

## C.3

---

### Funzioni elementari

Pag. 83 ← Dimostrazione della Proposizione 3.20

**Proposizione 3.20** *Tutte le funzioni elementari (polinomi e funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e le loro funzioni inverse) sono continue in tutto il loro dominio.*

**Dimostrazione.** La continuità delle funzioni razionali è già stata stabilita nel Corollario 4.12. Da ciò, e dai Teoremi 4.17 e 4.33 di continuità della funzione composta e della funzione inversa, segue in particolare la continuità delle funzioni elevamento a potenza con esponente razionale positivo  $y = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ ; la continuità di quelle con esponente razionale negativo  $x^q = \frac{1}{x^{-q}}$  segue dall'algebra dei limiti, mentre la continuità di quelle con esponente irrazionale sarà conseguenza della definizione  $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$  e del Teorema 4.17, una volta stabilita la continuità dell'esponenziale e del logaritmo.

La continuità delle funzioni seno e coseno è stata dimostrata nell'Esempio 3.17 iii), dunque l'algebra dei limiti garantisce la continuità delle funzioni tangente e cotangente e quindi il Teorema 4.33 assicura la continuità delle funzioni inverse arcoseno, arcocoseno, arcotangente e arcocotangente.

Non resta dunque che dimostrare la continuità della funzione esponenziale, in quanto quella del logaritmo seguirà ancora dal Teorema 4.33. Consideriamo il caso  $a > 1$ ; se  $0 < a < 1$ , scriviamo  $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$  e deduciamo il risultato dal caso precedente. Notiamo che le identità

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} a^{x_2}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

e la stretta monotonia

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}$$

seguono facilmente dalle proprietà delle potenze ad esponente intero e delle loro inverse nel caso in cui gli esponenti siano razionali; se gli esponenti sono reali,

esse si possono dedurre da queste, grazie alla definizione di esponenziale e alla definizione di estremo superiore.

Dimostriamo dapprima che la funzione  $y = a^x$  è continua da destra nell'origine, ossia che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1. \quad (\text{C.3.1})$$

Fissato  $\varepsilon > 0$ , determiniamo  $\delta > 0$  in modo che

$$0 \leq x < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a^x - 1 < \varepsilon.$$

Usando la monotonia dell'esponenziale, è sufficiente trovare  $\delta$  tale che  $a^\delta - 1 < \varepsilon$ , cioè  $a^\delta < 1 + \varepsilon$ . Se cerchiamo  $\delta$  nella forma  $\delta = \frac{1}{n}$ , con  $n$  intero positivo, ciò equivale alla condizione  $a < (1 + \varepsilon)^n$ . Usando la disuguaglianza di Bernoulli (5.15), si ha che  $(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$ . È dunque sufficiente scegliere  $n$  in modo che  $1 + n\varepsilon > a$ , ossia  $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ . La verifica di (C.3.1) è quindi conclusa. La continuità da sinistra nell'origine segue dalle relazioni

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{-(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 0^+} a^z} = 1,$$

dunque la funzione esponenziale è continua nell'origine. Infine, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0 + (x - x_0)} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{z \rightarrow 0} a^z = a^{x_0},$$

il che dimostra la continuità in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . □

**Pag. 104 ← Verifica dei limiti della tabella di pagina 104**

- |  |   |  |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty,$  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$       | $\alpha > 0$   |
| b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0,$  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ | $\alpha < 0$   |
| c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}$ |   |  |
| d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty,$   | $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$        | $a > 1$  |
| e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0,$   | $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$  | $a < 1$  |
| f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty,$  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ | $a > 1$  |
| g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty,$  | $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ | $a < 1$  |
| h) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x,$  | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x,$      | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tan x$ non esistono |

- i)  $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^\pm} \tan x = \mp \infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- l)  $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \arcsin x = \pm \frac{\pi}{2} = \arcsin(\pm 1)$
- m)  $\lim_{x \rightarrow +1} \arccos x = 0 = \arccos 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1} \arccos x = \pi = \arccos(-1)$
- n)  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}$

**Dimostrazione.**

- a) Consideriamo il primo limite. Fissato  $A > 0$ , poniamo  $B = A^{1/\alpha} > 0$ . Dalla monotonia della funzione elevamento a potenza, otteniamo

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x > B \quad \Rightarrow \quad x^\alpha > B^\alpha = A$$

e dunque la condizione di limite (Definizione 3.12) è verificata.

Per quanto riguarda il secondo limite, fissato  $\varepsilon > 0$ , poniamo  $\delta = \varepsilon^{1/\alpha}$ , da cui, ancora per la monotonia,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x < \delta \quad \Rightarrow \quad x^\alpha > \delta^\alpha = \varepsilon.$$

Pertanto la la condizione di limite (Definizione 3.15) è verificata.

- b) I risultati si deducono da a) mediante la sostituzione  $z = \frac{1}{x}$ , che fornisce  $x^\alpha = \frac{1}{z^{|\alpha|}}$ . Si applica allora l'algebra dei limiti e il Teorema di sostituzione 4.15.
- c) La formula è stata già dimostrata nell'Esempio 4.14 iii).
- d) Consideriamo il primo limite. Poniamo  $a = 1 + b$ , con  $b > 0$ , e usiamo la disuguaglianza di Bernoulli  $a^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb$ . Fissato ora  $A > 0$  arbitrario, sia  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $1 + nb > A$ . Ricordando la monotonia della funzione esponenziale, otteniamo

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > n \quad \Rightarrow \quad a^x > a^n \geq 1 + nb > A,$$

dunque la condizione di limite (Definizione 3.12) è verificata con  $B = n$ .

Il secondo limite segue dal primo, osservando che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow +\infty} a^z} = 0.$$

- e) I limiti seguono da d) usando l'identità  $a^x = \frac{1}{(1/a)^x}$ .
- f) Notiamo innanzitutto che, dai limiti d) e ricordando il Corollario 4.30, si deduce che l'immagine della funzione  $y = a^x$  è l'intervallo  $(0, +\infty)$ . Dunque la funzione inversa  $y = \log_a x$  è definita su  $(0, +\infty)$ ; inoltre, essa è strettamente crescente in quanto funzione inversa di una funzione strettamente crescente, e ha come immagine  $(-\infty, +\infty)$ . Il risultato segue allora dal Teorema 3.27.

- g) Segue da e), ragionando come sopra.
- h) La non esistenza del primo limite è già stata mostrata nell'Osservazione 4.19. Con un ragionamento analogo si possono trattare gli altri due limiti. Più in generale, si noti che una funzione periodica non costante non ammette limite per  $x \rightarrow \pm\infty$ .
- i) Segue dall'algebra dei limiti.
- l)-m) Essendo le funzioni continue nei punti interessati (per il Teorema 4.33), i risultati sono immediati.
- n) Si applica un ragionamento analogo a quello svolto in f), relativamente alla funzione  $y = \tan x$  ristretta all'intervallo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  e alla sua inversa  $y = \arctan x$ .