Confronto locale di funzioni

Test di autovalutazione

1. Per $x \to 0$:
   (a) $x^3 = o(x^4)$
   (b) $x^4 = o(\sin x^2)$
   (c) $x^3 \sim x^3 + 1$
   (d) $x^7 + x \sim x^2 - x$

2. Il limite $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4x^3 - x \ln x}{\tan x - 2 \sin^3 x}$
   (a) vale 0
   (b) non esiste
   (c) vale -2
   (d) è infinito

3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq 0$ e $g(x) = o(x)$, per $x \to 0$. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{2 + g(x)}$. Allora necessariamente:
   (a) $f(x) = 2 + o(x)$, per $x \to 0$
   (b) $f(x) \sim \sqrt{2}$, per $x \to 0$
   (c) $f(x) = o(2 + \sqrt{x})$, per $x \to 0$
   (d) $f(x) \sim \sqrt{g(x)}$, per $x \to +\infty$

4. Per $x \to 0$ le funzioni $\log(x + 1)$ ed $e^x - 1$:
   (a) sono infinitesime dello stesso ordine
   (b) $e^x - 1$ è infinitesima di ordine inferiore a $\log(x + 1)$
   (c) $e^x - 1$ è infinitesima di ordine superiore a $\log(x + 1)$
   (d) non sono equivalenti

5. Per $x \to 0$ le funzioni $\tan x$ ed x
   (a) sono infinitesime dello stesso ordine e il limite del loro rapporto tende a π
   (b) sono infinitesime dello stesso ordine e il limite del loro rapporto tende a 1
   (c) x è un infinitesimo di ordine superiore a $\tan x$
   (d) $\tan x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x

6. La funzione $\dfrac{x^2+1}{x}$
   (a) ha come asintoto la retta $y = x$
   (b) ha come asintoto la retta $y = 1$
   (c) non ha asintoti verticali
   (d) ha due distinti asintoti obliqui

7. La funzione $\dfrac{2x^2-3}{2+x^2}$
   (a) ha come asintoto la retta $y = 2x$
   (b) è infinita di ordine 2
   (c) presenta un asintoto verticale in $x = -2$
   (d) ha come asintoto la retta $y = 2$

8. Le funzioni $\sin\frac{1}{x}$ e $\cos\frac{1}{x}$ per $x \to 0$
   (a) sono equivalenti
   (b) la prima tende a 0 e la seconda ad 1
   (c) tendono entrambe a zero
   (d) non ammettono limite

9. La successione $a_n = \dfrac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$:
   (a) è infinitesima
   (b) tende a $+\infty$
   (c) tende a $-\infty$
   (d) non ammette limite per $n \to \infty$

10. È data la successione
$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$
   Allora:
   (a) la sua parte principale è $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
   (b) è oscillante
   (c) è equivalente alla successione $b_n = \dfrac{1}{n}$
   (d) è infinita

11. La successione
$$a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$
    (a) tende a 1
    (b) tende a e^{-1}
    (c) è divergente
    (d) tende a $-e$

12. In $x = 0$ la funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{3x^2}$
    (a) ha una discontinuità eliminabile
    (b) ha una discontinuità di seconda specie
    (c) ha limite infinito
    (d) ha un salto

1. Per $x \to 0$:

   (a) $x^3 = o(x^4)$

   (b) $x^4 = o(\sin x^2)$

   (c) $x^3 \sim x^3 + 1$

   (d) $x^7 + x \sim x^2 - x$

   RISPOSTA ESATTA: (b)

   La risposta (a) è falsa: infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = \infty \neq 0$.

   La risposta (b) è vera: infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{\sin x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^2} = 0$.

   La risposta (c) è falsa: infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3 + 1} = 0 \neq 1$.

   La risposta (d) è falsa: infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^7 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{-x} = -1 \neq 1$.

2. Il limite $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{4x^3 - x\ln x}{\tan x - 2\sin^3 x}$

   (a) vale 0

   (b) non esiste

   (c) vale -2

   (d) è infinito

RISPOSTA ESATTA: (d)

Per $x \to 0^+$, si ha $4x^3 = o(x\ln x)$ e anche $\sin^3 x = o(\tan x)$: infatti

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^3}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x^2}{\ln x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^3 x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0\,.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{4x^3 - x\ln x}{\tan x - 2\sin^3 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} (-\ln x) = +\infty\,,$$

cioè quanto asserito in (d); dunque (a), (b) e (c) sono false.

3. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) \geq 0$ e $g(x) = o(x)$, per $x \to 0$. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{2 + g(x)}$. Allora necessariamente:

   (a) $f(x) = 2 + o(x)$, per $x \to 0$

   (b) $f(x) \sim \sqrt{2}$, per $x \to 0$

   (c) $f(x) = o(2 + \sqrt{x})$, per $x \to 0$

   (d) $f(x) \sim \sqrt{g(x)}$, per $x \to +\infty$

   RISPOSTA ESATTA: (b)

   La risposta (d) è senz'altro da scartare, perché le informazioni date forniscono indicazioni sul comportamento di $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to 0$ e non per $x \to +\infty$.

