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, il suo reciproco, e il teorema del cambiamento di variabile nei limiti, otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{\sin^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{x^4} \left(\frac{x^2}{\sin x^2} \right)^2 = 1 \cdot 1 = 1.$$

b) Ricordando il limite fondamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(2x)^2} \cdot \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

c) Con il cambio di variabili $x - \pi = t$ otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1.$$

d) Ponendo $x - \frac{\pi}{2} = t$ otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + t)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1.$$

e) Ponendo $\sqrt[4]{x+17} = t$ abbiamo $x = t^4 - 17$ e quando x tende a -1 , t tende a 2 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17} - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t^4 - 16}{t - 2} = \lim_{t \rightarrow 2} (t+2)(t^2+4) = 32.$$

f) Poniamo $x = \cos t$ da cui $t = \arccos x$. Quando x tende a zero, t tende a $\frac{\pi}{2}$, e ci riconduciamo così al reciproco del limite d):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{t - \frac{\pi}{2}}{\cos t} = -1.$$

$$g) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)}{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Abbiamo usato il fatto che $\cos x$ è limitata e $\frac{1}{x}$ è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, e dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

h) La funzione mantissa è limitata, essendo $0 \leq M(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Da questo segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + M(x)}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{M(x)}{x}\right)}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = 1.$$

i) Disegnando il grafico di $t = x^3 + 1$, oppure studiandone il segno, vediamo che quando x tende a -1^\pm la variabile t tende rispettivamente a 0^\pm . Cambiando variabile e ricordando il grafico della parte intera otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} [x^3 + 1] = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} [t] = \begin{cases} 0 & \text{se } t \rightarrow 0^+ \\ -1 & \text{se } t \rightarrow 0^- \end{cases}.$$

ℓ) Studiando il segno di $t = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x - 2)(x^3 - 1)$ vediamo che quando x tende a 1^\pm la t tende rispettivamente a 0^\mp , e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} [x^4 - 2x^3 - x + 2] = \lim_{t \rightarrow 0^\mp} [t] = \begin{cases} -1 & \text{se } t \rightarrow 0^- \\ 0 & \text{se } t \rightarrow 0^+ \end{cases}.$$

m) Ricordando che $t - 1 < [t] \leq t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2 + 1}} < \frac{[3x + 1]}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Passando al limite e utilizzando il teorema del doppio confronto si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[3x + 1]^*}{\sqrt{x^2 + 1}} = 3.$$

n) Essendo $\sqrt{5 + \cos x}$ limitata e $\frac{1}{x^2 + 1}$ infinitesima per $x \rightarrow +\infty$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5 + \cos x}}{x^2 + 1} = 0.$$

14. Si ha

a)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} + \cos x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 + \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

b) Il limite non esiste. Infatti posto $f(x) = \sqrt{x} \cos x$ e considerate, ad esempio, le due successioni $x_n = 2n\pi$ e $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, ma $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$, mentre $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0$.

c) Essendo $\sin \frac{1}{x}$ limitata e \sqrt{x} infinitesima per $x \rightarrow 0^+$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

d) Il limite non esiste. Posto $f(x) = x M(x)$ e $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{2}$, si ha $f(x_n) = 0$ e $f(y_n) = \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, mentre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \frac{1}{2}.$$

15. Calcoliamo il limite in funzione del parametro λ . Poiché x tende a $-\infty$ possiamo supporre $x < 0$ e quindi $|x| = -x$. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + \lambda} - x$ otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 1} (\sqrt{x^2 + \lambda} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} \cdot \lambda}{\sqrt{x^2 + \lambda} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{|x| \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Otteniamo così $\lambda = 4$.

16. Si ha

a)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{\pi}{x} \right)^x \right]^2 = (e^{-\pi})^2 = e^{-2\pi}$$

b) Posto $-2x = t$ e ricordando il limite fondamentale $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = -2.$$

c) Posto $2^x - 1 = t$ è facile vedere che $t \rightarrow 0^\pm$ quando $x \rightarrow 0^\pm$, dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin(2^x - 1)}{(2^x - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{\sin t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \left(\frac{\sin t}{t} \right) \frac{1}{t} = \pm\infty.$$

d)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x} (1 + 2^{-3x})}{2^{2x} (1 - 2^{-x})} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^x - 1)^2} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$$

e) Ricordiamo che $f(x)^{g(x)} \equiv e^{g(x)\log f(x)}$, quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^x + x^{-\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{x \log x} + e^{-\frac{1}{x} \log x}\right) = e^0 + e^{+\infty} = 1 + \infty = +\infty.$$

f)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(e + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{ex}\right)^x = e^{2/e}.$$

17. Si ha

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{2/3} = e^{2/3}$$

Possiamo anche procedere utilizzando il limite fondamentale $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n\right]^2 = (e^{1/3})^2 = e^{2/3}.$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - n + n^2}{2n^2 - n^{3/2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta^2 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{3/2}}\right)}{\eta^2 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^n}{1 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)} = -1.$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(1 + \frac{n^2}{2^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{n^3}{3^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

e)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\eta/\log n}{n^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0.$$

f)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \log n}{\sqrt{n} - \log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} \frac{1 + \frac{1}{\log n}}{1 - \frac{\log n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0.$$

18. È facile verificare dalla definizione di limite che una successione a_n tende a $l \in \mathbb{R}$ se e solo se le due successioni dei termini di indice pari e di indice dispari, $b_n = a_{2n} = \{a_0, a_2, a_4, \dots\}$ e $c_n = a_{2n+1} = \{a_1, a_3, a_5, \dots\}$, tendono entrambe a l . Nel nostro caso $a_{2n} \rightarrow l$ mentre $a_{2n+1} \rightarrow -l$. Quindi se $l = -l$ cioè $l = 0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$; se invece $l \neq 0$ il limite di a_n non esiste.

19. Per la periodicità, è sufficiente considerare i casi: $k = 0, 1, 2, 3$. Disegnando il grafico di $f(x) = [\cos x]$ si vede che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1 = f(\pi);$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1;$$
$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^-} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi^+} f(x) = 0 = f\left(\frac{3}{2}\pi\right).$$

I punti $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ sono punti di discontinuità eliminabile. I punti $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3}{2}\pi, \dots$ sono punti di discontinuità di prima specie (tipo salto).

20. La funzione è continua in tutti i punti di $[-1, +\infty)$ escluso al più lo zero. Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} + 1) = 1 = f(0),$$

la funzione è continua in zero da destra. Essendo infine

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \alpha + \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = \alpha - 1,$$

la funzione sarà continua anche nello zero se e solo se $\alpha - 1 = 1$, cioè $\alpha = 2$.