   Riguardo al comportamento per $x \to 0$, osserviamo preliminarmente che

$$g(x) = o(x) \implies \lim_{x \to 0} g(x) = 0\,.$$

   Per studiare la risposta (a), calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + g(x)} - 2}{x} = \infty \neq 0\,;$$

   quindi (a) è falsa.

   Passiamo alla (b), e calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + g(x)}}{\sqrt{2}} = 1\,;$$

   dunque (b) è vera.

   Infine, calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2 + \sqrt{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2 + g(x)}}{2 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0\,;$$

   pertanto (c) è falsa.

4. Per $x \to 0$ le funzioni $\log(x+1)$ ed $e^x - 1$:
   (a) sono infinitesime dello stesso ordine
   (b) $e^x - 1$ è infinitesima di ordine inferiore a $\log(x+1)$
   (c) $e^x - 1$ è infinitesima di ordine superiore a $\log(x+1)$
   (d) non sono equivalenti

   RISPOSTA ESATTA: (a)

   Per $x \to 0$ si ha $\log(x+1) \sim x$ e anche $e^x - 1 \sim x$. Pertanto le due funzioni sono equivalenti tra di loro e dunque sono infinitesime dello stesso ordine.

5. Per $x \to 0$ le funzioni $\tan x$ ed x
   (a) sono infinitesime dello stesso ordine e il limite del loro rapporto tende a π
   (b) sono infinitesime dello stesso ordine e il limite del loro rapporto tende a 1
   (c) x è un infinitesimo di ordine superiore a $\tan x$
   (d) $\tan x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x

   RISPOSTA ESATTA: (b)

   Dal limite fondamentale $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si ricava

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

   Poiché il limite del loro rapporto è un valore finito non nullo, le due funzioni sono infinitesime dello stesso ordine.

6. La funzione $\dfrac{x^2+1}{x}$

   (a) ha come asintoto la retta $y = x$

   (b) ha come asintoto la retta $y = 1$

   (c) non ha asintoti verticali

   (d) ha due distinti asintoti obliqui

   RISPOSTA ESATTA: (a).

   La funzione $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ presenta un asintoto verticale (la retta $x = 0$); pertanto la risposta (c) è falsa.
   Poiché $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = \pm\infty$, la funzione non ha asintoti orizzontali; dunque la risposta (b) è falsa.

   Si ha invece

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 0\,.$$

   Pertanto la retta $y = x$ è l'unico asintoto obliquo di $f(x)$.

7. La funzione $\dfrac{2x^2-3}{2+x^2}$
   (a) ha come asintoto la retta $y = 2x$
   (b) è infinita di ordine 2
   (c) presenta un asintoto verticale in $x = -2$
   (d) ha come asintoto la retta $y = 2$

   RISPOSTA ESATTA: (d)

   La funzione non ha asintoti verticali, perché il denominatore non si annulla e il dominio è tutto $\mathbb{R}$.

   Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, la funzione ammette la retta $y = 2$ come asintoto orizzontale completo. Dunque non può avere asintoti obliqui, e non è infinita, per nessun valore di $x \in \mathbb{R}$.

8. Le funzioni $\sin \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ per $x \to 0$

   (a) sono equivalenti

   (b) la prima tende a 0 e la seconda ad 1

   (c) tendono entrambe a zero

   (d) non ammettono limite

   RISPOSTA ESATTA: (d)

   I due limiti non esistono. Infatti $\lim_{x\to 0^\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$ e non esistono i limiti $\lim_{t\to\pm\infty} \sin t$ e $\lim_{t\to\pm\infty} \cos t$.

   Le due funzioni non sono equivalenti, in quanto non esiste il limite del loro rapporto

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\cos \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \tan \frac{1}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} \tan t\,.$$

9. La successione $a_n = \dfrac{3^n - 5n}{2^n - n^2}$:

   (a) è infinitesima

   (b) tende a $+\infty$

   (c) tende a $-\infty$

   (d) non ammette limite per $n \to \infty$

   RISPOSTA ESATTA: (b)

   Infatti per $n \to \infty$ si ha

$$a_n = \frac{3^n - 5n}{2^n - n^2} \sim \frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n .$$

   Dunque

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty \,.$$

10. È data la successione

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$$

Allora:

(a) la sua parte principale è $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

(b) è oscillante

(c) è equivalente alla successione $b_n = \dfrac{1}{n}$

(d) è infinita

RISPOSTA ESATTA: (a)

Razionalizzando e tenendo conto che, per $n \to \infty$, $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, si ha

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}}\,.$$

Dunque (a) è vera mentre (c) è falsa.

Inoltre si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0\,,$$

e quindi (b) e (d) sono false.

11. La successione

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$$

(a) tende a 1

(b) tende a e^{-1}

(c) è divergente

(d) tende a $-e$

RISPOSTA ESATTA: (b)

Infatti:

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}} \right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$.

12. In $x = 0$ la funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{3x^2}$

    (a) ha una discontinuità eliminabile

    (b) ha una discontinuità di seconda specie

    (c) ha limite infinito

    (d) ha un salto

    RISPOSTA ESATTA: (a)

    Per $x \to 0$, si ha $\ln(1 + x^2) \sim x^2$ e pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{- \frac{3}{x}{}^2} = \frac{1}{3}\,;$$

    dunque in $x = 0$ la funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{3x^2}$ ha una discontinuità eliminabile.